付録 K　干渉計の出力粒子数揺らぎと位相感度

K. 1　干渉計の出力粒子数の揺らぎ

光干渉計であれ原子波干渉計であれ，干渉計の出力ポートで観測される粒子数nが干渉計の出力信号に対応する．そして，一般に観測される粒子数には揺らぎΔnが伴う．ここでは，入力状態が①粒子数状態（フォック状態），②コヒーレント状態の二つの場合について，このΔnを求める．その際，入力状態が時間発展するシュレーディンガー表示よりも，演算子が時間発展するハイゼンベルグ表示の方が便利である．そこで，まず図 K.1(a)のような透過率 T のビームスプリッターの動作をハイゼンベルグ表示で考える．ビームスプリッターの入力ポートa, bの消滅演算子を$\hat{a}, \hat{b}$とし，これらはボソンの交換関係$[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}]=[\hat{b},\hat{b}^{\dagger}]=1$を満たすものとする．ここで考える粒子は，ボゾンであれば光子でも原子でもよい．出力ポートc, dのハイゼンベルグ表示における消滅演算子$\hat{c}, \hat{d}$は，粒子間相互作用がなければ入力ポートの消滅演算子$\hat{a}, \hat{b}$と以下の線形関係で結ばれる：

$$\begin{pmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{T} & -\sqrt{1-T}\\ \sqrt{1-T} & \sqrt{T}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\end{pmatrix}. \tag{K.1}$$

実際，$\hat{c}, \hat{d}$はボゾンの交換関係を満足している：

$$[\hat{c},\hat{c}^{\dagger}]=[\sqrt{T}\hat{a}-\sqrt{1-T}\hat{b},\sqrt{T}\hat{a}^{\dagger}-\sqrt{1-T}\hat{b}^{\dagger}]=T[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}]+(1-T)[\hat{b},\hat{b}^{\dagger}]=1 \tag{K.2}$$

$$[\hat{d},\hat{d}^{\dagger}]=[\sqrt{1-T}\hat{a}+\sqrt{T}\hat{b},\sqrt{1-T}\hat{a}^{\dagger}+\sqrt{T}\hat{b}^{\dagger}]=(1-T)[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}]+T[\hat{b},\hat{b}^{\dagger}]=1. \tag{K.3}$$

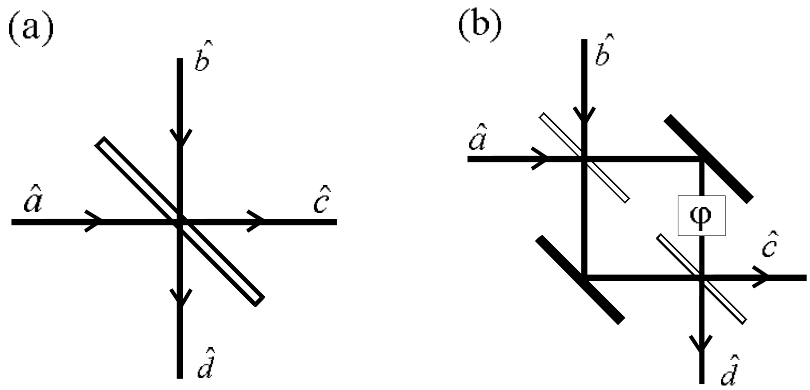

図 K.1　（a）演算子によるビームスプリッターの定式化．出力ポートの消滅演算子$\hat{c},\hat{d}$は，入力ポートの演算子$\hat{a},\hat{b}$と線形関係（K.1）で結ばれる．（b）マッハ・ツェンダー干渉計も，ビームスプリッターと同様に入出力ポートの消滅演算子を定義できる．

また，各ポートの粒子数演算子を$\hat{n}_x \equiv \hat{x}^\dagger \hat{x}$（$x = a,b,c,d$）とし，出力ポートの粒子数の期待値を計算すると，

$$\begin{aligned}<\hat{n}_c> &= <(\sqrt{T}\hat{a}^\dagger - \sqrt{1-T}\hat{b}^\dagger)(\sqrt{T}\hat{a} - \sqrt{1-T}\hat{b})> \\ &= T<\hat{n}_a> - \sqrt{T(1-T)}(\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{b}^\dagger\hat{a}) + (1-T)<\hat{n}_b>\end{aligned} \tag{K.4}$$

$$\begin{aligned}<\hat{n}_d> &= <(\sqrt{1-T}\hat{a}^\dagger + \sqrt{T}\hat{b}^\dagger)(\sqrt{1-T}\hat{a} + \sqrt{T}\hat{b})> \\ &= (1-T)<\hat{n}_a> + \sqrt{T(1-T)}(\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{b}^\dagger\hat{a}) + T<\hat{n}_b>\end{aligned} \tag{K.5}$$

となり，入力粒子数と出力粒子数の間には粒子数保存則

$$<\hat{n}_a> + <\hat{n}_b> = <\hat{n}_c> + <\hat{n}_d> \tag{K.6}$$

が成立している．

上記の定式化は，そのまま図 K.1(b)のマッハ・ツェンダー干渉計に拡張できる．ビームスプリッターの場合と同様に入力ポートの消滅演算子を$\hat{a}, \hat{b}$，出力ポートの消滅演算子を$\hat{c}, \hat{d}$とすると，これらの間には以下の関係式が成立する：

$$\begin{pmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t & -r\\ r & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\end{pmatrix} \tag{K.7}$$

ただし，

$$t = -\frac{1+e^{i\varphi}}{2},\ r = -\frac{1-e^{i\varphi}}{2}. \tag{K.8}$$

この干渉計は，位相差φに依存する透過率$|t|^2$ $(=1-|r|^2)$を持つビームスプリッターとみなすことができる．実際(K.7)で定義した$\hat{c}, \hat{d}$はボゾンの交換関係を満たし，$|t|^2 + |r|^2 = 1$より粒子数保存則（K.6）も成立する．

ここで，干渉計の出力ポートcで観測される粒子数の期待値$<\hat{n}_c>$を計算すると，

$$\begin{aligned}<\hat{n}_c> &= <\hat{c}^\dagger\hat{c}> = <(t\hat{a} - r\hat{b})(t^*\hat{a}^\dagger - r^*\hat{b}^\dagger)> \\ &= |t|^2<\hat{n}_a> + |r|^2<\hat{n}_b> - <tr^*\hat{a}\hat{b}^\dagger + t^*r\hat{a}^\dagger\hat{b}>\end{aligned} \tag{K.9}$$

となる．特に，入力ポートbが真空状態 $|0>_b$の場合，$\hat{b}|0>_b=0$, $\hat{b}^\dagger|0>_b=|1>_b$より式（K.9）の右辺第２項および３項はゼロになり，

$$<\hat{n}_c>=|t|^2<\hat{n}_a>=<\hat{n}_a>\frac{1+\cos\varphi}{2} \qquad \text{(K.10)}$$

となる．これが干渉計の出力信号となる．

次に，干渉計の出力ポートcで観測される粒子数の揺らぎ$<\Delta n_c>$を考える．ここでは各ポートの粒子数揺らぎ$<\Delta n_x>$を粒子数の分散$<(\Delta n_x)^2>\equiv<\hat{n}_x^2>-<\hat{n}_x>^2$の平方根で定義する（つまり$<\Delta n_x>^2=<(\Delta n_x)^2>$）．出力ポート$d$の粒子数の分散$<(\Delta n_c)^2>$を，入力ポート$b$が真空状態の場合について計算すると以下のようになる：

$$\begin{aligned}
<(\Delta n_c)^2>&=<\hat{c}^\dagger\hat{c}\hat{c}^\dagger\hat{c}>-<\hat{c}^\dagger\hat{c}>^2\\
&=<\hat{c}^\dagger(\hat{c}^\dagger\hat{c}+1)\hat{c}>-|t|^4<\hat{a}^\dagger\hat{a}>^2\\
&=<\hat{c}^\dagger\hat{c}^\dagger\hat{c}\hat{c}>+<\hat{c}^\dagger\hat{c}>-|t|^4<\hat{a}^\dagger\hat{a}>^2\\
&=|t|^4<\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}>+|t|^2<\hat{a}^\dagger\hat{a}>-|t|^4<\hat{a}^\dagger\hat{a}>^2\\
&=|t|^4<\hat{a}^\dagger(\hat{a}\hat{a}^\dagger-1)\hat{a}>+|t|^2<\hat{a}^\dagger\hat{a}>-|t|^4<\hat{a}^\dagger\hat{a}>^2\\
&=|t|^4\left(<\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}>-<\hat{a}^\dagger\hat{a}>^2\right)+|t|^2<\hat{a}^\dagger\hat{a}>-|t|^4<\hat{a}^\dagger\hat{a}>\\
&=|t|^4<(\Delta n_a)^2>+|t|^2|r|^2<\hat{n}_a>.
\end{aligned} \qquad \text{(K.11)}$$

この結果を用いて，入力ポートaの状態が①粒子数状態，②コヒーレント状態の二つの場合について出力ポートcの粒子数の分散および揺らぎを具体的に計算すると，

①粒子数状態$|N>_a$の場合

$<\hat{n}_a>=N$，$<(\Delta n_a)^2>=<\hat{n}_a^2>-<\hat{n}_a>^2=N^2-N^2=0$より，

$$<(\Delta n_c)^2>=0+|t|^2|r|^2\,N=|r|^2<\hat{n}_c>=\frac{N}{4}\sin^2\varphi \qquad \text{(K.12)}$$

$$<\Delta n_c>=|r|\sqrt{<n_c>}=\frac{\sqrt{N}}{2}|\sin\varphi| \;. \qquad \text{(K.13)}$$

②コヒーレント状態$|\alpha>_a$の場合

$<\hat{n}_a>=|\alpha|^2$，$<(\Delta n_a)^2>=<\hat{n}_a^2>-<\hat{n}_a>^2=(|\alpha|^4+|\alpha|^2)-|\alpha|^4=|\alpha|^2$より

$$<(\Delta n_c)^2>=|t|^4|\alpha|^2+|t|^2|r|^2|\alpha|^2=|t|^2|\alpha|^2=<\hat{n}_c> \tag{K.14}$$

$$<\Delta n_c>=\sqrt{<\hat{n}_c>}=\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right||\alpha| \quad . \tag{K.15}$$

このように，出力の平均値に対する揺らぎの比$<\Delta n>/<n>$は，入力が粒子数状態でもコヒーレント状態でも$1/\sqrt{<n>}$に比例する．粒子数の分散が平均値に等しくなるような揺らぎ（$<(\Delta n)^2>=<n>$）は一般に**ショット雑音**と呼ばれるが，入力がショット雑音を持つコヒーレント状態の場合，出力もショット雑音を持つことが式（K.14）からわかる．一方，粒子数揺らぎがゼロである粒子数状態が入力の場合は，式（K.12）より$<(\Delta n)^2>=|r|^2<n>$（$0\le|r|^2\le1$）であるので，ショット雑音以下の出力が得られる．

K.2　干渉計の位相感度

干渉計の位相感度を，干渉計が識別し得る最小の位相差$\Delta\varphi$と定義する．干渉計の出力としてポートcを用いるとすると，$\Delta\varphi$は以下のような式で表現できる：

$$\Delta\varphi=\left|\frac{\partial\varphi}{\partial<\hat{n}_c>}\right|<\Delta n_c>=\left|\frac{\partial<\hat{n}_c>}{\partial\varphi}\right|^{-1}<\Delta n_c> \quad . \tag{K.16}$$

式（K.10）より$\frac{\partial<\hat{n}_c>}{\partial\varphi}=<\hat{n}_a>\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1+\cos\varphi}{2}=-\frac{<\hat{n}_a>}{2}\sin\varphi$であるので，式（K.16）は

$$\Delta\varphi=\frac{2<\Delta n_c>}{<\hat{n}_a>|\sin\varphi|} \tag{K.17}$$

と表せる．入力が粒子数状態$|N>_a$の場合は，式（K.13）より

$$\Delta\varphi=\frac{1}{\sqrt{N}} \tag{K.18}$$

となり，位相感度はφの値に依らない．一方，入力がコヒーレント状態$|\alpha>_a$の場合は，式（K.15）より

$$\Delta\varphi=\frac{1}{|\alpha||\sin(\varphi/2)|} \tag{K.19}$$

となり，位相感度はφに依存する．