

付録 F 吸収イメージング法

F.1 プローブ光の透過率と原子集団の密度分布との関係

図 F.1 のように、密度分布 $n(x, y, z)$ の原子集団に原子の光学遷移に共鳴するプローブ光を z 方向に照射すると、プローブ光に原子集団の影ができる。プローブ光の初期の強度分布を $I_0(x, y)$ 、原子集団を通過した後のそれを $I_\infty(x, y)$ とし、 $I_0(x, y)$ と $I_\infty(x, y)$ の関係を求める。原子 1 個あたりのプローブ光の吸収断面積を σ_{abs} (その実際の値については付録 G を参照) とすると、プローブ光の強度分布は次の微分方程式に従う：

$$\frac{dI(x, y, z)}{dz} = -\sigma_{\text{abs}} n(x, y, z) I(x, y, z) \quad (\text{F.1})$$

これは、変数分離法で容易に解ける：

$$\int_{I_0}^{I_\infty} \frac{1}{I(x, y, z)} dI = -\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{\text{abs}} n(x, y, z) dz$$

$$\therefore \ln \frac{I_\infty(x, y)}{I_0(x, y)} = -\text{OD}(x, y) \Leftrightarrow I_\infty(x, y) = I_0(x, y) \exp[-\text{OD}(x, y)] \quad (\text{F.2})$$

ここで、

$$\text{OD}(x, y) \equiv \sigma_{\text{abs}} \int_{-\infty}^{\infty} n(x, y, z) dz = -\ln \frac{I_\infty(x, y)}{I_0(x, y)} \quad (\text{F.3})$$

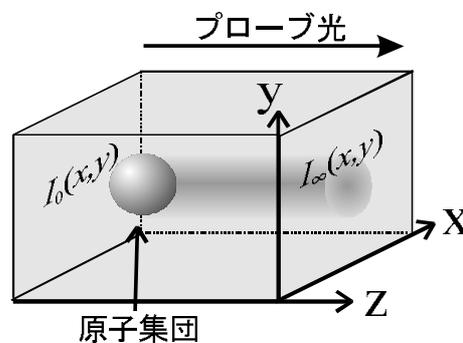


図 F.1 吸収イメージング法の原理。プローブ光には、原子集団の密度分布を反映した影ができる。

と定義した．OD は光学密度 (optical density) と呼ばれ、プローブ光の透過率の自然対数にマイナスをつけたものである．この光学密度を x - y 平面で積分したものは、以下のように全粒子数 N に比例する、

$$\int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \text{OD}(x, y) dx dy = \sigma_{\text{abs}} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} n(x, y, z) dx dy dz = \sigma_{\text{abs}} N \quad (\text{F.4})$$

実際の実験では、イメージングシステム (第3章、図3.13) を用いて、プローブ光の強度分布を CCD カメラで撮影する．以下の議論は、イメージングの倍率は1として話を進める．原子集団が存在するとき、及び存在しないときのプローブ光の強度分布画像をそれぞれ「イメージ」、「フラットフィールド」と呼び、それぞれの場合における各画素 (i, j) の輝度を $P_{i,j}$ 、 $F_{i,j}$ とする．また、プローブ光そのものが存在しないときの画像を「ダークフレーム」と呼び、このときの各画素の輝度を $D_{i,j}$ とする． $D_{i,j}$ は、プローブ光以外の迷光や素子の暗電流または熱雑音によって、一般にゼロにはならない．各画素 (i, j) の座標を (x_i, y_j) とすると、各画素位置での光学密度は

$$\text{OD}(x_i, y_j) = -\ln \frac{P_{i,j} - D_{i,j}}{F_{i,j} - D_{i,j}} \quad (\text{F.5})$$

と表せる．よって、式 (F.4) より原子集団の全粒子数は、

$$N = -\frac{\Delta s}{\sigma_{\text{abs}}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \ln \frac{P_{i,j} - D_{i,j}}{F_{i,j} - D_{i,j}} \quad (\text{F.6})$$

と計算できる．ここで m, n は CCD カメラの縦、横方向の画素数、 Δs は各画素の面積である．

F.2 トラップから開放された原子集団の密度分布

空間的に閉じ込められた密度分布 $n_r(\mathbf{r})$ 、運動量分布 $n_p(\mathbf{p})$ の原子集団を、瞬間的に開放した後の原子集団の密度分布 $n_{\text{tof}}(\mathbf{r}, t)$ (t は開放後の時間) を考える．拡散中の原子同士の相互作用 (衝突を含む) を無視すれば、以下のような合成積で表現される：

$$n_{\text{tof}}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' n_r(\mathbf{r}') G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) \quad (\text{F.7})$$

ここで $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)$ は、原子集団が最初 $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ に局在しているとき(つまり $n_r(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$) の t 秒後の拡散パターンである。この $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)$ の具体形を求めるため、図 F.2 のように、最初 $\mathbf{r} = 0$ に局在していた原子集団 ($n_r(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$) の t 秒後の密度分布 $G(\mathbf{r}, t)$ 上の位置 \mathbf{r} における微小体積 $dx dy dz$ と、それに対応する運動量空間上の位置 \mathbf{p} における微小体積 $dp_x dp_y dp_z$ を考える。 \mathbf{r} と \mathbf{p} の関係、および $dx dy dz$ と $dp_x dp_y dp_z$ の関係は、

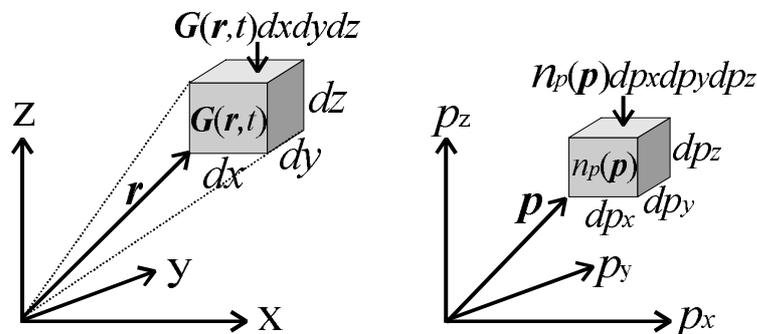
$$\mathbf{p} = \frac{m}{t} \mathbf{r}、 dp_x dp_y dp_z = \left(\frac{m}{t}\right)^3 dx dy dz \quad (\text{F.8})$$

である。それぞれの微小体積中に存在する粒子数 dN は同じであるから

$$\begin{aligned} dN &= G(\mathbf{r}) dx dy dz = n_p(\mathbf{p}) dp_x dp_y dp_z \\ \Leftrightarrow G(\mathbf{r}) dx dy dz &= n_p\left(\frac{m}{t} \mathbf{r}\right) \left(\frac{m}{t}\right)^3 dx dy dz \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

ここで、 \mathbf{r} を $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ で置き換えると、 $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)$ は以下のように求まる。

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) = n_p\left(\frac{m}{t}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\right) \left(\frac{m}{t}\right)^3 . \quad (\text{F.10})$$



F.3 運動量分布がマクスウェル・ボルツマン分布の場合

図 F.2 拡散した原子集団の位置空間上の微小体積と、それに対応する運動量空間上の微小体積。それぞれは関係 $\mathbf{p} = m\mathbf{r}/t$ 、 $dp_x dp_y dp_z = (m/t)^3 dx dy dz$ で結ばれている。

原子集団の温度がボース凝縮の転移温度に比べて十分高いとき、その運動量分布（速度分布）はマクスウェル・ボルツマン分布で近似できる：

$$n_{\text{MB}}(\mathbf{p}) = \frac{N}{(2\pi)^{2/3} \sigma_p^3} \exp\left(-\frac{p^2}{2\sigma_p^2}\right) \left(n_{\text{MB}}(\mathbf{v}) = \frac{N}{(2\pi)^{2/3} \sigma_v^3} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right) \right). \quad (\text{F.11})$$

ただし、

$$\sigma_p = \sqrt{mk_{\text{B}}T} \left(\sigma_v = \sqrt{\frac{k_{\text{B}}T}{m}} \right). \quad (\text{F.12})$$

仮定として、初期の原子集団の密度分布が標準偏差 σ_0 のガウシアン型をしているとする：

$$n_r(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_0^3} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_0^2}\right). \quad (\text{F.13})$$

ここで規格化因子は、合成積をとるため（全粒子数 N ではなく）1 としてある。このとき、拡散後の密度分布 $n_{\text{MB,tof}}(\mathbf{r}, t)$ は、式 (F.7) より、

$$\begin{aligned} n_{\text{MB,tof}}(\mathbf{r}, t) &= \int d\mathbf{r}' n_r(\mathbf{r}) n_p\left(\frac{m}{t}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\right) \left(\frac{m}{t}\right)^3 \\ &= \frac{N}{(2\pi)^3 \sigma_0^2 \sigma_{p0}^2} \left(\frac{m}{t}\right)^3 \int d\mathbf{r}' \exp\left[-\frac{|\mathbf{r}'|^2}{2\sigma_0^2}\right] \cdot \exp\left[-\frac{(m|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/t)^2}{2\sigma_p^2}\right] \\ &= \frac{N}{(2\pi)^{3/2} (\sigma_0^2 + \sigma_v^2 t^2)^{3/2}} \exp\left[-\frac{r^2}{2(\sigma_0^2 + \sigma_v^2 t^2)}\right] \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

となる。吸収イメージング法で観測される $\text{OD}(x, y)$ は、これを z 方向に積分したものに比例する：

$$\text{OD}(x, y) = \sigma_{\text{abs}} \int_{-\infty}^{\infty} n_{\text{MB,tof}}(\mathbf{r}, t) dz = \text{OD}_{\text{max}} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2(T, t)}\right] \quad (\text{F.15})$$

ただし

$$\sigma(T, t) = \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_v^2 t^2} \quad (\text{F.16})$$

$$\text{OD}_{\max} = \frac{N\sigma_{\text{abs}}}{2\pi\sigma^2(T, t)} \quad (\text{F.17})$$

式(F.16)より,異なる時刻 t_1, t_2 での原子集団の分布の幅 $\sigma(T, t_1), \sigma(T, t_2)$ がわかれば σ_v が求まる:

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{\sigma^2(T, t_1) - \sigma^2(T, t_2)}{t_1^2 - t_2^2}} \quad (\text{F.18})$$

この σ_v がわかれば,式(F.12)の関係から原子集団の温度が推定できる:

$$T = \frac{m\sigma_v^2}{k_B} \quad (\text{F.19})$$

また,式(F.17)より,任意の時刻における吸収イメージからピークの光学密度 OD_{\max} と分布の幅 $\sigma(T, t)$ がわかれば,原子集団の数 N が求められる:

$$N = \frac{2\pi\sigma^2(T, t)\text{OD}_{\max}}{\sigma_{\text{abs}}} \left(= \frac{\pi w^2(T, t)\text{OD}_{\max}}{2\sigma_{\text{abs}}} \quad (w(T, t) = 2\sigma(T, t) \text{は} e^{-2} \text{半径}) \right) \quad (\text{F.20})$$

F.4 マクスウェル・ボルツマン分布とボース・アインシュタイン分布の比較

3次元調和ポテンシャル中の原子集団の温度が転移温度に近い場合,その運動量分布として以下のボース・アインシュタイン分布(付録B,式(B.14))を考えなくてはならない:

$$n_{\text{BE}}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^3 m^3 \bar{\omega}^3} g_{3/2} \left[\exp\left[-(p^2/2m - \mu)/k_B T\right] \right] \quad (\text{F.21})$$

ここで $\lambda_{\text{dB}} \equiv h/\sqrt{2\pi mk_B T}$ は,熱的ド・ブロイ波長である.ここで,特に原子集団の温度が転移温度(付録A,式(A.50))の場合を考える:

$$T = T_C = \frac{\hbar\bar{\omega}}{k_B} \left(\frac{N}{1.202} \right)^{1/3}. \quad (\text{F.22})$$

このとき, $\mu/k_B T = 0$ であるから,

$$n_{\text{BE}}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^3 m^3 \bar{\omega}^3} g_{3/2} \left[\exp \left(-\frac{p^2}{2mk_B T_C} \right) \right] \quad (\text{F.23})$$

となる. 一方, 転移温度でのマクスウェル・ボルツマン分布は, 式 (F.11), (F.22) より

$$n_{\text{MB}}(\mathbf{p}) = \frac{1.202}{\lambda_{\text{dB}}^3 m^3 \bar{\omega}^3} \exp \left(-\frac{p^2}{2mk_B T_C} \right) \quad (\text{F.24})$$

となる. 初期の密度分布をデルタ関数で近似できるとき, 運動量分布は ($p = mr/t$ と置き換え, 適当な規格化因子をつければ) 拡散後の密度分布に等しくなる*. そのようなときの拡散後の密度分布を, ボース・アインシュタイン分布 (式 (F.23)) とマクスウェル・ボルツマン分布 (式 (F.24)) とで比較したのが図 F.3 (a) である. 両者の差は, 原点付近で顕著

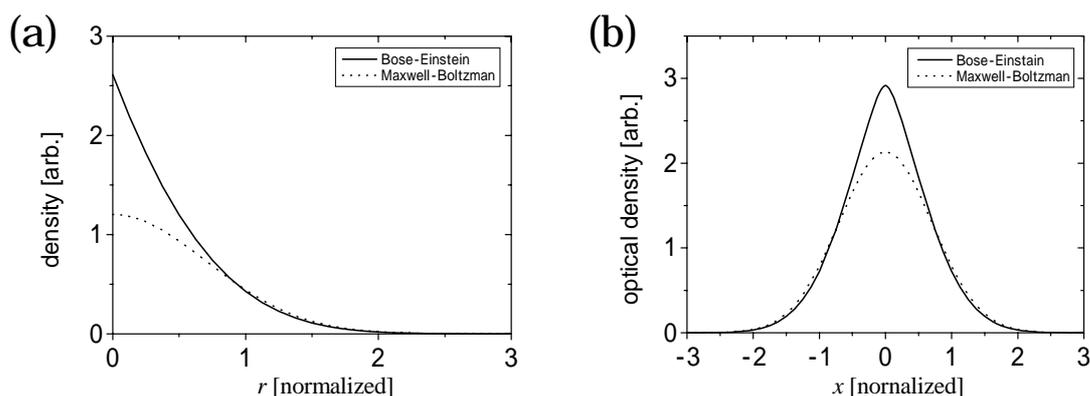


図 F.3 ボース・アインシュタイン分布とマクスウェル・ボルツマン分布の比較. (a)は拡散後の密度分布, (b)は光学密度 (密度分布を1次元方向に積分したもの). 横軸は, マクスウェル・ボルツマン分布 (ガウシアン分布) の $1/e$ 半径で規格化されている.

* 式 (F.7), (F.10) より, $n_{\text{tof}}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') n_p \left(\frac{m}{t} (\mathbf{r}-\mathbf{r}') \right) \left(\frac{m}{t} \right)^3 = \left(\frac{m}{t} \right)^3 n_p \left(\frac{m}{t} \mathbf{r} \right)$

である* (このような差は, 付録 B. 4 で議論したようにポテンシャル中の (拡散前の) 原子集団の密度分布にも表れる). しかし, 裾野の分布は両者でよく一致している. 図 F.3(b)は, 光学密度 (拡散後の密度分布を 1 次元方向に積分したものに比例) を比較したものである. 原点付近での両者の差異は, 図 F.3(a)ほど顕著でなくなるが, 依然有意義である. よって, 転移温度付近の原子集団の温度を吸収イメージから正確に測定するには, ガウシアンフィットは適当でない. しかし分布の裾野は, マクスウェル・ボルツマン分布とほぼ一致するので, 裾野のみを用いてガウシアンフィットする方法がしばしば用いられる.

F. 5 トラップから開放されたボース凝縮体の密度分布

3次元調和ポテンシャルから開放されたボース凝縮体の密度分布は, トーマス・フェルミ近似のもとでは,

$$n_{\text{TF}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{U_0} \left[1 - \left(\frac{x^2}{d_x^2(t)} + \frac{y^2}{d_y^2(t)} + \frac{z^2}{d_z^2(t)} \right) \right] \quad (\text{F.25})$$

$$d_v(t) = \lambda_v(t) \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_v^2}} \quad (\text{F.26})$$

と表される (付録 E. 4). 式 (F.25) は, 全粒子数 N を用いて,

$$n_{\text{TF}}(\mathbf{r}, t) = \frac{15N}{8\pi d_x d_y d_z} \left[1 - \left(\frac{x^2}{d_x^2(t)} + \frac{y^2}{d_y^2(t)} + \frac{z^2}{d_z^2(t)} \right) \right] \quad (\text{F.27})$$

と表現できる. これを z 方向に積分し, 光学密度 $\text{OD}(x, y)$ を求めると,

$$\text{OD}(x, y) = \sigma_{\text{abs}} \int_{-\infty}^{\infty} n_{\text{TF}}(x, y, z, t) dz = \text{OD}_{\text{max}} \left[1 - \left(\frac{x^2}{d_x^2(t)} + \frac{y^2}{d_y^2(t)} \right) \right]^{3/2} \quad (\text{F.28})$$

ただし,

$$\text{OD}_{\text{max}} = \frac{5N\sigma_{\text{abs}}}{2\pi d_x(t)d_y(t)} \quad (\text{F.29})$$

となる. 任意の時刻における吸収イメージからピーク光学密度 OD_{max} および凝縮体の縦横

* ピーク値の比は, $\zeta(3/2) : \zeta(3) = 2.612 : 1.202$

幅 $d_x(t)$, $d_y(t)$ がわかれば, 式 (F.29) より粒子数 N が求められる:

$$N = \frac{2\pi d_x(t)d_y(t)\text{OD}_{\max}}{5\sigma_{\text{abs}}} . \quad (\text{F.30})$$

また, 任意の時刻における吸収イメージから, ある方向の幅 $d_v(t)$ がわかり, 且つその時刻における膨張率 $\lambda_v(t)$ が理論的に求められていれば, 式 (F.26) より凝縮体の初期の幅 $d_v(0)$ と化学ポテンシャル μ が求められる:

$$d_v(0) = \frac{d_v(t)}{\lambda_v(t)} \quad (\text{F.31})$$

$$\mu = \frac{1}{2} m \omega_v^2 \left(\frac{d_v(t)}{\lambda_v(t)} \right)^2 . \quad (\text{F.32})$$

化学ポテンシャル μ と原子数 N の関係式 (付録 E, 式 (E.14))

$$\mu = \frac{1}{2} \hbar \bar{\omega} \left(15 N a \sqrt{\frac{m \bar{\omega}}{\hbar}} \right)^{2/5} \quad (\text{F.33})$$

より, 化学ポテンシャル μ がわかれば原子数 N を求めることもできる:

$$N = \frac{2\sqrt{2}}{15} \frac{\mu^{5/2}}{a \hbar^2 \bar{\omega}^3 m^{1/2}} . \quad (\text{F.34})$$

この式は, 正確な測定の難しい原子の S 波散乱長 a を含み, 更に観測される凝縮体の幅 $d_v(t)$ の 5 乗に比例するので, 式 (F.30) より精度が悪い. しかも, この式が成立するのはトーマス・フェルミ近似が成り立つときのみである.