

付録 A 理想ボース気体のボース・アインシュタイン凝縮

A.1 ギブス因子および大分配関数

温度 T 、化学ポテンシャル μ の熱浴 R と、熱的および拡散的に接触した系 S を考える。熱浴 R と系 S の複合系 $R+S$ の全エネルギー U_0 および全粒子数 N_0 は保存するとする。系 S は、例えば箱型ポテンシャル中の多粒子系でもいいし、または特定の量子状態（エネルギー準位）でもよい。それぞれの場合については後ほど具体的に取上げるが、ここでは系 S の実際には依らない一般的な議論をする。

系 S が粒子 N_1 、エネルギー E_1 の状態にある確率 $P_S(N_1, E_1)$ と、粒子 N_2 、エネルギー E_2 の状態にある確率 $P_S(N_2, E_2)$ の比は、熱浴の粒子数が $N_0 - N_1$ 、エネルギーが $U_0 - E_1$ である状態の数 $W_R(N_0 - N_1, U_0 - E_1)$ と、熱浴の粒子数が N 、エネルギーが E である状態の数 $W_R(N_0 - N_2, U_0 - E_2)$ の比と等しい：

$$\frac{P_S(N_1, E_1)}{P_S(N_2, E_2)} = \frac{W_R(N_0 - N_1, U_0 - E_1)}{W_R(N_0 - N_2, U_0 - E_2)} \quad (\text{A.1})$$

エントロピーの定義 $S(N, U) \equiv k_B \ln W(N, U)$ より、状態数 $W(N, U)$ はエントロピーを用いて

$$W(N, U) = \exp \frac{S(N, U)}{k_B} \quad (\text{A.2})$$

と表されるので、式 (A.1) は

$$\frac{P_S(N_1, E_1)}{P_S(N_2, E_2)} = \frac{\exp[S_R(N_0 - N_1, U_0 - E_1)/k_B]}{\exp[S_R(N_0 - N_2, U_0 - E_2)/k_B]} \quad (\text{A.3})$$

と表せる。エントロピー $S(N, U)$ の N と U に関する 1 次までの展開式

$$S(N_0 - N, U_0 - E) \cong S(N_0, U_0) - \left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_U N - \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_N E \quad (\text{A.4})$$

と、温度 T と化学ポテンシャル μ の定義式

$$\frac{1}{T} \equiv \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_N \quad (\text{A.5})$$

$$\mu \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_T = -T \left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_U \quad (F \equiv U - TS \text{ はヘルムホルツの自由エネルギー}) \quad (\text{A.6})$$

を用いると、式 (A.1) は、

$$\frac{P_S(N_1, E_1)}{P_S(N_2, E_2)} = \frac{\exp[(N_1\mu - E_1)/k_B T]}{\exp[(N_2\mu - E_2)/k_B T]} \quad (\text{A.7})$$

と書き表せる。このことから、一般に、系 S が粒子 N 、エネルギー E の状態にある確率は、

$$\exp[(N\mu - E)/k_B T] \quad (\text{A.8})$$

に比例することがわかる。これは**ギブス因子**と呼ばれ、熱浴と熱的かつ拡散的に接触している系へのボルツマン因子の自然な拡張になっている。ここで次の変数を導入する：

$$\beta \equiv \frac{1}{k_B T} \quad (\text{A.9})$$

$$\lambda \equiv \exp \frac{\mu}{k_B T} \quad (\text{A.10})$$

特に λ はフガシティー (fugacity) と呼ばれる。これらの変数を用いると、ギブス因子は

$$\lambda^N \exp(-\beta E) \quad (\text{A.11})$$

と表せる。

系のとりうる全ての状態に関するギブス因子の和

$$Z_G = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{s(N)} \lambda^N \exp(-\beta E_{s(N)}) \quad (\text{A.12})$$

は、**ギブス和**、または**大分配関数**と呼ばれる。これを用いると、系が粒子 N_1 、エネルギー E_1 の状態にある確率 $P(N_1, E_1)$ は

$$P(N_1, E_1) = \frac{\lambda^N \exp(-\beta E_1)}{Z_G} \quad (\text{A.13})$$

と表せる。

ギブス和 Z_G を用いると、系の様々な物理量の期待値（統計的平均値）を計算することができる。例えば、系 S の粒子数の平均値 $\langle N \rangle$ は、

$$\langle N \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{s(N)} NP(N, E_{s(N)}) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{s(N)} N \frac{\lambda^N \exp(-\beta E_{s(N)})}{Z_G} = \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln Z_G \quad (\text{A.14})$$

このように Z_G から計算できる。

A.2 ボース・アインシュタイン分布

系 S として、外部ポテンシャルに閉じ込められた理想（相互作用のない）ボース粒子系を考える。この系に許される一粒子状態 $\phi_i(\mathbf{r})$ （一粒子シュレーディンガー方程式の解）のエネルギーを ε_i とすると、系のエネルギー E は、

$$E = n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + n_3 \varepsilon_3 \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} n_i \varepsilon_i \quad (\text{A.15})$$

と表せる。ただし、 n_i は一粒子状態 $\phi_i(\mathbf{r})$ を占める粒子数である。系の粒子数 N が与えられると、系に可能な状態は、

$$N = n_1 + n_2 + n_3 \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} n_i \quad (\text{A.16})$$

を満たす可能な組み合わせ $\{n_i\}$ で指定される。よって、ギブス和 Z_G は、

$$\begin{aligned} Z_G &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\substack{\{n_i\}, \\ \sum_{i=1}^{\infty} n_i = N}} \lambda^N \exp(-\beta \sum_{i=1}^{\infty} n_i \varepsilon_i) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\substack{\{n_i\}, \\ \sum_{i=1}^{\infty} n_i = N}} \prod_{i=1}^{\infty} [\lambda \exp(-\beta \varepsilon_i)]^{n_i} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

と表せる。式 (A.17) 2 番目の は、 $\sum_{i=1}^{\infty} n_i = N$ という制約があるが、1 番目の で、すべての N について和をとるので、実効的に n_i は独立に任意の値を取るとしてよい*：

$$\begin{aligned} Z_G &= \sum_{n_1}^{\infty} \sum_{n_2}^{\infty} \sum_{n_3}^{\infty} \cdots \left[\prod_{i=1}^{\infty} [\lambda \exp(-\beta \varepsilon_i)]^{n_i} \right] \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{n_i=0}^{\infty} [\lambda \exp(-\beta \varepsilon_i)]^{n_i} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

ここで、 $\lambda \exp(-\beta \varepsilon_i) = \exp[\beta(\mu - \varepsilon_i)] < 1$ と仮定すると**，

$$Z_G = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \exp[\beta(\mu - \varepsilon_i)]} \quad (\text{A.19})$$

となる。

ある特定の一粒子状態 $\phi_\nu(\mathbf{r})$ を占める粒子数 n_ν の期待値 $f_\nu \equiv \langle n_\nu \rangle$ を、式 (A.14) にならって計算すると、

$$f_\nu = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{s(N)} n_\nu P(N, E_{s(N)}) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{s(N)} n_\nu \frac{\lambda^N \exp(-\beta \sum_{i=1}^{\infty} n_i \varepsilon_i)}{Z_G} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_\nu} \ln Z_G \quad (\text{A.20})$$

これに (A.19) の Z_G を当てはめると、

$$\begin{aligned} f_\nu &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_\nu} \sum_{i=1}^{\infty} \ln[1 - \exp[\beta(\mu - \varepsilon_i)]] \\ &= \frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_\nu - \mu)] - 1} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

となる。これは**ボース・アインシュタインの分布関数**、または単に**ボース分布関数**と呼ばれる。

* このことが、ボース粒子系の統計的諸性質を計算するのに大分配関数 Z_G を用いる理由である。分配関数 $Z = \sum_{\sum_{i=1}^{\infty} n_i = N} \exp\left(\beta \sum_{i=1}^{\infty} n_i \varepsilon_i\right)$ でも、原理的に系の正しい統計的性質を計算できるはずだが、 $\sum_{i=1}^{\infty} n_i = N$ という制約のため計算が非常に困難である。

** この仮定は、粒子数が有限の実際の系では、いつでも成り立っている。

系の全粒子数の期待値 $\langle N \rangle$ を、式 (A.14) より計算すると、

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln Z_G = -\lambda \sum_{i=1}^{\infty} \ln[1 - \lambda \exp(-\beta \varepsilon_i)] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_i - \mu)] - 1} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

このように、各一粒子状態の平均粒子数 f_i の和になる。実際の問題では、系の全粒子数 N が予め決まっている場合を考えることが多い。その際は、式 (A.22) の $\langle N \rangle$ を N で置き換える。そして化学ポテンシャル μ は、式 (A.22) を満足するように決定される。

ボース分布関数 f_ν は (温度と化学ポテンシャルが決まっているなら) 一粒子状態のエネルギー ε にのみ依存するので、今後は $f(\varepsilon)$ と表すことにする。系の状態密度 (単位エネルギー当たりの状態数) を $D(\varepsilon)$ とすると、系の全粒子数 N は、式 (A.22) の全状態に関する和をエネルギーに関する積分で置き換えて

$$N = \int_{\varepsilon_{\min}}^{\infty} D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (\text{A.23})$$

と表現できる*。ここで ε_{\min} は系の基底状態のエネルギーである。

A.3 箱型ポテンシャル中でのボースアインシュタイン凝縮

一辺の長さ L 、体積 $V = L^3$ の箱型ポテンシャルに閉じ込められた N 個のボース粒子系を考える。この系の一粒子シュレーディンガー方程式の解、つまり固有状態の波動関数は、周期的境界条件を採用すると、

$$\phi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \quad (\text{A.24})$$

ただし、

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_x, k_y = \frac{2\pi}{L} n_y, k_z = \frac{2\pi}{L} n_z \quad (n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{A.25})$$

である。固有状態のエネルギーは、その波数ベクトルの大きさ $k = |\mathbf{k}|$ の関数で

*式 (A.23) は最低エネルギー状態の粒子数がマクロなときは正しくない。式 (A.32) の脚注を参照のこと。

$$\varepsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (\text{A.26})$$

である．エネルギーがある値 ε 以下の固有状態の数 $N(\varepsilon)$ は、 k 空間において半径が $k = \sqrt{2m\varepsilon}/\hbar$ の球の内部にある固有状態の数である．(A.25) より、 k 空間での体積 $(2\pi/L)^3$ あたりに一つの固有状態が存在するので、

$$N(\varepsilon) = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar} \right)^3 \bigg/ \left(\frac{2\pi}{L} \right)^3 = \frac{V}{6\pi^2} \left(\frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar} \right)^3 \quad (\text{A.27})$$

となる．よって状態密度関数 $D(\varepsilon)$ は、

$$D(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} \quad (\text{A.28})$$

となる．

最低エネルギー状態 ($\varepsilon = 0$) にある粒子数を N_0 とすると、 N_0 はボース分布関数を用いて、

$$N_0 = f(0) = \frac{1}{\exp(-\beta\mu) - 1} \left(= \frac{\lambda}{1 - \lambda} \right) \quad (\text{A.29})$$

と表される．系の温度が絶対零度に近づいていくと、 N_0 は系の全粒子数 N に近づいていくはずである．つまり、全粒子数 N をマクロな数とすると、 N_0 マクロな数に成り得る． N_0 が正のマクロな数になるには、式 (A.29) の分母の $\exp(-\beta\mu)$ が 1 より大きく、且つ 1 に極めて近くなければならない．つまり $\mu < 0$ ($\beta \equiv 1/k_B T > 0$ なので $\beta\mu < 0$)、且つ $\beta\mu$ が 0 に極めて近くなければならない．このとき、指数関数 $\exp(-\beta\mu)$ の $\beta\mu$ に関するテイラー展開の 1 次までの式「 $\exp(-\beta\mu) \cong 1 - \beta\mu$ 」は、非常によい近似式であり、これを式 (A.29) に代入すると、

$$N_0 \cong -\frac{1}{\beta\mu} \Leftrightarrow \beta\mu \cong -\frac{1}{N_0} \quad (\text{A.30})$$

このときフガシティー λ は

$$\lambda \equiv \exp(\beta\mu) \cong 1 + \beta\eta = 1 - \frac{1}{N_0} \quad (\text{A.31})$$

となる．このように、最低エネルギー状態にマクロな数の粒子が存在しているときは、系のフガシティーが極めて 1 に近い値をとらなければならない．

一方、最低エネルギー状態以外に存在する粒子数 N_{ex} は、式 (A.23) より、

$$N_{\text{ex}} = \int_0^\infty D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (\text{A.32})$$

と表せる[†]．これを実際に計算すると、

$$\begin{aligned} N_{\text{ex}} &= \int_0^\infty D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}}{\exp[\beta(\varepsilon - \mu)] - 1} d\varepsilon \\ &= \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \beta^{-3/2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{\lambda^{-1} \exp x - 1} dx \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

となる．ここで $x = \beta\varepsilon$ とおいた．

今、最低エネルギー状態の粒子数を N_0 がマクロな数であるとする．このとき、フガシティーは $\lambda = 1 - 1/N_0$ となる．しかし、式 (A.33) の被積分関数は、 λ の微小変化に敏感ではないので、 $\lambda = 1$ としても実質的に問題ない．すると、(A.33) の積分は、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^x - 1} dx &= \int_0^\infty x^{1/2} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \sum_{s=1}^\infty \int_0^\infty x^{1/2} e^{-sx} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{s=1}^\infty \frac{1}{s^{3/2}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \zeta(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 2.612\dots \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

[†] 本来ならば、エネルギーに関する積分範囲は $\varepsilon > 0$ とすべきだが、状態密度関数 $D(\varepsilon)$ は、式 (A.28) より $D(0) = 0$ であるので、積分範囲を 0 からとってもよい．逆に言えば、式 (A.32) では、最低エネルギー状態の粒子数 N_0 を、特に N_0 がマクロな数の場合、正しくカウントできない．

と計算でき、

$$N_{\text{ex}} = \frac{V}{\lambda_{\text{dB}}^3} \zeta(3/2) \quad (\text{A.35})$$

となる．ここで、

$$\lambda_{\text{dB}} \equiv \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_{\text{B}} T}} \quad (\text{A.36})$$

は、熱的ド・ブROI波長と呼ばれる[†]．

全粒子数は、最低エネルギー状態にある（マクロな）粒子数 N_0 と励起状態にある粒子数 N_{ex} の和である：

$$N = N_0 + N_{\text{ex}} = \frac{\lambda}{1-\lambda} + \frac{V}{\lambda_{\text{dB}}^3} \zeta(3/2) \quad (\text{A.37})$$

N_0 がマクロな数であるためには、当然 $N > N_{\text{ex}}$ でなくてはならない．この条件は、

$$N > \frac{V}{\lambda_{\text{dB}}^3} \zeta(3/2) \Leftrightarrow \rho_{\text{ps}} > \zeta(3/2) \quad (\text{A.38})$$

ただし、

$$\rho_{\text{ps}} \equiv \frac{N}{V} \lambda_{\text{dB}}^3 \quad (\text{A.39})$$

と書ける． ρ_{ps} は位相空間密度 (phase-space density) と呼ばれる^{††}． ρ_{ps} が条件式 (A.38)

$\zeta(\alpha) \equiv \sum_{s=1}^{\infty} 1/s^\alpha$ は、リーマンのツェータ関数と呼ばれる． $\zeta(\alpha)$ は、 α が偶数の場合は解析的に計算できるが、それ以外の場合は数値的に計算され、 $\zeta(3/2) = 2.612\dots$ 、 $\zeta(3) = 1.202\dots$ である．

[†] (A.36) の分母 $\sqrt{2\pi m k_{\text{B}} T}$ は、系の運動量の揺らぎ Δp を表しているため、ハイゼンベルグの不確定性関係 $\Delta x \Delta p = h$ より、 λ_{dB} は位置の揺らぎ、つまり波束の幅を表す．

^{††} $\lambda_{\text{dB}}^3 = h^3 / \Delta p^3$ であるから、 $\rho_{\text{ps}} = N / (V \Delta p^3 / h^3)$ となる． $V \Delta p^3$ は位相空間上で粒子が分布している範囲、 $V \Delta p^3 / h^3$ はその範囲に存在している状態の数である．よって、 ρ_{ps} は一状態あたりに存在する平均粒子数を表す．

を満たすとき、最低エネルギー状態の数はマクロになる。この現象を**ボース・アインシュタイン凝縮**、または単に**ボース凝縮**と呼ぶ。また、最低エネルギー状態にある（マクロな）粒子集団を**凝縮体**（condensate）と呼ぶ。

ボース凝縮の条件式 (A.38) を温度について書き直すと、

$$T < \frac{h^2}{2\pi m k_B} \left(\frac{N}{\zeta(3/2)V} \right)^{2/3} \equiv T_c \quad (\text{A.40})$$

となる。\$T_c\$ は**アインシュタイン凝縮温度**、または単に**転移温度**と呼ばれる。また、ボース凝縮体の粒子数 \$N_0\$ の温度依存性は、式 (A.35) (A.37) および (A.40) より

$$\begin{aligned} N_0 &= N - N_{\text{ex}} = N \left(1 - \frac{N_{\text{ex}}}{N} \right) \\ &= N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

となる。

A.4 3次元調和ポテンシャル中でのボース・アインシュタイン凝縮

次に、3次元調和ポテンシャル

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (\text{A.42})$$

に閉じ込められたボース粒子系を考える。この系の一粒子状態のエネルギー固有値は

$$E = \hbar(n_x \omega_x + n_y \omega_y + n_z \omega_z), \quad (n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{A.43})$$

である。ここで、最低エネルギー状態 (\$n_x = n_y = n_z = 0\$) のエネルギーがゼロとなるよう、零点振動のエネルギー \$E = \hbar(\omega_x + \omega_y + \omega_z)/2\$ をエネルギーの基準（零点）にとった。

エネルギーがある値 \$\varepsilon\$ 以下の固有状態の数 \$N(\varepsilon)\$ は、\$\varepsilon\$ がエネルギー固有値の間隔 \$\hbar\omega_i\$ (\$i = x, y, z\$) に比べ、十分大きければ、

$$N(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^3}{6\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z} \quad (\text{A.44})$$

と近似できる．よって状態密度関数 $D(\varepsilon)$ は、

$$D(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{2\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z} \quad (\text{A.45})$$

となる．後の議論は、箱型ポテンシャルの場合と全く同様に進めることができる．この系がボース凝縮しているとき（フガシティーが $\lambda \cong 1$ のとき）、励起状態の粒子数 N_{ex} は、

$$N_{\text{ex}} = \int_0^{\infty} D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{2\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon \quad (\text{A.46})$$

と表せる．式 (A.46) の積分は、

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon &= \frac{1}{\beta^2} \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^2 e^{-sx} dx = \frac{2}{\beta^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^3} \\ &= \frac{2}{\beta^2} \zeta(3) = \frac{2}{\beta^2} \cdot 1.202\dots \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

と計算でき、

$$N_{\text{ex}} = \frac{k_{\text{B}}^3 T^3}{\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z} \zeta(3) \quad (\text{A.48})$$

となる．ボース凝縮体が存在できる条件は $N > N_{\text{ex}}$ であるから

$$N > \frac{k_{\text{B}}^3 T^3}{\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z} \zeta(3) \Leftrightarrow N > \left(\frac{k_{\text{B}} T}{\hbar \bar{\omega}} \right)^3 \zeta(3) \quad (\text{A.49})$$

ここで $\bar{\omega} \equiv (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ と定義した．条件式 (A.49) をこれを温度に関する条件として表現すると、

$$T < \frac{\hbar \bar{\omega}}{k_B} \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3} \equiv T_C \quad (\text{A.50})$$

となる．また、ボース凝縮体の粒子数 N_0 の温度依存性は、

$$N_0 = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_C} \right)^3 \right] \quad (\text{A.51})$$

となる．このように 3 次元調和ポテンシャルの場合は、箱型ポテンシャルの場合(式 (A.41)) と異なる T 依存性を持つ

(参考) より簡単なボース分布関数の導出

A.2 では、外部ポテンシャルに閉じ込められたボース粒子の集まりを、一つの系として考えたが、この系に許される特定の一粒子状態 $\phi_\nu(\mathbf{r})$ を新たに一つの系と考え、残りの一粒子状態を熱浴とみなすこともできる．一粒子状態 $\phi_\nu(\mathbf{r})$ からなる系に、 n_ν 個の粒子が存在しているとき、この系のエネルギーは $\varepsilon_\nu n_\nu$ となる．よって、ギブス因子 Z_G は、

$$\begin{aligned} Z_G &= \sum_{n_\nu=0}^{\infty} \lambda^{n_\nu} \exp(-\beta n_\nu \varepsilon_\nu) = \sum_{n_\nu=0}^{\infty} [\lambda \exp(-\beta \varepsilon_\nu)]^{n_\nu} \\ &= \frac{1}{1 - \lambda \exp(-\beta \varepsilon_\nu)} \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

となる．この系の平均粒子数 f_ν は、式 (A.14) を用いて

$$f_\nu = \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln Z_G = \frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_\nu - \mu)] - 1} \quad (\text{A.53})$$

と計算される．この結果はボース分布関数 (A.21) と一致する．

