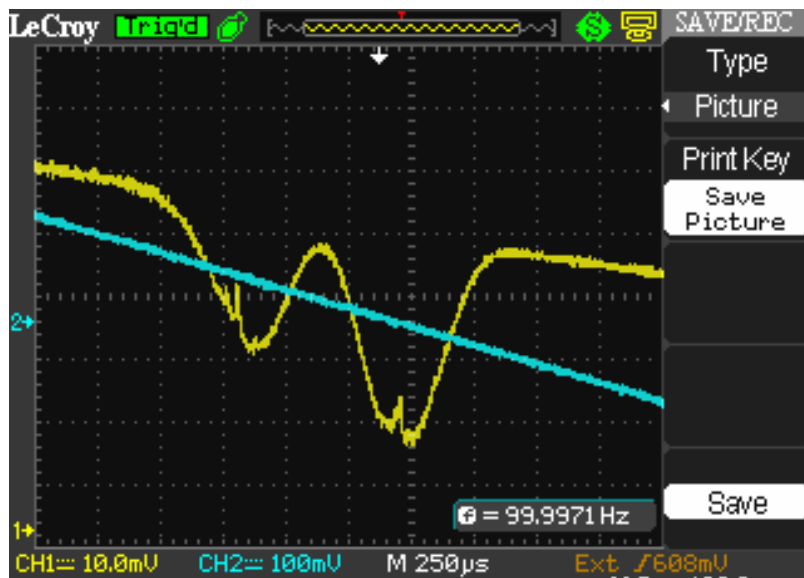


衝突広がりと飽和広がり：  
プラズマ中の原子の飽和強度と吸  
収断面積を計算するために

2013年5月22日 ランチミーティング  
担当：鳥井

Rb原子の飽和分光



## 疑問は限りなくある

- なぜ4つの大きな吸収が現われるのだろうか。それらの大きさの比は何が決めているのだろうか
- なぜ飽和分光と呼ばれているのだろうか
- ポンプとプローブはどれだけ角度をつけてもよいのだろうか
- ポンプとプローブの偏光を変えたらどうなるだろう
- ラムディップは何本出るのだろうか。それは何が決めているのだろうか
- クロスオーバー遷移とは何だろう
- なぜクロスオーバー遷移のラムディップが妙に大きいのだろうか
- ラムディップの幅は何が決めているのだろうか
- ドップラー幅がラムディップより広いのはなぜだろう
- ドップラー幅から温度を見積もれるだろうか
- 吸収の量から原子数密度を見積もれるだろうか

## 自然は最高の教師である

### 1年前は(私が)知らなかったこと

- ドップラー広がりがある原子気体からの蛍光は、飽和強度では飽和しない
- ラムディップ(もしくは偏光分光信号)の大きさは飽和強度では飽和しない
- 飽和分光におけるラムディップの幅は{(プローブの線幅)+(ポンプの線幅)} $\div$ 2である
- 吸収断面積は飽和しない(光強度に無関係)
- 速度変化衝突(VCC)の断面積と線幅の関係は?
- 衝突広がりのある場合の飽和強度の計算方法は?
- 速度変化衝突は位相緩和(横緩和)なのか、原子数分布の緩和(縦緩和)なのか?

# 霜田光一「レーザー物理入門」



(注)この教科書での(独特な)表記法  
共鳴ラビ周波数 一般化ラビ周波数

$$x = \frac{\mu_{12} E_0}{\hbar}$$

$$\Omega = \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + |x|^2}$$

## 第8章「非線形コヒーレント効果」

(注)この節ではコヒーレント相互作用が衝突によってのみ途切れることを想定(自然放出無視)→縦横同じ緩和時間  $\tau = 1/\gamma$

150 第8章 非線形コヒーレント効果

であるから、原子数分布の差は

$$\begin{aligned} N_1 - N_2 &= (N_1^{(0)} - N_2^{(0)}) \left( 1 - \frac{|x|^2}{\Omega^2 + \gamma^2} \right) \\ &= (N_1^{(0)} - N_2^{(0)}) \frac{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + |x|^2} \end{aligned} \quad (8.13)$$

となる。これは飽和吸収の結果というよりは原因であると考えられる。すなわち、強い入射光に対して吸収定数が小さくなるのは、原子数分布の差が小さくなるからである。

なぜなら、パワー吸収定数  $2\alpha$  は吸収断面積を  $\sigma$  としたとき(4.45)に示したように

$$2\alpha = (N_1 - N_2)\sigma$$

と表わされるが、入射光が強くなっても次に示すように  $\sigma$  は一定で、 $N_1 - N_2$  が減少しているからである。(8.13)を用いると、飽和吸収を表わす(8.7)に相当する吸収断面積は

$$\sigma = \frac{\omega \gamma |\mu_{12}|^2}{\epsilon_0 \hbar c [(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2]} \quad (8.14)$$

であって、 $|x|^2$  にはよらない。

## 様々な緩和過程

|         | 縦緩和 $\Gamma$                                  | 横緩和 $\gamma$                      |
|---------|---|-----------------------------------|
| 自然放出    | $\Gamma_n = 1/\tau_{\text{spont}}$            | $\Gamma_n/2 = \gamma_n$           |
| 非弾性衝突   | $\Gamma_{\text{inel}} = 1/\tau_{\text{inel}}$ | $\Gamma_{\text{inel}}/2$          |
| 飛行時間幅   | $\Gamma_T = v/d$                              | $\Gamma_T$                        |
| 速度変化衝突  | $\Gamma_{\text{VCC}} = Nv\sigma_{\text{VCC}}$ | $\Gamma_{\text{VCC}}$             |
| 位相緩和衝突  | 0   | $\gamma_{\text{ph}} = Nv\sigma_b$ |
| レーザーの線幅 | 0   | $\gamma_{\text{laser}}$           |

縦緩和は必ず横緩和を伴う(逆は正しくない)。原子が励起状態にいるときだけに起こる縦緩和(自然放出および非弾性衝突)の場合のみ、縦緩和レートの半分が横緩和レートになる。縦緩和が状態に依存しない場合は縦緩和と横緩和のレートが一致する。

# Demtroeder, *Atoms, Molecules, and Photons*

## 7.4 Line Profiles of Spectral Lines

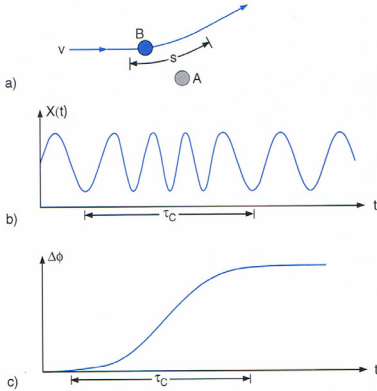


Fig. 7.24a-c. Elastic collisions as phase perturbers. (a) Classical path of the collision partner B. (b) Frequency shift of A during the collision. (c) Resulting phase shift

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}}, \quad \mu = \frac{M_A M_B}{M_A + M_B}$$

$$I(\omega) = \frac{\left(\frac{\gamma_n + \gamma_{inel}}{2} + N\bar{v}\sigma_b\right)^2}{(\omega - \omega_0 - N\bar{v}\sigma_s)^2 + \left(\frac{\gamma_n + \gamma_{inel}}{2} + N\bar{v}\sigma_b\right)^2} \quad (7.83a)$$

The cross sections

$$\sigma_b = 2\pi \int_0^\infty (1 - \cos \varphi(R)) R dR \quad (7.83b)$$

$$\sigma_s = 2\pi \int_0^\infty \sin \varphi(R) R dR \quad (7.83c)$$

are a measure for the line broadening ( $\delta\nu_b$ ) and the line shift ( $\Delta\nu_s$ ) by elastic collisions (Table 7.3).

(注) 小文字の  $\gamma$  が縦緩和レートを表す

### Broadening, shifting and asymmetry of the strontium resonance line induced by rare gas perturbers

Y C Chan and J A Gelbwachs

Electronics Technology Center, The Aerospace Corporation, M2/253, PO Box 92957, Los Angeles, CA 90009, USA

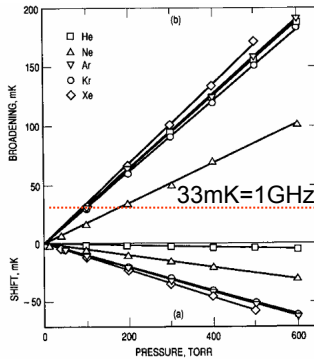


Figure 2. (a) Collision-induced shifting of the Sr( $5^1P_1 - 5^1S_0$ ) transition with the rare gases. (b) Collision-induced broadening of the Sr resonance line with the rare gases.

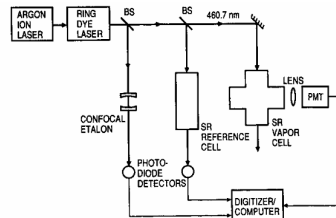


Figure 1. Schematic representation of the experimental set-up.

Table 1. Collisional broadening and shift cross sections for the Sr resonance line. Units are  $\times 10^{-14} \text{ cm}^2$ . Estimated errors are given in the parenthesis. To facilitate comparison, reported coefficients have been converted into cross sections.

| Investigators                                | He       | Ne      | Ar      | Kr       | Xe       |
|--|----------|---------|---------|----------|----------|
| Shift cross sections, $\sigma_s$             |          |         |         |          |          |
| This study <sup>a</sup>                      | -3 (0.3) | -36 (1) | -96 (3) | -117 (2) | -145 (5) |
| Farr <i>et al.</i> (1971) <sup>b</sup>       | 0 (1)    | —       | -99 (4) | —        | —        |
| Wang and Chen (1979) <sup>c</sup>            | 5        | —       | -124    | —        | -63      |
| Broadening cross sections, $\sigma_b$ (FWHM) |          |         |         |          |          |
| This study <sup>a</sup>                      | 110 (2)  | 123 (4) | 297 (6) | 356 (6)  | 438 (6)  |
| Farr <i>et al.</i> (1971) <sup>b</sup>       | 126 (3)  | —       | 338 (8) | —        | —        |
| Wang and Chen (1979) <sup>c</sup>            | 126      | —       | 295     | —        | 546      |
| Penkin <i>et al.</i> (1968) <sup>d</sup>     | 150      | 170     | 442     | 538      | —        |
| Harima <i>et al.</i> (1983) <sup>e</sup>     | 117      | 135     | —       | —        | —        |
| Ratios of ( $\sigma_b/\sigma_s$ )            |          |         |         |          |          |
| This study <sup>a</sup>                      | -36.7    | -3.42   | -3.09   | -3.04    | -3.02    |

<sup>a</sup> Temperature ( $T$ ) = 720 K; pressure = 0-600 Torr.

<sup>b</sup>  $T(\text{He}) = 700 \text{ K}$ ;  $T(\text{Ar}) = 680 \text{ K}$ ; pressure 0-1 atm.

<sup>c</sup>  $T(\text{He}) = 750.9 \text{ K}$ ;  $T(\text{Ar}) = 747.9 \text{ K}$ ;  $T(\text{Xe}) = 926 \text{ K}$ ; pressure > 160 atm.

<sup>d</sup>  $T = 750 \text{ K}$ ; pressure = 0-15 Torr.

<sup>e</sup>  $T = 1000 \text{ K}$ ; pressure = 0-700 Torr.

# Pressure broadening and line shifting of atomic strontium $5s^2\ ^1S_0 \rightarrow 5s5p\ ^3P_1$ and $5s5p\ ^3P_{0,1,2} \rightarrow 5s6s\ ^3S_1$ absorption transitions induced by noble-gas collisions

Jeremy C. Holtgrave and Paul J. Wolf

Department of Engineering Physics, Graduate School of Engineering and Management, Air Force Institute of Technology, Wright-Patterson AFB, Ohio 45433-7765, USA

(Received 24 February 2005; published 15 July 2005)

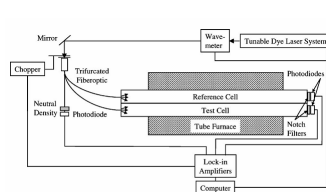


FIG. 2. Schematic diagram of experimental apparatus.

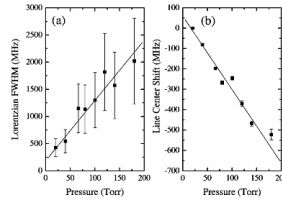

 FIG. 4. A plot of (a) the Lorentzian linewidths (FWHM) and (b) the line-center shifts for the  $5s5p\ ^3P_0 \rightarrow 5s6s\ ^3S_1$  transition of Sr as a function of Ar pressure. Linear fits are superimposed upon the data.

 TABLE I. Pressure-broadening and line-shifting rate coefficients and cross sections for the  $5s^2\ ^1S_0 \rightarrow 5s5p\ ^3P_1$  transition at 689.5 nm in  $^{88}\text{Sr}$ . The average Sr temperature extracted from the Doppler-broadened linewidths was  $660 \pm 47$  K. The errors quoted for the rate coefficients and cross sections are  $1\sigma$  from the mean.

| Broadening gas | $k_p$ (MHz/Torr) | $\sigma_p$ ( $10^{-14}$ cm $^2$ ) | $k_s$ (MHz/Torr) | $\sigma_s$ ( $10^{-14}$ cm $^2$ ) |
|----------------|------------------|-----------------------------------|------------------|-----------------------------------|
| He             | 7.58 (0.34)      | 0.89 (0.04)                       | +1.23 (0.06)     | +0.290 (0.015)                    |
| Ne             | 5.20 (0.26)      | 1.27 (0.06)                       | -0.64 (0.04)     | -0.31 (0.02)                      |
| Ar             | 4.90 (0.07)      | 1.57 (0.02)                       | -1.45 (0.04)     | -0.929 (0.026)                    |
| Kr             | 6.17 (0.31)      | 2.44 (0.12)                       | -1.53 (0.05)     | -1.21 (0.04)                      |
| Xe             | 6.88 (0.45)      | 3.01 (0.20)                       | -1.51 (0.03)     | -1.32 (0.03)                      |

## Buffer-gas-induced collision shift for the $^{88}\text{Sr}\ ^1S_0\text{-}^3P_1$ clock transition

 Nobuyasu Shiga,<sup>1</sup> Ying Li,<sup>1</sup> Hiroyuki Ito,<sup>1</sup> Shigeo Nagano,<sup>1</sup> Tetsuya Ido,<sup>1,2,\*</sup> Katarzyna Bielska,<sup>3</sup> Ryszard S. Trawiński,<sup>3</sup> and Roman Ciuryło<sup>3</sup>
<sup>1</sup>National Institute of Information and Communications Technology, Koganei, Tokyo 184-8795, Japan

<sup>2</sup>CREST, Japan Science and Technology Agency, Chiyoda-ku, Tokyo 102-0075, Japan

<sup>3</sup>Instytut Fizyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, ul. Grudziądzka 5/7, 87-100 Toruń, Poland

(Received 3 July 2009; published 4 September 2009)

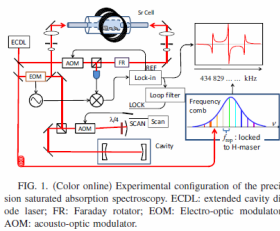


FIG. 1. (Color online) Experimental configuration of the precision saturated absorption spectroscopy. ECDL: extended cavity diode laser; FR: Faraday rotator; EOM: Electro-optic modulator; AOM: acousto-optic modulator.

 TABLE I. The comparison of our experimental pressure broadening and shifting coefficients with those calculated in the impact approximation, as well as with experimental results obtained by Holtgrave and Wolf [4] in the Doppler limited regime and obtained by Tino *et al.* [3] in the Doppler free regime. All data are given in MHz/Torr and the one standard deviation uncertainties are given in parentheses.

| Perturber | Doppler limited                  |                                    |                         |                                    | Doppler free            |                                    |                         |                                    |
|-----------|----------------------------------|------------------------------------|-------------------------|------------------------------------|-------------------------|------------------------------------|-------------------------|------------------------------------|
|           | Experiment<br>Holtgrave and Wolf | Impact calculation<br>( $T=660$ K) | Experiment<br>This work | Impact calculation<br>( $T=728$ K) | Experiment<br>This work | Impact calculation<br>( $T=728$ K) | Experiment<br>This work | Impact calculation<br>( $T=728$ K) |
| He        | 3.79(17)                         | +1.23(6)                           | 3.89                    | +0.68                              | 8.67(10)                | +0.68(8)                           | 3.68                    | +0.66                              |
| Ne        | 2.60(13)                         | -0.64(4)                           | 1.17                    | -0.31                              | 3.76(5)                 | -0.06(3)                           | 1.10                    | -0.28                              |
| Ar        | 2.45(04)                         | -1.45(4)                           | 3.30                    | -1.54                              | 4.76(8)                 | -0.22(2)                           | 3.05                    | -1.47                              |
| Xe        | 3.44(23)                         | -1.51(3)                           | 3.35                    | -1.36                              | 4.71(6)                 | -0.12(1)                           | 3.17                    | -1.33                              |

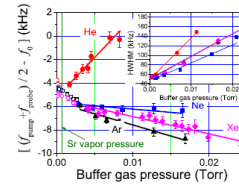
 \*Result obtained by Tino *et al.* [3].


FIG. 3. (Color online) Shifts of the resonance frequency induced by various kinds of buffer gas. The corner of the slope around 3 mTorr is attributed to the inhomogeneous pressure distribution in the cell, which occurs due to insufficient buffer gas pressure relative to strontium vapor. Inset is the broadening of the Doppler-free atomic resonance.

The comparison of calculated results seems to give a bit better agreement with results obtained in the Doppler-limited case. Clearly Doppler-free results are characterized by bigger collision broadening coefficients and smaller magnitude of collision-shifting coefficients than those obtained from the Doppler-limited case. This can be attributed to **velocity-changing collisions** [28], which change the absorber velocity significantly enough to push away the absorber from the condition of Doppler-free resonance. Therefore, such events of collisions which can cause large frequency shifts in the Doppler-limited regime would not contribute to the signal in the Doppler-free case. Being a loss mechanism, it will lead to broadening but not to shifting of the line. **This effect needs further theoretical and experimental investigations. More-**

# 衝突広がりがある場合の 吸収断面積の求め方

## 遷移レートの導出：フェルミの黄金則

教科書でよく見られる表現(摂動が時間に依存しない場合)

$$R_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \left| \langle f | \hat{H} | i \rangle \right|^2 \delta(\omega_f - \omega_i)$$

電磁波と原子の相互作用の場合(角周波数 $\omega$ で振動する摂動の場合)

$$R_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \left| \langle f | \frac{-\hat{d}E_0}{2} | i \rangle \right|^2 \delta(\omega - \omega_0)$$

$E(t) = E_0 \cos \omega t$   
 $= \frac{E_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$

$\delta(\omega - \omega_0)$  ←  $\frac{\gamma / \pi}{\delta^2 + \gamma^2}$

$\frac{\Gamma}{2} s(\delta)$  (回転波近似) ← 規格化された Lorentzian で置き換える

$\gamma$ : 横緩和定数  
 (半値半幅: HWHM)

ただし

飽和パラメータ

$$s(\delta) \equiv s_0 \frac{\gamma^2}{\delta^2 + \gamma^2}$$

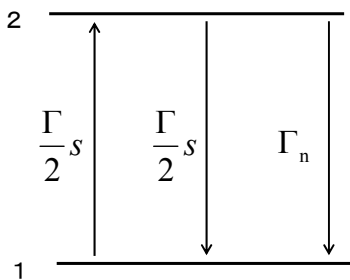
共鳴飽和パラメータ

$$s_0 \equiv \frac{\Omega^2}{\gamma \Gamma}$$

共鳴ラビ周波数

$$\Omega \equiv \frac{\langle f | -\hat{d}E | i \rangle}{\hbar}$$

# レーザー冷却に良く出てくるケース： 衝突および飛行時間幅が無視できる場合



横緩和(共鳴線の半値半幅)は自然放出のみで決まる

$$\gamma = \frac{\Gamma_n}{2} \quad s_0 = 2 \frac{\Omega^2}{\Gamma_n^2} = \frac{I}{I_s} \quad I_s = \frac{\pi \hbar c}{3\lambda^3} \Gamma_n$$

レート方程式

$$\dot{N}_2 = -\Gamma_n N_2 - \gamma s N_2 + \gamma s N_1$$

$$\dot{N}_1 = +\Gamma_n N_2 - \gamma s N_1 + \gamma s N_2 = -\dot{N}_2$$

$$N_1 + N_2 = N_0$$

定常状態では

$$N_1^{\text{st}} - N_2^{\text{st}} = \frac{N_0}{1+s}$$

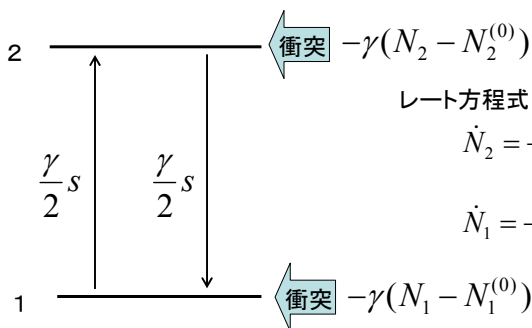
$$N_2^{\text{st}} = \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} N_0 = \frac{1}{2} \frac{s_0 \gamma^2}{\delta^2 + \gamma'^2} N_0$$

飽和により広がった幅  
(power-broadened width)

$$\gamma' \equiv \gamma \sqrt{1+s_0}$$

注目すべきは、フェルミの黄金則で(光プロット方程式を解かずとも)定常解が求まること

# 「レーザー物理入門：第8章」の場合 自然放出を無視し、縦横同じ緩和



レート方程式

$$\dot{N}_2 = -\frac{\gamma}{2} s N_2 + \frac{\gamma}{2} s N_1 - \gamma(N_2 - N_2^{(0)})$$

$$\dot{N}_1 = -\frac{\gamma}{2} s N_1 + \frac{\gamma}{2} s N_2 - \gamma(N_1 - N_1^{(0)})$$

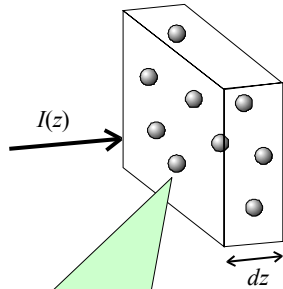
定常状態では

$$N_1^{\text{st}} - N_2^{\text{st}} = \frac{N_1^{(0)} - N_2^{(0)}}{1+s} = (N_1^{(0)} - N_2^{(0)}) \frac{\delta^2 + \gamma^2}{\delta^2 + \gamma^2 + \Omega^2}$$

式(8.13)と一致!

# 吸収(散乱)断面積の定義

原子(分子)1個が単位時間に吸収するエネルギーをP[W]、  
原子(分子)の密度をnとする。



dzの厚さを通ずる際に吸収される  
単位面積あたりのエネルギー

$$I(z) - I(z + dz) = Pndz$$

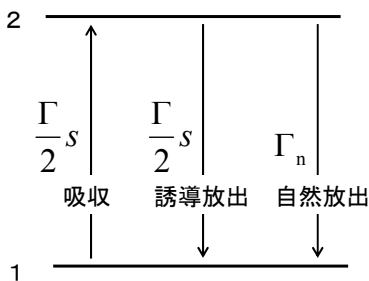
$$\rightarrow \frac{dI}{dz} = -n \frac{P}{I} I = -n\sigma_{\text{abs}} I$$

$$\sigma_{\text{abs}} = \frac{P}{I} \quad \text{原子(分子)1個の吸収断面積}$$

原子(分子)を仮想的に断面積が $\sigma$ の  
吸収体と考えるなら、単位時間に吸収  
するエネルギーは $P = I\sigma$ となる。

$$I(z) = I_0 e^{-n\sigma z} = I_0 e^{-\alpha z}$$

# 吸収断面積:二つの考え方



基底状態の原子が単位時間にプローブ光  
から吸収するエネルギー

$$P_1 = \hbar\omega \times \frac{\Gamma}{2} s = \hbar\omega \frac{\Gamma_n}{2} \frac{I}{I_s} \frac{1}{1+x^2} \quad x \equiv \delta/\gamma \quad I_s \equiv \frac{\pi\hbar c}{3\lambda^3} \Gamma_n$$

よって、基底状態の原子の**吸収断面積**は

$$\sigma_1 = \frac{P}{I} = \frac{\sigma_0}{1+x^2} \quad \leftarrow \text{強度に依存しない}$$

同様の計算により、励起状態の原子の**増幅断面積**は

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_0}{1+x^2} \quad \leftarrow \text{強度に依存しない}$$

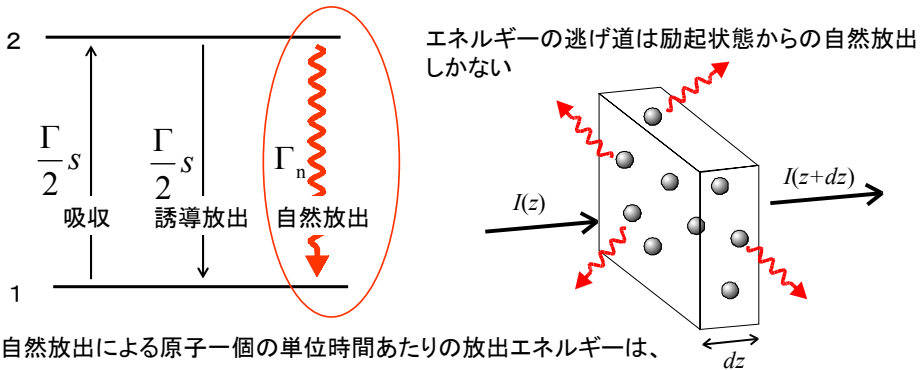
$$\sigma_0 = 6\pi\lambda^2$$

よって、トータルの(実際に観測される)吸収(もしくは増幅)断面積は  $(\gamma' \equiv \gamma\sqrt{1+s_0})$

$$\sigma_{\text{abs}} = \frac{\sigma_0}{1+x^2} \frac{N_1^{\text{st}} - N_2^{\text{st}}}{N_0} = \frac{\sigma_0}{1+x^2} \frac{1}{1+s} = \sigma_0 \frac{\gamma^2}{\delta^2 + \gamma'^2} \quad \leftarrow \text{強度に依存する (飽和する)}$$



# 吸収断面積:別の求め方



自然放出による原子一個の単位時間あたりの放出エネルギーは、

$$P = \hbar\omega \times \frac{N_2^{\text{st}}}{N_0} \Gamma_n = \hbar\omega \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \Gamma_n = \frac{\hbar\omega}{2} \frac{\gamma^2}{\delta^2 + \gamma'^2} \frac{I}{I_s} \Gamma_n \quad (\gamma' \equiv \gamma\sqrt{1+s_0})$$

したがって、吸収断面積は

$$\sigma_{\text{abs}} = \frac{P}{I} = \sigma_0 \frac{\gamma^2}{\delta^2 + \gamma'^2} \quad \sigma_0 = 6\pi\lambda^2 \quad \leftarrow \text{分布数差から求めた結果と同じ}$$

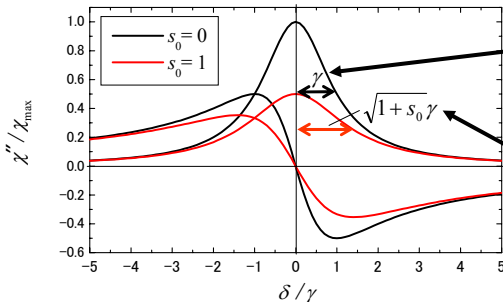
# 2準位原子の複素電気感受率

量子論的2準位原子

$$\begin{cases} \chi' = -\frac{6\pi\tilde{\lambda}^3}{\sqrt{1+s_0}} \frac{x'}{1+x'^2} \\ \chi'' = \frac{6\pi\tilde{\lambda}^3}{1+s_0} \frac{1}{1+x'^2} \end{cases} \quad \begin{cases} x' \equiv \delta/\gamma' \\ \gamma' \equiv \gamma\sqrt{1+s_0} \end{cases}$$

古典的調和振動子

$$\begin{cases} \chi' = -6\pi\tilde{\lambda}^3 \frac{x}{1+x^2} \\ \chi'' = 6\pi\tilde{\lambda}^3 \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$$



自然幅  $x = \delta/\gamma$   
(natural linewidth)

飽和(パワー)広がり  
(power broadening)

$$\sqrt{1+s_0}\gamma = \sqrt{1+I/I_s}\gamma$$

# 原子の吸収断面積

密度 $n$ の原子気体の吸収係数

$$\alpha = nk\chi'' = n\sigma(\delta)$$

↑  
原子数密度

$$\sigma(\delta) \equiv \sigma_0 \frac{\gamma^2}{\delta^2 + (1 + s_0)\gamma^2} \quad : \text{吸収断面積}$$

$$\sigma_0 \equiv 6\pi\hat{\lambda}^2 \quad : \text{共鳴吸収断面積}$$

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z} = I_0 e^{-n\sigma(\delta)z} \leftarrow \text{OD: 光学密度 (optical density)}$$

## ここまでのまとめ(要点)

1. 2準位原子の複素電気感受率は、飽和パラメタ  $s_0 = I/I_s \ll 1$  では古典的調和振動子と同じである。
2. 2準位原子の場合、共鳴の幅  $\Gamma$  を決めるのは、自然放出(励起準位の寿命)である( $\Gamma = 1/\tau$ )。
3.  $s_0 \ll 1$  でない場合、幅は  $(1 + s_0)^{1/2}$  倍に広がり、ピークは  $1/(1 + s_0)$  倍に下がる(飽和広がり)。
4. 1原子あたりの共鳴吸収断面積は、飽和強度より十分弱ければ、遷移モーメントによらず  $\sigma_0 = 6\pi\hat{\lambda}^2$

# 速度変化衝突 (VCC) がある場合

縦緩和  $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_{VCC}$   
 横緩和  $\gamma = \Gamma_n / 2 + \Gamma_{VCC}$

レート方程式

$$\dot{N}_2 = -(\Gamma_n + \Gamma_{VCC})N_2 - \frac{\Gamma}{2} s N_2 + \frac{\Gamma}{2} s N_1$$

$$\dot{N}_1 = +(\Gamma_n + \Gamma_{VCC})N_2 - \frac{\Gamma}{2} s N_1 + \frac{\Gamma}{2} s N_2$$

$$N_1 + N_2 = N_0$$

共鳴飽和パラメタ

$$s_0 = \frac{\Omega^2}{\Gamma \gamma} = \frac{\Omega^2}{(\Gamma_n + \Gamma_{VCC})(\Gamma_n / 2 + \Gamma_{VCC})}$$

定常状態での励起原子数

$$N_2^{st} = \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} N_0$$

# 衝突広がりがある場合の吸収断面積

前のスライドより、励起状態の存在確率は

$$\frac{N_2^{st}}{N_0} = \frac{1}{2} \frac{s}{1+s}$$

プローブ光の単位時間あたりのエネルギーロス

$$P = \hbar \omega \times \frac{N_2^{st}}{N_0} \times \frac{\Gamma_n}{\Gamma} = \hbar \omega \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \frac{\Gamma_n}{\Gamma}$$

飽和パラメータ  $s$  が小さい極限では

$$P = \hbar \omega \times \frac{s}{2} \frac{\Gamma_n}{\Gamma} = \frac{\hbar \omega}{2} \frac{\Gamma_n (\Gamma_n / 2)}{(\Gamma_n + \Gamma_{VCC})(\Gamma_n / 2 + \Gamma_{VCC})} \frac{I}{I_s} \frac{1}{1+x^2} \Gamma_n$$

$$\sigma_{abs} = \frac{P}{I} = \frac{\Gamma_n (\Gamma_n / 2)}{(\Gamma_n + \Gamma_{VCC})(\Gamma_n / 2 + \Gamma_{VCC})} \frac{\sigma_0}{1+x^2} \quad \sigma_0 \equiv 6\pi\lambda^2$$

$$x \equiv \delta / \gamma$$

これが今回知りたかった結果

# 様々な緩和過程のある場合の 光ブロッホ方程式の解

2013年5月29日 ランチミーティング  
担当: 鳥井

## 光ブロッホ方程式(緩和あり)

$$\frac{d\rho_{11}}{dt} = \Gamma\rho_{22} + i\frac{\Omega}{2}(\rho_{21} - \rho_{12})$$

$$\frac{d\rho_{22}}{dt} = -\Gamma\rho_{22} - i\frac{\Omega}{2}(\rho_{21} - \rho_{12})$$

$$\frac{d\rho_{12}}{dt} = (-i\delta - \gamma)\rho_{12} + i\frac{\Omega}{2}(\rho_{22} - \rho_{11})$$

$$\frac{d\rho_{21}}{dt} = (+i\delta - \gamma)\rho_{21} - i\frac{\Omega}{2}(\rho_{22} - \rho_{11})$$

W = -1へ緩和(縦緩和)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dW}{dt} = -\Gamma(W+1) + \Omega V \\ \frac{dU}{dt} = -\gamma U - \delta V \\ \frac{dV}{dt} = -\gamma W + \delta U - \Omega W \end{array} \right.$$

W軸へ緩和(横緩和)

$$\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_{\text{inel}} + \Gamma_T + \Gamma_{\text{VCC}}$$

$$\gamma = \frac{\Gamma_n + \Gamma_{\text{inel}}}{2} + \Gamma_T + \Gamma_{\text{VCC}} + \gamma_{\text{ph}}$$

核磁気共鳴(NMR)では、縦緩和時間を $T_1$ 、横緩和時間を $T_2$ と呼ぶ。

緩和が自然放出によるものだけなら、

$$T_2 = 1/\gamma = 2/\Gamma = 2T_1$$

# レート方程式近似

コヒーレンス(非対角項)の時間変化は分布数差(対角項の差)の時間変化に比べ十分早く、近似的に定常状態にあると仮定すると

$$\frac{d\rho_{12}}{dt} = (-i\delta - \gamma)\rho_{12} + i\frac{\Omega}{2}(\rho_{22} - \rho_{11}) = 0 \rightarrow \rho_{12} = \frac{\Omega}{2} \frac{\rho_{22} - \rho_{11}}{\delta - i\gamma}$$

$$\frac{d\rho_{21}}{dt} = (+i\delta - \gamma)\rho_{21} - i\frac{\Omega}{2}(\rho_{22} - \rho_{11}) = 0 \rightarrow \rho_{21} = \frac{\Omega}{2} \frac{\rho_{22} - \rho_{11}}{\delta + i\gamma}$$

このとき、コヒーレンスは分布数差に比例する:  $\rho_{21} - \rho_{12} = -i\frac{\Omega}{\gamma} \frac{\rho_{22} - \rho_{11}}{1+x^2} \left( x \equiv \frac{\delta}{\gamma} \right)$   
光ブロッホ方程式は、次のレート方程式に帰着する

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{11}}{dt} &= \Gamma\rho_{22} + \frac{\Omega^2}{2\gamma} \frac{\rho_{22} - \rho_{11}}{1+x^2} = \Gamma\rho_{22} - s\frac{\Gamma}{2}(\rho_{11} - \rho_{22}) \\ \frac{d\rho_{22}}{dt} &= -\Gamma\rho_{22} - \frac{\Omega}{2\gamma} \frac{\rho_{22} - \rho_{11}}{1+x^2} = -\Gamma\rho_{22} - s\frac{\Gamma}{2}(\rho_{22} - \rho_{11}) \end{aligned} \quad \left( \begin{array}{l} s \equiv \frac{s_0}{1+x^2} \\ s_0 \equiv \frac{\Omega^2}{\Gamma} \end{array} \right)$$

フェルミの黄金則を用いて導出したレート方程式と一致!

# 定常状態の解 (revised)

$$U = -\frac{\delta}{\Omega} \frac{\Gamma}{\gamma} \frac{s}{1+s}, \quad V = \frac{\Gamma}{\Omega} \frac{s}{1+s}, \quad W = -\frac{1}{1+s}$$

$$\left( s \equiv \frac{s_0}{1+x^2}, \quad s_0 \equiv \frac{\Omega^2}{\Gamma}, \quad x \equiv \frac{\delta}{\gamma} \right)$$

$$\rho_{22}^{\text{st}} = \frac{1}{2} \frac{s}{1+s}, \quad \rho_{21}^{\text{st}} = \frac{1}{2}(U + iV) = \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \cdot \frac{\Gamma}{\gamma\Omega} (\delta - i\gamma)$$

$$\chi = \frac{2d}{\varepsilon_0 E_0} \rho_{21}^{\text{st}} = \frac{d^2}{\varepsilon_0 \hbar \gamma^2} \cdot \frac{1}{1+x'^2} \frac{(-\delta + i\gamma)}{1+s_0} \quad \left( \begin{array}{l} x' \equiv \frac{\delta}{\gamma'} \\ \gamma' \equiv \gamma \sqrt{1+s_0} \end{array} \right)$$

# 自然放出レートと双極子モーメントとの関係 (revised)

ウイグナー・ワイスコップの自然放出の理論 (1930) より

$$\Gamma_n \equiv 2\gamma_n = \frac{d^2 \omega^3}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3} = \frac{d^2 k^3}{3\pi\epsilon_0 \hbar} \rightarrow d^2 = \frac{3\pi\epsilon_0 \hbar}{k^3} \Gamma_n$$

したがって、

$$\chi = 6\pi\tilde{\lambda}^3 \frac{\Gamma_n}{2\gamma^2} \frac{1}{1+x'^2} \frac{(-\delta+i\gamma)}{1+s_0} \left( \tilde{\lambda} \equiv \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi} \right)$$

$$s_0 \equiv \frac{\Omega^2}{\mathcal{I}} = \frac{d^2 E_0^2}{\hbar^2 \mathcal{I}} = \frac{I}{I_s} \left( I_s \equiv \frac{c\hbar\gamma_n}{6\pi\tilde{\lambda}^3} \frac{\Gamma\gamma}{\Gamma_n\gamma_n} \right)$$

(真空での) 飽和強度

(e.g.,  $I_s = 1.6 \text{ mW/cm}^2$  for Rb D2line)

# 複素電気感受率の一般形(まとめ)

左から右へと次々に定義していく ( $\gamma_n \equiv \Gamma_n / 2$ )

$$I_s \equiv \frac{c\hbar\gamma_n}{6\pi\tilde{\lambda}^3} \frac{\Gamma\gamma}{\Gamma_n\gamma_n} \rightarrow s_0 \equiv \frac{\Omega^2}{\mathcal{I}} = \frac{I}{I_s} \rightarrow \gamma' \equiv \gamma\sqrt{1+s_0} \rightarrow x' \equiv \frac{\delta}{\gamma'}$$

飽和強度

飽和パラメタ

飽和広がり幅

規格化離調

2準位原子 (1個) の複素電気感受率

$$\chi = 6\pi\tilde{\lambda}^3 \frac{\gamma_n}{\gamma^2} \frac{1}{1+x'^2} \frac{(-\delta+i\gamma)}{1+s_0}$$

$$\chi' = \text{Re}[\chi] = -6\pi\tilde{\lambda}^3 \frac{\gamma_n/\gamma}{\sqrt{1+s_0}} \frac{x'}{1+x'^2}$$

$$\chi'' = \text{Im}[\chi] = 6\pi\tilde{\lambda}^3 \frac{\gamma_n/\gamma}{1+s_0} \frac{1}{1+x'^2}$$

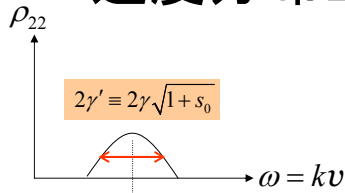
自然放出のみの場合に比べ

飽和強度は  $\frac{\Gamma\gamma}{\Gamma_n\gamma_n}$  倍

共鳴線幅は  $\frac{\gamma}{\gamma_n} \sqrt{1+s_0}$  倍

吸収係数は  $\frac{\gamma_n}{\gamma} \cdot \frac{1}{1+s_0}$  倍

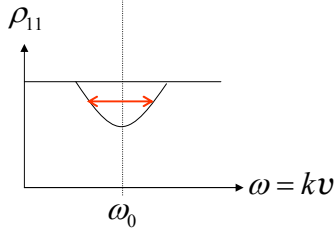
# 速度分布上のラムディップの幅



励起状態の存在確率

$$\rho_{22} = \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} = \frac{1}{2} \frac{s_0}{1+s_0} \frac{1}{1+x'^2} \left( x' = \frac{\omega - \omega_0}{\gamma'} \right)$$

速度分布上でのディップの線幅 (FWHM) は



$$2\gamma' = 2\gamma\sqrt{1+s_0} \quad \text{真空の飽和パラメータ}$$

$$= 2 \left( \frac{\Gamma_n + \Gamma_{inel}}{2} + \Gamma_{VCC} \right) \left( s_0^{(0)} \equiv \frac{I}{I_s^{(0)}}, I_s^{(0)} \equiv \frac{c\hbar\gamma_n}{6\pi\lambda^3} \right)$$

$$\times \sqrt{1+s_0^{(0)} \frac{\Gamma_n\gamma_n}{(\Gamma_n + \Gamma_{inel} + \Gamma_{VCC})(\frac{\Gamma_n + \Gamma_{inel}}{2} + \Gamma_{VCC})}}$$

$\Gamma_{VCC}$  を無視すると  $2\gamma' = (\Gamma_n + \Gamma_{inel}) \sqrt{1+s_0^{(0)} \frac{\Gamma_n^2}{(\Gamma_n + \Gamma_{inel})^2}} = \Gamma_n \sqrt{s_0^{(0)} + \left(1 + \frac{\Gamma_{inel}}{\Gamma_n}\right)^2}$

# Srホローカソードランプで観測されるラムディップの幅

おそらく  $\Gamma_{VCC}$  が支配的であろうから、 $\Gamma_{inel}$  を無視する

ポンプ光によって掘られる速度分布上の穴の幅 (FWHM)

$$\Gamma_{\text{pump}} = 2\gamma' = 2 \left( \frac{\Gamma_n}{2} + \Gamma_{VCC} \right) \sqrt{1+s_0^{(0)} \frac{\Gamma_n\gamma_n}{(\Gamma_n + \Gamma_{VCC})(\gamma_n + \Gamma_{VCC})}}$$

観測される幅は { (ポンプ光による穴の幅) + (プローブ光の線幅) } ÷ 2 であろうから  
プローブ光が飽和強度より十分弱ければ、

$$\Gamma_{\text{obs}} = \frac{\Gamma_{\text{pump}} + \Gamma_{\text{probe}}}{2} = \left( \frac{\Gamma_n}{2} + \Gamma_{VCC} \right) \left\{ 1 + \sqrt{1+s_0^{(0)} \frac{\Gamma_n\gamma_n}{(\Gamma_n + \Gamma_{VCC})(\gamma_n + \Gamma_{VCC})}} \right\}$$

$\Gamma_{VCC}$  も無視できるならば

$$\Gamma_{\text{obs}} = \frac{\Gamma_{\text{pump}} + \Gamma_{\text{probe}}}{2} = \frac{\Gamma_n}{2} \left\{ 1 + \sqrt{1+s_0^{(0)}} \right\} \xrightarrow{s_0^{(0)} \ll 1} \Gamma_n \quad \text{自然幅 (FWHM) に帰着}$$

# 原子の吸収断面積 (revised)

密度  $n$  の原子気体の吸収係数

$$\alpha = nk\chi'' = n\sigma(\delta)$$

↑  
原子数密度

積分が1となる  
ように規格化された  
ローレンツ関数

吸収断面積:  $\sigma(\delta) \equiv \sigma_0 \frac{\gamma_n / \gamma}{1 + s_0} \frac{1}{1 + x'^2} = \sigma_0 \frac{\gamma_n \pi}{\sqrt{1 + s_0}} \frac{\gamma' / \pi}{\delta^2 + \gamma'^2}$

$\sigma_0 \equiv 6\pi\hat{\lambda}^2$ : 共鳴吸収断面積

$I(z) = I_0 e^{-\alpha z} = I_0 e^{-n\sigma(\delta)z}$  ← OD: 光学密度 (optical density)

# ドップラー広がりがある場合の 吸収断面積

ドップラーシフト

$\omega_D = \omega_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \omega_0 + kv$   $v$  はレーザー光の進行方向の速度成分とする

Maxwell-Boltzmann分布

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}v_{\text{RMS}}} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{\text{RMS}}^2}\right) \left(v_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}\right)$$

$\sigma_D(\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sigma(\delta - kv)dv$  (合成積)

$\xrightarrow{\gamma \ll \Delta\omega_D} \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+s_0}} \frac{\gamma_n}{\sigma_D} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma_D^2}\right) (\sigma_D \equiv kv_{\text{RMS}})$

$\cong \frac{1.476}{\sqrt{1+s_0}} \frac{\Gamma_n}{\Delta\omega_{\text{Dopp}}} \text{(FWHM)}$

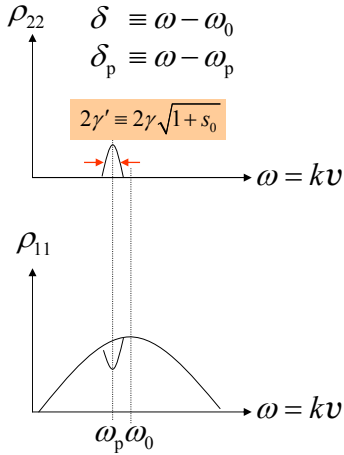


# 観測されるラムディップの深さ

ポンプ光による分布数の変化

$$\rho_{11} - \rho_{22} = \frac{1}{1+s} = 1 - \frac{s}{1+s} = 1 - s_0 \frac{\gamma\pi}{\sqrt{1+s_0}} \frac{\gamma'/\pi}{\delta_p^2 + \gamma'^2}$$

積分が1となるよう規格化されたローレンツ関数



十分弱いプローブ光によって掃引したときの断面積は

$$\sigma_D(\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)(\rho_{11} - \rho_{22})\sigma(\delta - kv)dv$$

$$= \sigma_D^0(\delta) \left[ 1 - s_0 \frac{\gamma\pi}{\sqrt{1+s_0}} \frac{(\gamma + \gamma')/\pi}{\delta_p^2 + (\gamma + \gamma')^2} \right]$$

ポンプない時の断面積

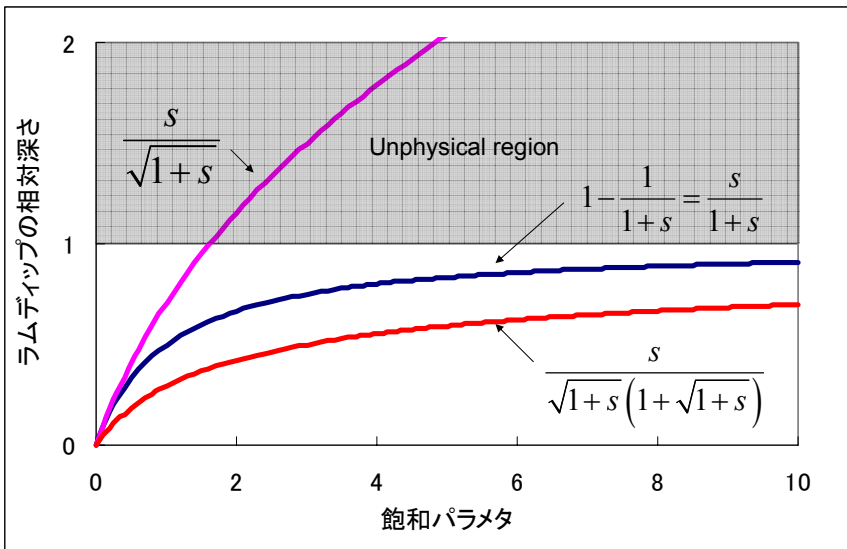
幅  $\gamma$  (プローブ) と  $\gamma'$  (ポンプ) の規格化されたローレンツ関数の合成積

ディップの中心では

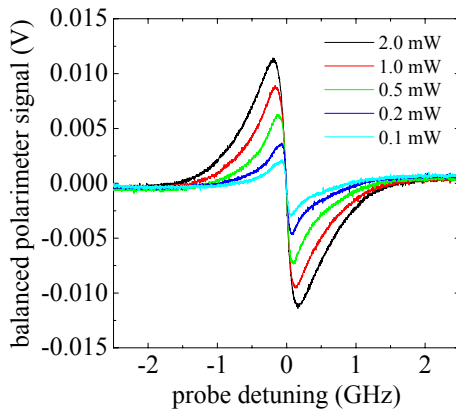
$$\sigma_D(\delta_p = 0) = \sigma_D^0 \left[ 1 - \frac{s_0}{\sqrt{1+s_0}(1+\sqrt{1+s_0})} \right]$$

Demtroeder vol II, p.90 (2.32a)と一致

# ラムディップの深さvs飽和パラメタ



# Srの偏光分光信号との比較



実験を再現する飽和パワーが幅と振幅で一致しない(6倍違う)  
→Kramas-Kronigの関係が成立してない?

