

2準位原子とレーザー光との 相互作用

(2012年夏学期原子物理学I講義スライドからの抜粋)

2013年5月29日 ランチミーティング
担当: 鳥井

J.J.サクライ「現代の量子力学(下)」

p448(時間に依存する2準位問題)

9~11件

一般に時間を含む2準位系の問題には、他に原子時計や光学的ポンピングといった多くの応用がある。実際、物理部門のノーベル賞が4件も、時間を含むある種の2準位系を研究した人々に与えられたことは興味深い*。

* 2準位系の共鳴を扱ってノーベル賞を受賞した人達は、分子線と核磁気共鳴に対してラビ(1944)、原子核におけるB場と核磁気モーメントに対してフロロホとパーセル(1952)、メザーとレーザーおよび量子光学に対してタウンズ、バソフおよびプロチョロフ(1964)、光学的ポンピングに対してオストラー(1966)である。

・レーザー分光学の発展に対してブレンバーゲン、ショーロウ(1981) ←入れ忘れ?

J.J.サクライ氏の死後(1982年以降)

・原子時計に対してラムゼー(1989)、イオントラップに対してデーメルト、ポール(1989)

・レーザー冷却に対してチュウ、フィリップス、コーエン・タノージ(1997)

・ボース凝縮に対してコーネル、ワイマン、ケタレー(2001)

・光コム(超短パルスレーザー)の開発に対してベンジユ、ホール(2005)

・個々の原子・イオン・光子の量子操作に対してアローシュ、ワインランド(2012)

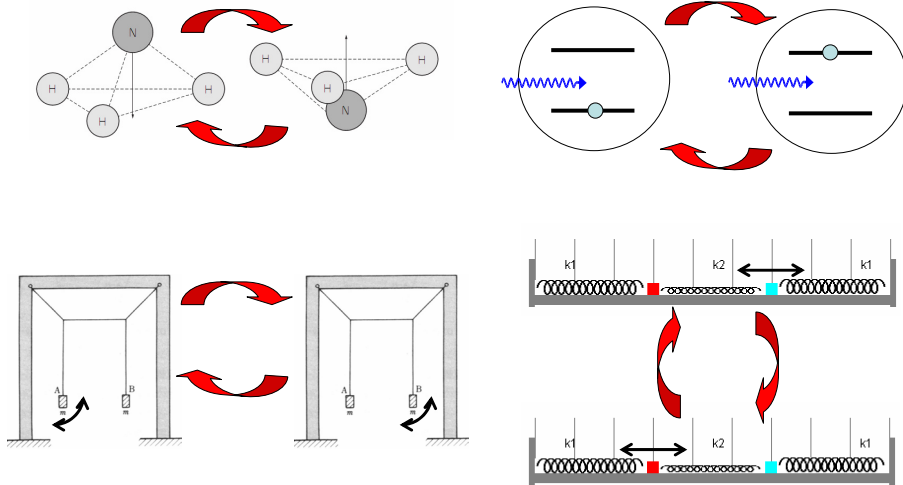
J. J. Sakurai「現代の量子力学」序文 by ジョン S. ベル

序 文

桜井純 (J. J. Sakurai) はここセルン (CERN, ヨーロッパ共同原子核研究所) でいつも大歓迎を受ける客員であった。というのは彼は理論そのものを追いかけるだけでなく、さらに実験的事実に関心をよせる数少ない理論家の一人であったからである。しかし彼の喜びはやはり理論物理学とその教育にあり、特に教育の問題については強い意見を抱いていた。彼の考えによれば、大抵の理論物理の教育は余りにも狭く、また余りにも応用からかけ離れていた。“……ハイゼンベルクの場の演算子の形式論には精通してはいるが高尚なだけでなく、励起状態の原子がなぜ光を出すか知らず、空の青さを説明するレーリーの法則を量子論で導出することも分からない無教養な理論家が大勢いる。”と彼は嘆いている。また、学生は教えられたことを使えるようにならなければいけない、“本を読んだものの練習問題ができないという読者は何も学んでいないのだ。”と力説していた[†]。

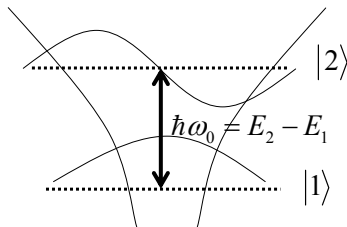
- 相互作用表示とは(なぜ導入するのか)?
- 回転波近似とは?(成り立つ条件は何か?)
- 密度行列を導入する必然性(アンサンブル平均の意味)
- 原子分極と複素電気感受率の定義
- 密度行列と複素電気感受率の関係
(なぜ密度行列の非対角項をコヒーレンスと呼ぶのか)
- ラビ振動とは?
- フェルミの黄金則の意味と利用法
- 光ブロッホ方程式とは?
- ブロッホベクトルの定義とその直感的意味
- ラムゼー干渉計の原理(何が有利なのか?)
- 断熱追従(adiabatic rapid passage)の原理
(STIRAP: stimulated Raman adiabatic passageとの類似点は)
- スピノールとは何か(ベクトルとの違いは?)
- 量子論を用いた自然放出レートの導出
- 自然放出がある場合の光ブロッホ方程式
- 飽和強度と飽和パラメータの定義
- パワー(飽和)広がりとは何か?
- 原子の吸収断面積の定義、光学密度の定義

様々な2準位(結合した振動子)

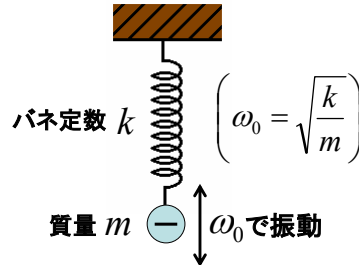


2つの振動子をcouple(結合)させているものは何か？

(復習)原子の双極子振動

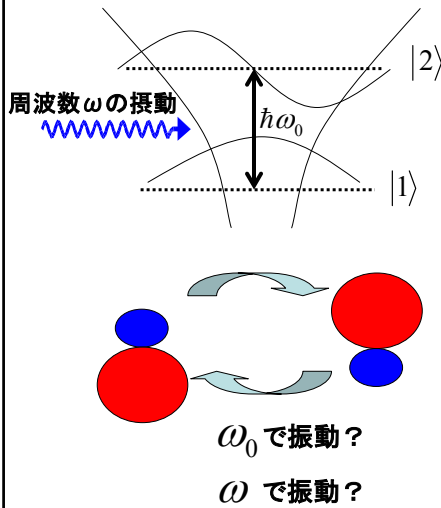


原子双極子は、バネ振子のように固有周波数を持つ

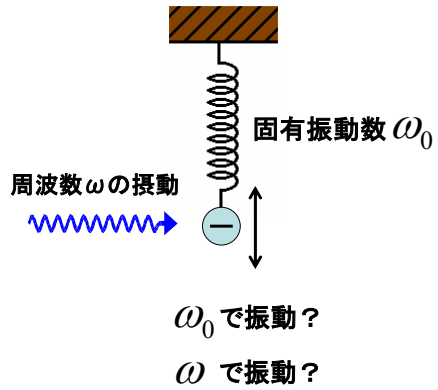


$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{c} |1\rangle \\ \text{Red Circle} \end{array} + \begin{array}{c} |2\rangle \\ \text{Blue Circle} \\ \text{Red Circle} \end{array} \right] = \begin{array}{c} \text{Blue Circle} \\ \text{Red Circle} \\ \text{Blue Circle} \\ \text{Red Circle} \end{array} \omega_0 \text{ で振動}$$

原子に周期的な摂動を加えると？



ヒント(ばね振子の強制振動)



数学的準備(1)相互作用表示

周波数 ω の摂動を加えれば、原子双極子は周波数 ω で振動する(固有周波数では振動しない)

最初から原子双極子は周波数 ω で振動するものとして、その時間依存性をあらかじめ確率振幅に忍ばせておく

$$|\Psi(t)\rangle_s = C_1(t)|1\rangle + C_2(t)e^{-i\omega t}|2\rangle$$

原子双極子

$$P(t) = {}_s\langle \Psi(t) | -ex | \Psi(t) \rangle_s = 2 \operatorname{Re}[dC_1^*(t)C_2(t)e^{-i\omega t}]$$

$$= |2dC_1^*(t)C_2(t)| \cos(\omega t + \alpha) \begin{pmatrix} d \equiv {}_s\langle 1 | -ex | 2 \rangle_s \\ \alpha \equiv \arg[2dC_1^*(t)C_2(t)] \end{pmatrix}$$

振幅(ゆっくり変化) ω で変化 ↑
摂動に対する位相

相互作用表示(つづき)

シュレーディンガー表示におけるハミルトニアンと状態ベクトル

$$H_S = \hbar\omega_0 |2\rangle\langle 2| + V \cos \omega t$$

$$H_S |\Psi(t)\rangle_S = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle_S$$

$$|\Psi(t)\rangle_S = C_1(t) |1\rangle + C_2(t) e^{-i\omega t} |2\rangle$$

ω で変化

$$U \equiv \exp\left(-i \frac{H_0}{\hbar} t\right), H_0 \equiv \hbar\omega |2\rangle\langle 2| \text{ において相互作用表示に移る}$$

$$H_I = U^\dagger (H_S - H_0) U = -\delta |2\rangle\langle 2| + U^\dagger V U \cos \omega t$$

$$H_I |\Psi(t)\rangle_I = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle_I$$

$$|\Psi(t)\rangle_I = U^\dagger |\Psi(t)\rangle_S = C_1(t) |1\rangle + C_2(t) |2\rangle$$

ω で変化

数学的準備(2)回転波近似

電気双極子相互作用を考える

$$V \cos \omega t = -(-er) \cdot E_0 \cos \omega t \leftarrow \text{電気双極子近似}$$

\uparrow
電気双極子 d

(原子のサイズ \ll レーザーの波長)

$$d \equiv \langle 1 | -er | 2 \rangle = \langle 2 | -er | 1 \rangle \leftarrow \text{正の実数とする(ように波動関数の位相を選ぶことができる)}$$

$$d_{11} = d_{22} = 0 \text{ (原子は永久電気双極子モーメントを持たない)}$$

$$\text{シュレーディンガー方程式 } H_I |\Psi(t)\rangle_I = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle_I \text{ より}$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -dE_0(1 + e^{-2i\omega t}) \\ -dE_0(1 + e^{2i\omega t}) & -2\hbar\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

無視

ハミルトニアン(行列)から時間依存性が消える→解析的に解ける!

数学的準備(3)密度行列

密度行列の定義

$$\rho(t) \equiv |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)| \quad \text{一個の原子(純粋状態)}$$

$$\rho(t) \equiv \sum_i P_i |\Psi(t)\rangle_i \langle\Psi(t)| \quad \text{アンサンブル平均}$$

↑
原子が状態 $|\Psi(t)\rangle_i$ にある確率

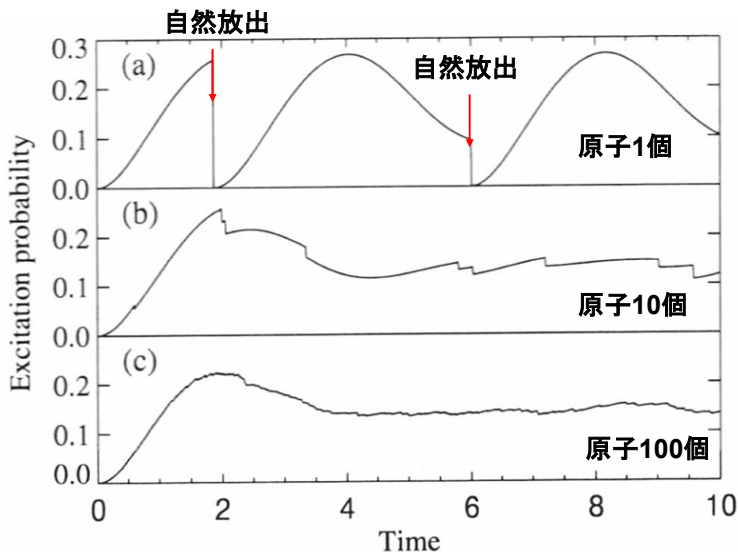
密度行列の行列要素

$$\rho_{11} = \langle 1 | \rho | 1 \rangle = C_1(t)C_1^*(t) \quad \text{基底状態の存在確率}$$

$$\rho_{22} = \langle 2 | \rho | 2 \rangle = C_2(t)C_2^*(t) \quad \text{励起状態の存在確率}$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_{12} &= \langle 1 | \rho | 2 \rangle = C_1(t)C_2^*(t) = \rho_{21}^* \\ \rho_{21} &= \langle 2 | \rho | 1 \rangle = C_2(t)C_1^*(t) = \rho_{12}^* \end{aligned} \right\} \text{原子分極の振幅と位相の情報}$$

純粋状態とアンサンブル平均



原子1個の分極と複素電気感受率

原子一個の電気双極子モーメント

$$\begin{aligned} P(t) &= {}_S \langle \Psi(t) | -ex | \Psi(t) \rangle_S \\ &= dC_1^*(t)C_2(t)e^{-i\omega t} + dC_2^*(t)C_1(t)e^{+i\omega t} \\ &= \text{Re}[2d\rho_{21}e^{-i\omega t}] \\ &= (2d \text{Re}[\rho_{21}] \cos \omega t + \text{Im}[\rho_{21}] \sin \omega t) \end{aligned}$$

複素電気感受率の定義 $P(t) = \varepsilon_0 \chi_A(\omega) E_0 e^{-i\omega t}$

$$\chi_A(\omega) = \frac{P(t) \text{の複素表示}}{\varepsilon_0 E_0 e^{-i\omega t}} = \frac{2d}{\varepsilon_0 E_0} \rho_{21}$$

密度行列の対角成分(ρ_{21})が分かれば、原子分極のすべてがわかる!

原子系の時間発展

解くべき方程式(相互作用表示+回転波近似)は

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -dE_0 \\ -dE_0 & -2\hbar\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\Omega \equiv \frac{dE_0}{\hbar} \quad \begin{array}{l} \text{(共鳴)ラビ周波数を定義する} \\ \text{(相互作用のエネルギーを周波数で表現したもの)} \end{array}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ \Omega & 2\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

シュレーディンガー方程式の解

解きやすいように、エネルギーの基準をずらそう(対角項から δ を引こう)
 C_1, C_2 は以前と同じではなくなる(共通の位相回転因子がつく)が、表記は
 あえて変えない。

(注)エネルギーの基準を変えても物理は変わらない(密度行列に変化はない)

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\delta & \Omega \\ \Omega & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

この行列の固有値: $\lambda_{\pm} = \frac{i}{2} \Omega'$, $\Omega' \equiv \sqrt{\Omega^2 + \delta^2}$: 一般化ラビ周波数

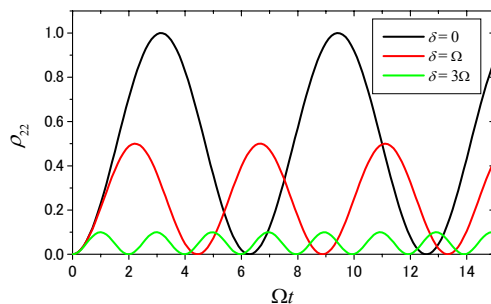
$$\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Omega't}{2} - i \frac{\delta}{\Omega'} \sin \frac{\Omega't}{2} & i \frac{\Omega}{\Omega'} \sin \frac{\Omega't}{2} \\ i \frac{\Omega}{\Omega'} \sin \frac{\Omega't}{2} & \cos \frac{\Omega't}{2} + i \frac{\delta}{\Omega'} \sin \frac{\Omega't}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(0) \\ C_2(0) \end{pmatrix}$$

ラビ振動

$$\begin{pmatrix} C_1(0) \\ C_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ とすると, } \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Omega't}{2} - i \frac{\delta}{\Omega'} \sin \frac{\Omega't}{2} \\ i \frac{\Omega}{\Omega'} \sin \frac{\Omega't}{2} \end{pmatrix}$$

励起状態の存在確率

$$|C_2(t)|^2 = \rho_{22} = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \delta^2} \sin^2 \frac{\Omega'}{2} t = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \delta^2} \frac{1 - \cos \Omega't}{2}$$

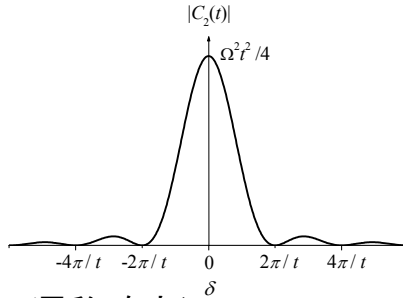


フェルミの黄金則

$\Omega \rightarrow 0$ の極限では、

$$|C_2(t)|^2 = \Omega^2 \frac{\sin^2(\delta t / 2)}{\delta^2}$$

$$\cong \frac{\pi}{2} \Omega^2 \delta(\omega - \omega_0) t$$



遷移レート(単位時間当たりの遷移確率)

$$|C_2(t)|^2 / t = \frac{\pi}{2} \Omega^2 \delta(\omega - \omega_0)$$

相互作用ハミルトニアン

$$= \frac{2\pi}{\hbar^2} \left| \langle 2 | -dE_0 | 1 \rangle \right|^2 \delta(\omega - \omega_0)$$

回転波近似による因子

フェルミの
黄金則
(調和摂動版)

光ブロッホ方程式(緩和なし)

$$\frac{d\rho_{11}}{dt} = i \frac{\Omega}{2} (\rho_{21} - \rho_{12})$$

$$\frac{d\rho_{22}}{dt} = -i \frac{\Omega}{2} (\rho_{21} - \rho_{12})$$

$$\frac{d\rho_{12}}{dt} = -i \delta \rho_{12} + i \frac{\Omega}{2} (\rho_{22} - \rho_{11})$$

$$\frac{d\rho_{21}}{dt} = +i \delta \rho_{21} - i \frac{\Omega}{2} (\rho_{22} - \rho_{11})$$

Geometrical Representation of the Schrödinger Equation for Solving Maser Problems

RICHARD P. FEYNMAN AND FRANK L. VERNON, JR., *California Institute of Technology, Pasadena, California*

AND

ROBERT W. HELLWARTH, *Microwave Laboratory, Hughes Aircraft Company, Culver City, California*

(Received September 18, 1956)

A simple, rigorous geometrical representation for the Schrödinger equation is developed to describe the behavior of an ensemble of two quantum-level, noninteracting systems which are under the influence of a perturbation. In this case the Schrödinger equation may be written, after a suitable transformation, in the form of the real three-dimensional vector equation $d\mathbf{r}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, where the components of the vector \mathbf{r} uniquely determine ψ of a given system and the components of $\boldsymbol{\omega}$ represent the perturbation. When magnetic interaction with a spin $\frac{1}{2}$ system is under consideration, "r" space reduces to physical space. By analogy the techniques developed for analyzing the magnetic resonance precession model can be adapted for use in any two-level problems. The quantum-mechanical behavior of the state of a system under various different conditions is easily visualized by simply observing how \mathbf{r} varies under the action of different types of $\boldsymbol{\omega}$. Such a picture can be used to advantage in analyzing various MASER-type devices such as amplifiers and oscillators. In the two illustrative examples given (the beam-type MASER and radiation damping) the application of the picture in determining the effect of the perturbing field on the molecules is shown and its interpretation for use in the complex Maxwell's equations to determine the reaction of the molecules back on the field is given.

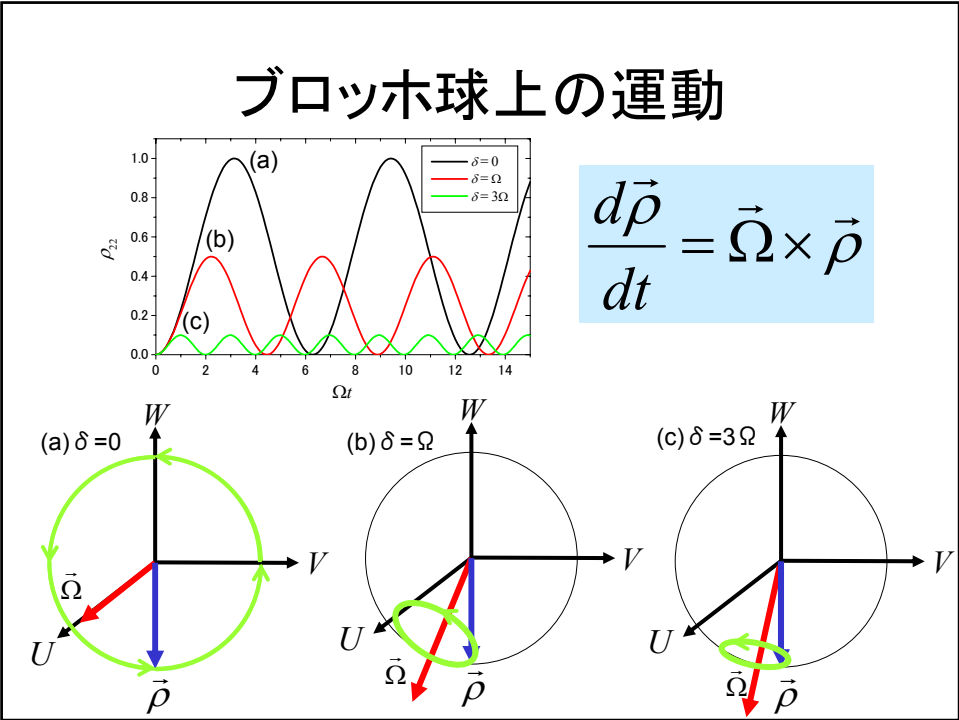
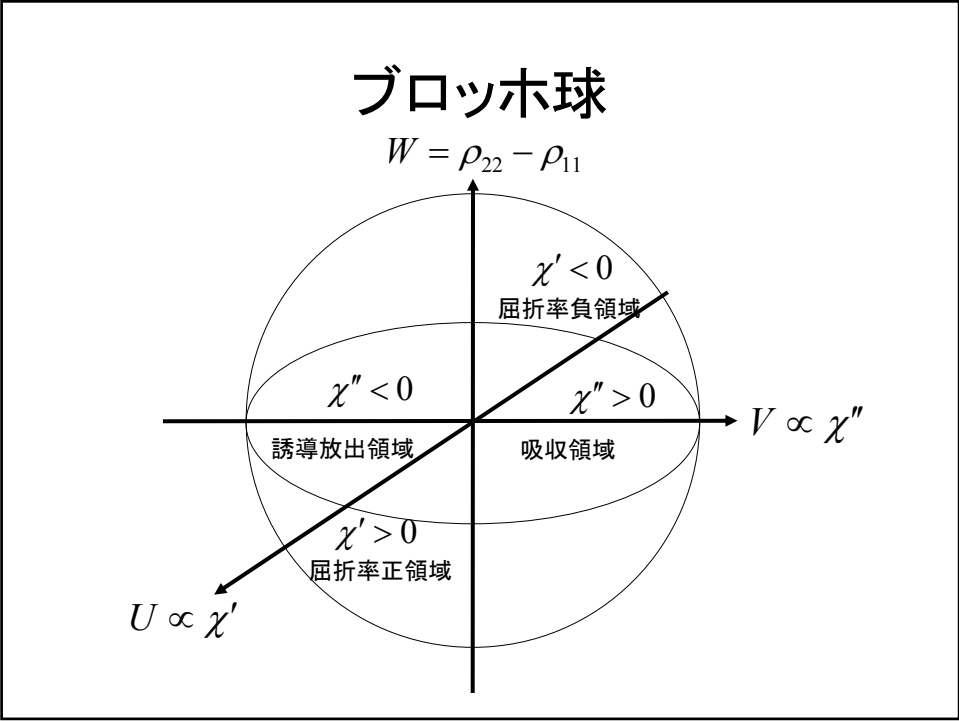
$$\psi(t) = a(t)\psi_a + b(t)\psi_b \tag{1} \qquad d\mathbf{r}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv ab^* + ba^* & \omega_1 &\equiv (V_{ab} + V_{ba})/\hbar \\ r_2 &\equiv i(ab^* - ba^*) & \omega_2 &\equiv i(V_{ab} - V_{ba})/\hbar \\ r_3 &\equiv aa^* - bb^* & \omega_3 &\equiv \omega_0 \end{aligned} \tag{2} \tag{5}$$

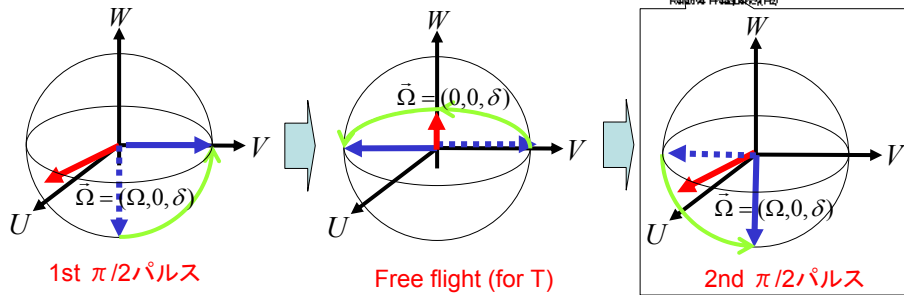
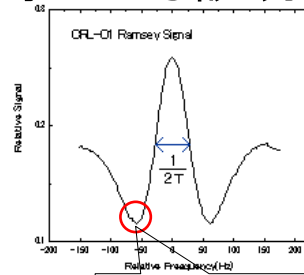
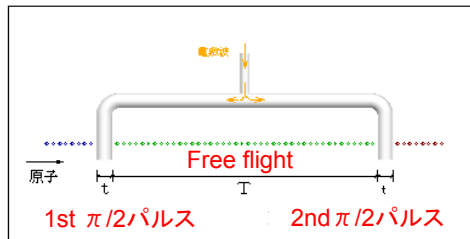
ブロッホベクトル

$$\begin{aligned} U &\equiv \rho_{12} + \rho_{21} = 2 \operatorname{Re}(\rho_{21}) \propto \chi' \\ V &\equiv i(\rho_{12} - \rho_{21}) = 2 \operatorname{Im}(\rho_{21}) \propto \chi'' \\ W &\equiv \rho_{22} - \rho_{11} \end{aligned}$$

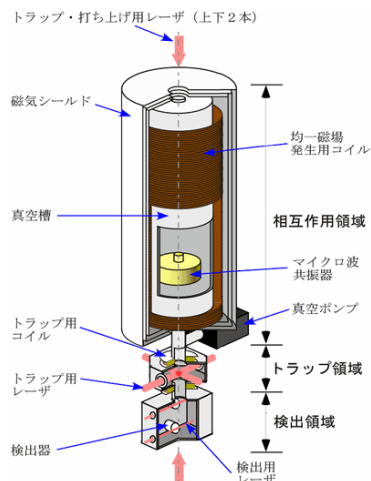
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= +\Omega V \\ \frac{dU}{dt} &= -\delta V \\ \frac{dV}{dt} &= +\delta U - \Omega W \end{aligned} \right. \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\vec{\rho}}{dt} &= \vec{\Omega} \times \vec{\rho} \\ \vec{\rho} &= (U, V, W) \\ \vec{\Omega} &\equiv (\Omega, 0, \delta) \\ |\vec{\Omega}| &= \sqrt{\Omega^2 + \delta^2} = \Omega' \end{aligned} \right.$$



ラムゼーフリンジの幅が $1/2T$ となることのブロッホ球による説明

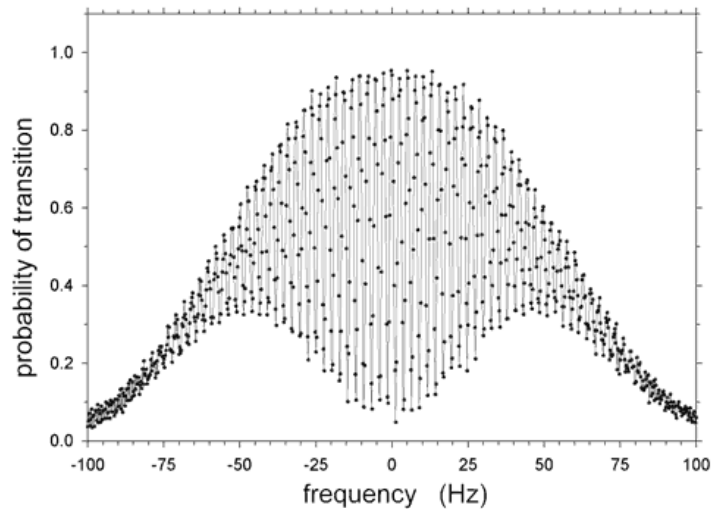


原子泉方式セシウム原子時計



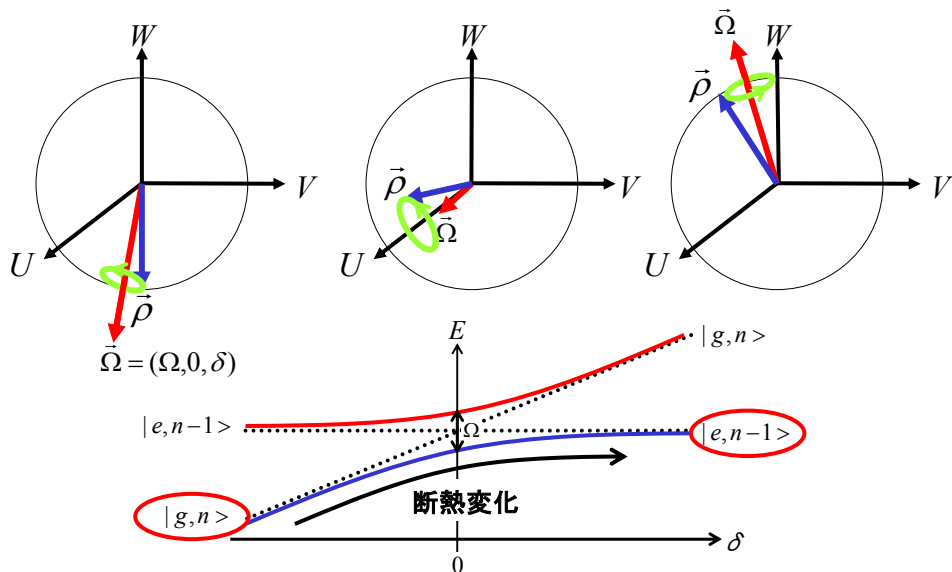
原子泉を用いたラムゼーフリンジ

$|F=3, m=0\rangle$ to $|F=4, m=0\rangle$



<http://physics.nist.gov/TechAct.Archive/TechAct.98/Div847/div847h.html>

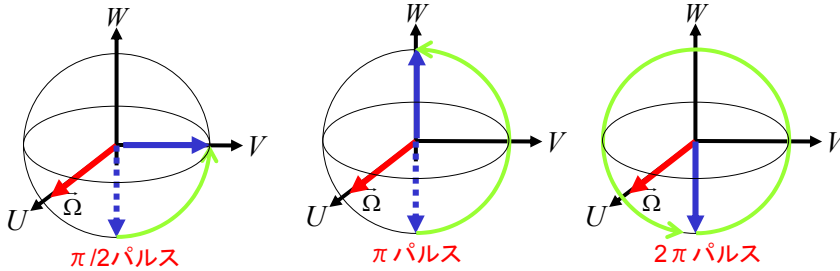
Adiabatic Rapid Passage



2成分スピノール

$\delta = 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Omega t}{2} & i \sin \frac{\Omega t}{2} \\ i \sin \frac{\Omega t}{2} & \cos \frac{\Omega t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(0) \\ C_2(0) \end{pmatrix}$$



Ωt	0	$\pi/2$	π	2π	3π	4π
$\begin{pmatrix} \cos \frac{\Omega t}{2} & i \sin \frac{\Omega t}{2} \\ i \sin \frac{\Omega t}{2} & \cos \frac{\Omega t}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4π回転を調べる中性子干渉計

360度回転すると符号が反転する

720度回転すると、元に戻る

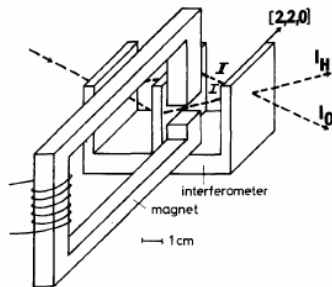


Fig. 1. Sketch of the experimental setup.

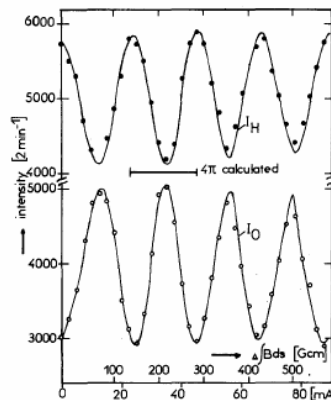
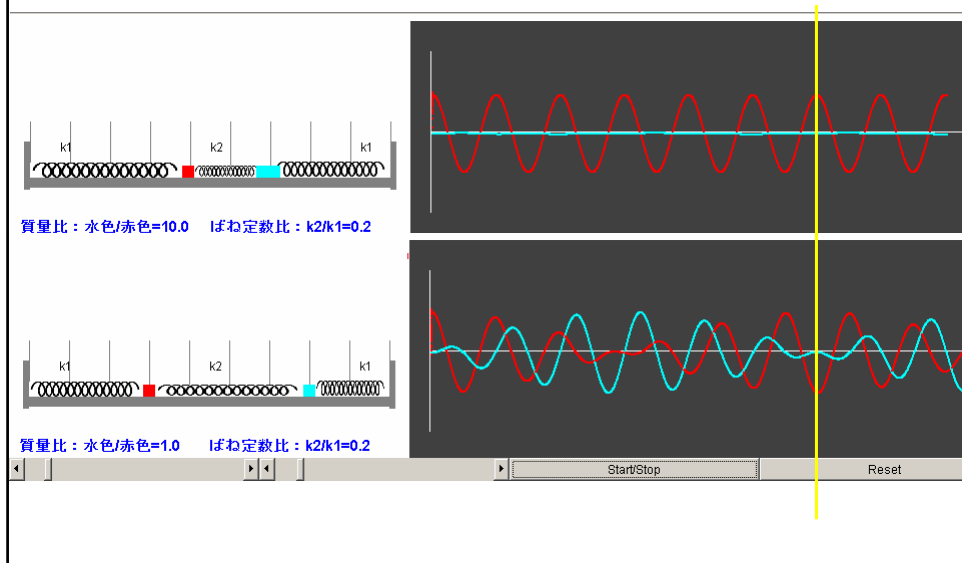


Fig. 2. Observed intensity oscillations of the O- and H-beam as a function of the difference of the magnetic field action on beam I and II ($\Delta Bds = \int B_z ds$ (path I) - $\int B_z ds$ (path II)).

H. Rauch *et al.* Phys. Lett. **54A**, 425(1975)

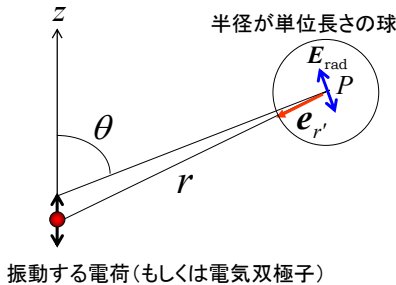
(cf. J. J. Sakurai 「現代の量子力学(上)」p.218)

古典的振動子もスピノール？



(脱線)
自然放出レートの導出

(問題1) 電荷 q が振幅 d 、角周波数 ω で振動している。点 P における電場を求めよ



$$\mathbf{E}_{\text{rad}} \cong -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{e}_{r'} \right]$$

電荷が z 軸上を振幅 d で振動すると、 $\mathbf{e}_{r'}$ の先端は球面上を(時間 r/c だけ遅れて)振幅

$$\frac{z_0 \sin \theta}{r}$$

で振動する。従って、点 P における電場の大きさは

$$E_{\text{rad}}(t) = \frac{qz_0\omega^2 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \cos \omega(t - r/c)$$

光の強度 I は電場の振幅の2乗に比例するので、

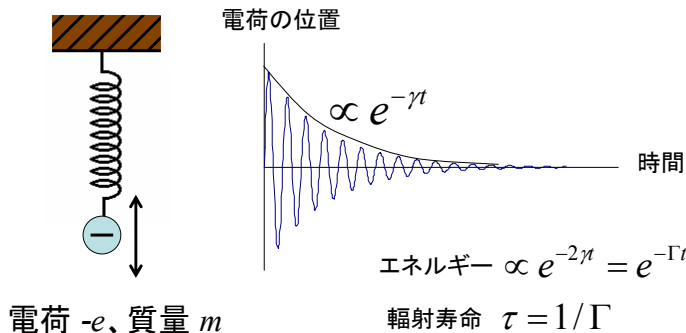
$$I \propto \frac{p^2 \omega^4}{r^2} \sin^2 \theta$$

← レイリー散乱の波長依存性 ($\propto 1/\lambda^4$) の起源
← 双極子輻射パターン
← 距離の2乗に反比例

$$z(t) = z_0 \cos \omega t$$

$$a(t) = \frac{d^2 z}{dt^2} = -d\omega^2 \cos \omega t$$

(問題2) 角周波数 ω で振動している電気双極子のエネルギーが指数関数的に減少することを示し、減衰レート Γ を求めよ (ただし $\Gamma \ll \omega$ とする)

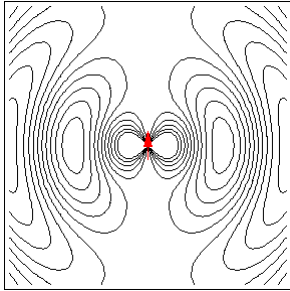


電荷 $-e$ 、質量 m

$$\text{答え: } \Gamma = \frac{e^2 \omega^3}{6\pi\epsilon_0 m c^3}$$

1 μm の輻射の場合、 $2\pi \times 3.53\text{MHz}$

半古典的な自然放出レートの導出



放射パワー

$$P = \int \bar{S} d\Omega = \frac{p^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

原子の電気双極子モーメント

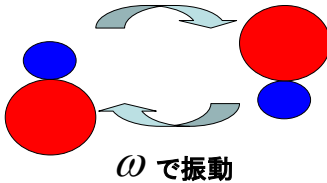
$$p(t) = {}_s\langle \Psi(t) | -ex | \Psi(t) \rangle_s \\ = |2dC_1^*(t)C_2(t)| \cos(\omega t + \alpha)$$

原子のエネルギー

$$U = \hbar\omega C_2 C_2^* = \hbar\omega \rho_{22}$$

原子のエネルギー緩和レート

$$\Gamma \equiv \frac{P}{U} = \frac{d^2 \omega^3}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3} (1 - \rho_{22})$$



電磁場の量子化

量子化された電磁場の電場

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1,2} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V}} (\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) + \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^+ \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}))$$

↑
偏光の向きを表す単位ベクトル(自由度2)

シングルモードの電磁場の電場

$$\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V}} (\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) + \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^+ \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}))$$

特定の位置 ($r=0$) におけるシングルモードの電磁波の電場

$$\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k},\lambda}(0) = \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda} E_0 (\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda} + \hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}^+) \quad \left(E_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V}} \right)$$

電磁場のエネルギー (調和振動子のエネルギー)

<シングルモードの電磁場>

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} \int_V \left\{ \epsilon_0 \hat{\mathbf{E}}^2(\mathbf{r}) + \mu_0^{-1} \hat{\mathbf{B}}^2(\mathbf{r}) \right\} dV \\
 &= \epsilon_0 \int_V \hat{\mathbf{E}}^2(\mathbf{r}) dV \\
 &= \epsilon_0 V E_0^2 (\hat{a} \hat{a}^+ + \hat{a}^+ \hat{a}) \\
 &= 2\epsilon_0 V E_0^2 \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right) \quad \left(\hat{n} \equiv \hat{a}^+ \hat{a} \right)
 \end{aligned}$$

<一次元調和振動子>

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{q}^2 \\
 &= \hbar \omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned}
 \hat{p} &\equiv i(m\hbar\omega/2)^{1/2} (\hat{a}^+ - \hat{a}) \\
 \hat{q} &\equiv (\hbar/2m\omega)^{1/2} (\hat{a}^+ + \hat{a}) \\
 \hat{n} &\equiv \hat{a}^+ \hat{a}
 \end{aligned} \right)$$

両者のエネルギーは等しく表現されるはずなので、

$$2\epsilon_0 V E_0^2 = \hbar \omega \rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V}}$$

電磁波のモード密度

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1,2} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V}} (\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^+ \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}))$$

和をとる際の波数ベクトル k の条件(周期的境界条件)

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) = \left(\frac{2\pi n_x}{L}, \frac{2\pi n_y}{L}, \frac{2\pi n_z}{L} \right) \quad n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

k 空間におけるモード密度:

$$D(k) dk_x dk_y dk_z = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{-3} dk_x dk_y dk_z$$

単位角周波数あたりの電磁場のモード密度(各偏光成分ごと)

$$D(\omega) d\omega = \frac{V \omega^2}{2\pi^2 c^3} d\omega$$

量子論的な自然放出レートの導出

Fermi's Golden Rule

$$\Gamma \equiv 1/\tau_{\text{sp}} = \sum_f \frac{2\pi}{\hbar^2} \left| \langle f | \hat{H}_I | i \rangle \right|^2 \delta(\omega_f - \omega_i)$$

$$|i\rangle = |e, 0_{\mathbf{k}, \lambda}\rangle, \quad |f\rangle = |g, 1_{\mathbf{k}, \lambda}\rangle, \quad \omega_f - \omega_i = \omega - \omega_A$$

$$\sum_f = \sum_{\lambda=1,2} \sum_{\mathbf{k}} \cong \sum_{\lambda=1,2} \int d\omega D(\omega)$$

電場の偏光方向と、電気双極子モーメントの向きが平行であると仮定すると

$$\hat{H}_I = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}} = \hbar g_0 (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) \cdot (\hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{a}}^+)$$

$$\left(d \equiv \langle e | -e\hat{x} | g \rangle, E_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}, g_0 \equiv -\frac{dE_0}{\hbar} = \sqrt{\frac{d^2\omega}{2\epsilon_0 \hbar V}} \right)$$

つづき

$$\Gamma = \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{2\pi}{\hbar^2} \left| \langle g, 1_{\mathbf{k}, \lambda} | \hat{H}_I | e, 0_{\mathbf{k}, \lambda} \rangle \right|^2 D(\omega) \delta(\omega - \omega_A) d\omega$$

回転波近似に対応

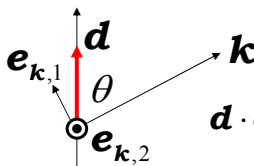
$$\hat{H}_I = \hbar g_0 (\hat{\sigma}_+ \hat{\mathbf{a}} + \cancel{\hat{\sigma}_+ \hat{\mathbf{a}}^+} + \cancel{\hat{\sigma}_- \hat{\mathbf{a}}} + \hat{\sigma}_- \hat{\mathbf{a}}^+)$$

Photon absorption

Photon emission

$$\Gamma = \sum_{\lambda=1,2} 2\pi g_0^2 D(\omega_A) = \sum_{\lambda=1,2} \frac{d^2 \omega^3}{2\pi \epsilon_0 \hbar c^3}$$

偏光に関する平均を考えると、



$$d \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda} = \begin{cases} d \sin \theta (\lambda = 1) \\ 0 (\lambda = 2) \end{cases}$$

$$\Gamma = \frac{d^2 \omega^3}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3}$$

(ここで元に戻る)

緩和(自然放出)のある場合

$$\frac{dC_2(t)}{dt} = i\frac{\Omega}{2}C_1(t) + \left(i\frac{\delta}{2} - \gamma\right)C_2(t)$$

$$\frac{d\rho_{22}}{dt} = \frac{dC_2(t)}{dt}C_2^*(t) + C_2(t)\frac{dC_2^*(t)}{dt}$$

$$= -2\gamma\rho_{22} - i\frac{\Omega}{2}(\rho_{21} - \rho_{12})$$

$$= -\Gamma\rho_{22} + \Omega \text{Im}(\rho_{21}) \quad \Gamma \equiv 2\gamma: \text{自然放出レート}$$

$$\frac{d\rho_{12}}{dt} = \frac{dC_1(t)}{dt}C_2^*(t) + C_1(t)\frac{dC_2^*(t)}{dt}$$

$$= (-i\delta - \gamma)\rho_{12} + i\frac{\Omega}{2}(\rho_{22} - \rho_{11})$$

つづき

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{11}}{dt} &= \frac{dC_1(t)}{dt} C_1^*(t) + C_1(t) \frac{dC_1^*(t)}{dt} \\ &= i \frac{\Omega}{2} (\rho_{21} - \rho_{12}) \end{aligned}$$

このままでは
確率保存しない!
 $\rho_{11} + \rho_{22} \neq 1$



$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{11}}{dt} &= \Gamma \rho_{22} + i \frac{\Omega}{2} (\rho_{21} - \rho_{12}) \\ &= \Gamma(1 - \rho_{11}) - \Omega \text{Im}(\rho_{21}). \end{aligned}$$

光ブロッホ方程式(緩和あり)

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{11}}{dt} &= \Gamma \rho_{22} + i \frac{\Omega}{2} (\rho_{21} - \rho_{12}) \\ \frac{d\rho_{22}}{dt} &= -\Gamma \rho_{22} - i \frac{\Omega}{2} (\rho_{21} - \rho_{12}) \\ \frac{d\rho_{12}}{dt} &= (-i\delta - \gamma) \rho_{12} + i \frac{\Omega}{2} (\rho_{22} - \rho_{11}) \\ \frac{d\rho_{21}}{dt} &= (+i\delta - \gamma) \rho_{21} - i \frac{\Omega}{2} (\rho_{22} - \rho_{11}) \end{aligned}$$

}

$$\begin{cases} \frac{dW}{dt} = -\Gamma(W+1) + \Omega V \\ \frac{dU}{dt} = -\gamma U - \delta V \\ \frac{dV}{dt} = -\gamma V + \delta U - \Omega W \end{cases}$$

$W = -1 \sim$ 緩和(縦緩和)
 W 軸へ緩和(横緩和)

核磁気共鳴(NMR)では、縦緩和時間を T_1 、横緩和時間を T_2 と呼ぶ。
緩和が自然放出によるものだけなら、

$$T_2 = 1/\gamma = 2/\Gamma = 2T_1$$

Damped Rabi Oscillation

光ブロッホ方程式(密度行列)による計算

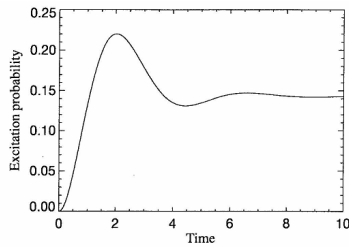
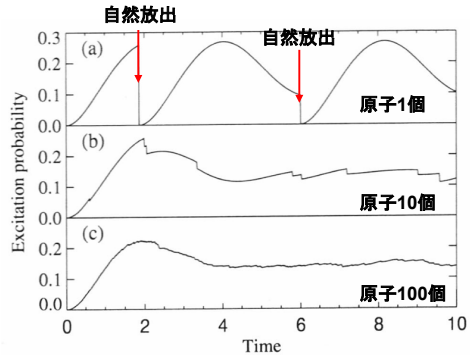


FIGURE 2.1. Probability $|c_e(t)|^2$ for the atom to be in the excited state for $\Omega = \gamma$ and $\delta = -\gamma$ by numerical integration of the OBEs. The solutions are identical to the Monte Carlo wavefunction method with an infinite number of atom trajectories. Time is in units of $1/\gamma$.

量子モンテカルロ法による計算



定常状態の解

$$U = -\frac{2\delta}{\Omega} \frac{s(\delta)}{1+s(\delta)}, \quad V = \frac{2\gamma}{\Omega} \frac{s(\delta)}{1+s(\delta)}, \quad W = -\frac{1}{1+s(\delta)}$$

$$\left(s(\delta) \equiv s_0 L(\delta), \quad s_0 \equiv \frac{\Omega^2}{2\gamma^2}, \quad L(\delta) \equiv \frac{\gamma^2}{\delta^2 + \gamma^2} \right)$$

(共鳴)飽和パラメータ

$$\rho_{22}^{\text{st}} = \frac{1}{2} \frac{s(\delta)}{1+s(\delta)}, \quad \rho_{21}^{\text{st}} = \frac{1}{2} (U + iV) = \frac{s(\delta)}{1+s(\delta)} \cdot \frac{\delta - i\gamma}{\Omega}$$

$$\chi = \frac{2d}{\varepsilon_0 E_0} \rho_{21}^{\text{st}} = \frac{d^2}{\varepsilon_0 \hbar \gamma^2} \cdot \frac{L(\delta)}{1+s(\delta)} (-\delta + i\gamma)$$

自然放出レートと双極子モーメントとの関係

ウィグナー・ワイスコップの自然放出の理論(1930)より

$$\Gamma \equiv 2\gamma = \frac{d^2 \omega^3}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3} = \frac{d^2 k^3}{3\pi\epsilon_0 \hbar} \rightarrow d^2 = \frac{6\pi\epsilon_0 \hbar \gamma}{k^3}$$

したがって、

$$\chi = 6\pi\tilde{\lambda}^3 \frac{L(\delta)}{1+s(\delta)} \cdot \frac{-\delta + i\gamma}{\gamma} \quad \left(\tilde{\lambda} \equiv \frac{\lambda}{2\pi} \right)$$

$$s_0 \equiv \frac{\Omega^2}{2\gamma^2} = \frac{d^2 E_0^2}{2\hbar^2 \gamma^2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \cdot \frac{6\pi\tilde{\lambda}^3}{c\hbar\gamma} = I/I_s \quad \left(I_s \equiv \frac{c\hbar\gamma}{6\pi\tilde{\lambda}^3} \right)$$

飽和強度

($I_s = 1.6 \text{ mW/cm}^2$ for Rb D2line)

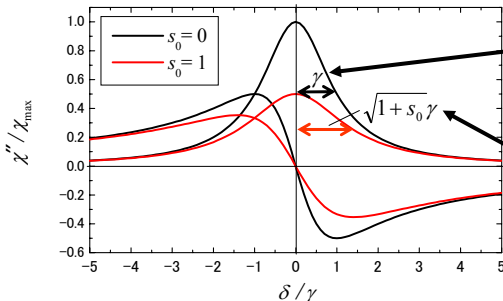
2準位原子の複素電気感受率

量子論的2準位原子

$$\begin{cases} \chi' = -\frac{6\pi\tilde{\lambda}^3}{\sqrt{1+s_0}} \frac{x'}{1+x'^2} \\ \chi'' = \frac{6\pi\tilde{\lambda}^3}{1+s_0} \frac{1}{1+x'^2} \end{cases} \quad \begin{cases} x' \equiv \delta/\gamma' \\ \gamma' \equiv \gamma\sqrt{1+s_0} \end{cases}$$

古典的調和振動子

$$\begin{cases} \chi' = -6\pi\tilde{\lambda}^3 \frac{x}{1+x^2} \\ \chi'' = 6\pi\tilde{\lambda}^3 \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$$



自然幅 (natural linewidth) $x = \delta/\gamma$

飽和(パワー)広がり (power broadening)

$$\sqrt{1+s_0}\gamma = \sqrt{1+I/I_s}\gamma$$

原子の吸収断面積

密度 n の原子気体の吸収係数

$$\alpha = nk\chi'' = n\sigma(\delta)$$

↑
原子数密度

$$\sigma(\delta) \equiv \sigma_0 \frac{\gamma^2}{\delta^2 + (1 + s_0)\gamma^2} \quad : \text{吸収断面積}$$

$$\sigma_0 \equiv 6\pi\hat{\lambda}^2 : \text{共鳴吸収断面積}$$

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z} = I_0 e^{-n\sigma(\delta)z} \leftarrow \text{OD: 光学密度 (optical density)}$$