3準位原子と電磁波との相互作用(EIT と slow light)

平成 25 年 7 月 22 日　鳥井寿夫

1.　相互作用表示におけるハミルトニアン

図１に示すように、２本のレーザー光の電場$E = E_1 \cos\omega_1 t + E_2 \cos\omega_2 t$と相互作用する$\Lambda$型３準位原子を考える。レーザー光１（プローブ光）の 1-3 遷移からの１光子離調を$\Delta_1 = \omega_1 - \omega_{13}$、レーザー光２（カップリング光）の 2-3 遷移からの１光子離調を$\Delta_2 = \omega_2 - (\omega_{13} - \omega_{12})$、そしてレーザー光１とレーザー光２の２光子離調を$\delta = \Delta_1 - \Delta_2 = \omega_1 - \omega_2 - \omega_{12}$と定義する。この３準位系の相互作用表示におけるハミルトニアンは、回転波近似（rotating-wave approximation）の元では

$$\hat{H} = -\hbar\delta\,|2><2| - \hbar\Delta_1\,|3><3| - \frac{\hbar\Omega_1}{2}[|1><3| + |3><1|] - \frac{\hbar\Omega_2}{2}[|2><3| + |3><2|] \tag{1}$$

と表せる。ここで$\Omega_1 = d_{13}E_1/\hbar$および$\Omega_2 = d_{23}E_2/\hbar$は１光子ラビ周波数、$d_{ij}$は遷移ダイポールモーメントを表す。原子の状態ベクトルを

$$|\psi> = c_1(t)|1> + c_2(t)|2> + c_3(t)|3> \tag{2}$$

と表し、シュレーディンガー方程式$\hat{H}|\psi> = i\hbar\partial_t|\psi>$に代入すると、以下の連立微分方程式が得られる：

$$i\hbar\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_1 \\ 0 & 2\delta & \Omega_2 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & 2\Delta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

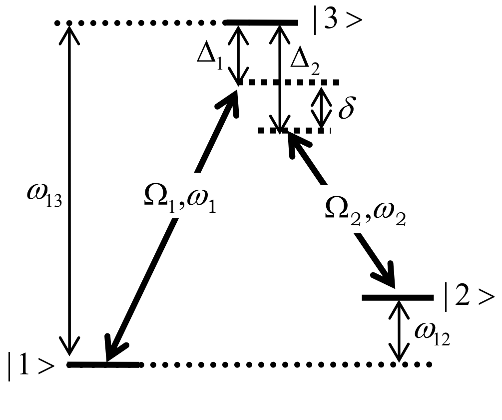


図１ Λ型３準位原子と２本のレーザー光との相互作用

2.　暗状態（dark state）

式（3）のハミルトニアン行列は簡単に対角化することができる。ハミルトニアンの固有値をλとすると、固有方程式より固有値が以下のように求まる：

$$\det\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \Omega_1 \\ 0 & 2\delta-\lambda & \Omega_2 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & 2\Delta_1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \to \lambda = 0, -\Delta_1 \pm \sqrt{\Delta_1^2+\Omega_1^2+\Omega_2^2} \tag{4}$$

固有値$\lambda=0$に対応する固有状態は

$$|\psi>_{\mathrm{Dark}} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_1^2+\Omega_2^2}}\left(\Omega_2\,|1>-\Omega_2\,|2>\right) \tag{5}$$

と表され、励起状態 $|3>$を含まない。それ故、一度この状態に落ち込んだ原子は光を吸収することはなく、自然放出を起こせない。このような状態を**暗状態**（dark state）もしくは**コヒーレントポピュレーショントラッピング**（CPT: coherent population trapping）と呼ぶ。

3.　緩和過程の導入

プローブ光遷移($|1>\leftrightarrow|3>$)の複素電気感受率を計算するために、式（1）では無視していた緩和項を以下のようにハミルトニアンに導入する:

$$\hat{H}_{\mathrm{eff}} = \hat{H} - i\hbar\gamma_2\,|2><2| - i\hbar\gamma_3\,|3><3|. \tag{6}$$

このハミルトニアンは非ユニタリーであり、状態ベクトルの大きさ（ノルム）は保存しない。しかしながら、プローブ光が十分弱く($\Omega_1 \to 0$)、励起状態の存在確率が十分小さい極限($c_3 \ll 1$)においては、式（6）を実効的なハミルトニアンとして用いることができる(詳しくは、Lukin’s の講義ノート http://lukin.physics.harvard.edu/teaching.htm を参照のこと)。最終的に、以下の連立微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 &= i\frac{\Omega_1}{2}c_3 \\ \dot{c}_2 &= -(\gamma_2 - i\delta)c_2 + i\frac{\Omega_2}{2}c_3 \\ \dot{c}_3 &= -(\gamma_3 - i\Delta_1)c_3 + i\frac{\Omega_1}{2}c_1 + i\frac{\Omega_2}{2}c_2. \end{aligned} \tag{7}$$

ここで、後の便宜のために、以下の一般化された（複素数の）減衰定数を導入する。

$$\begin{aligned} \Gamma_{12} &= \gamma_2 - i\delta \\ \Gamma_{13} &= \gamma_3 - i\Delta_1 \end{aligned} \tag{8}$$

4. 吸収および分散曲線

プローブ光の複素電気感受率 χ は、定常状態における密度行列の非対角成分 $\rho_{31} = c_3 c_1^*$ に比例するので、これを求めればよい。$c_1 = 1$，$\dot{c}_2 = \dot{c}_3 = 0$ を式（7）に代入して、

$$c_3 = i\frac{\Omega_1}{2}\frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{12}\Gamma_{13} + \Omega_2^2/4}. \tag{9}$$

が得られる。ここで複素電気感受率と ρ_{31} の関係式 $\chi = \dfrac{2d_{13}}{\varepsilon_0 E_1}\rho_{31} \propto \dfrac{2d_{13}^2}{\varepsilon_0 \hbar \Omega_1}\rho_{31}$ および、

$\rho_{31} = c_3 c_1^* \approx c_3$ より、最終的に複素電気感受率が以下のように求まる。

$$\chi = \frac{d_{13}^2}{\varepsilon_0 \hbar}\frac{i\Gamma_{12}}{\Gamma_{12}\Gamma_{13} + \Omega_2^2/4} \propto \frac{i\Gamma_{12}}{\Gamma_{12}\Gamma_{13} + \Omega_2^2/4}. \tag{10}$$

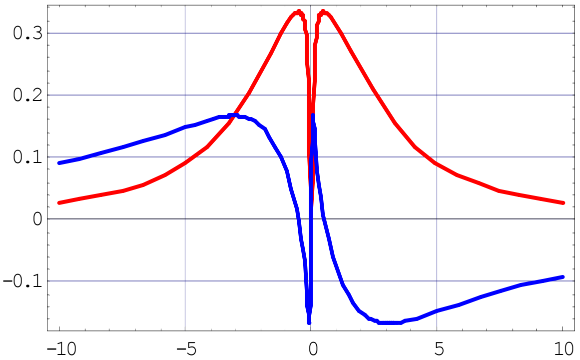
以下は χ の実部（分散）と虚部（吸収）を計算する Mathematica のプログラムである。

```
γ3 = 3
γ2 = 0
Ω2 = 1
Δ2 = 0
δ = Δ1 - Δ2
Γ12 = γ2 - I δ
Γ13 = γ3 - I Δ1
Kai = I Γ12 / (Γ12 Γ13 + Ω2^2 / 4)
Plot[{Im[Kai], Re[Kai]}, {Δ1, -10, 10}, PlotStyle ->
  {{Thickness[0.01], RGBColor[1, 0, 0]}, {Thickness[0.01], RGBColor[0, 0, 1]}},
 Frame -> True, GridLines -> Automatic]
```

この 3 準位系は以下の著しい特徴を持つ：

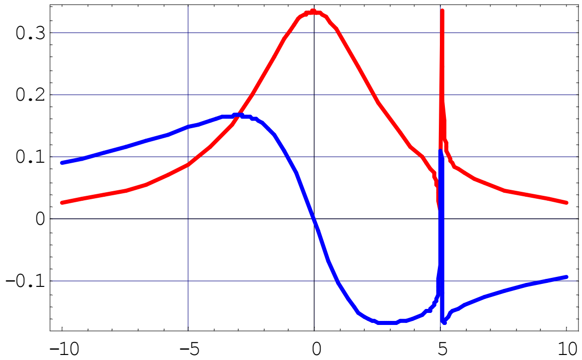
1. $\Delta_1 = \Delta_2$ のときに吸収が消失する（dark resonance, EIT: electromagnetically induced tranceparency)。
2. $\Delta_1 = \Delta_2$ 付近で、極めて急峻な正常分散信号が得られる（slow light、light storage)。
3. $|\Delta_2| > \gamma_3$ の場合、1 光子吸収と同じ強さの急峻な誘導ラマン吸収が $\Delta_1 = \Delta_2$ で起こる。

$\gamma_3 = 3, \gamma_2 = 0, \Delta_2 = 0, \Omega_2 = 1$ のとき



$\delta = \Delta_1 - \Delta_2$

$\gamma_3 = 3, \gamma_2 = 0, \Delta_2 = 5, \Omega_2 = 1$ のとき



$\delta = \Delta_1 - \Delta_2$