

古くて新しい原子物理学

東京大学大学院総合文化研究科

鳥井寿夫

ytorii@phys.c.u-tokyo.ac.jp

はじめに

原子物理学と聞くと、ラザフォード、ボーア、長岡半太郎といった 20 世紀初頭の物理学者を思い起こす人もいるだろう。確かに当時は原子の構造を解明することが物理学の主要なテーマであり、その一つの集大成として量子力学がハイゼンベルグ、シュレーディンガー、ディラックらによって定式化されたのであった。量子力学が素粒子物理、凝縮系物理、宇宙論など広範囲に適用されている現在、その生みの親である原子物理学はその役割を既に終えていると思われるかも知れない。しかし、実際はそうではない。1960 年のレーザーの発明以降、レーザー光により原子の内部 (電子) 状態および外部 (重心運動) 状態を制御する技術が発展したことにより、原子物理学は新たな展開を見せ、現在に至るまで常に新しい研究分野を生み出し続けている。例として、1968 年から隔年で開催されている原子物理学国際会議 (ICAP: International Conference on Atomic Physics) の第 20 回 (2006 年開催) のトピックスの一部を以下に挙げる。

- Atomic tests of fundamental physics (原子による基礎物理学の検証)
- Laser spectroscopy, cooling and trapping (レーザー分光、冷却、捕獲)
- Quantum optics and cavity QED with atoms (原子を用いた量子光学、共振器 QED)
- Bose-Einstein condensates (ボース・アインシュタイン凝縮)
- Fermi gases (フェルミ気体)
- Cold molecules (冷たい分子)
- Atomic clocks (原子時計)
- Atoms in optical lattices (光格子中の原子)
- Quantum information processing with atoms and ions (原子・イオンを用いた量子情報処理)

さて、こういった「新しい原子物理学」を理解する、または実際に研究対象にする際に我々に最も求められる素養は何であろうか。温故知新という言葉があるように、私は「古い原子物理学」、特に古典電磁気学と標準的な (学部レベルの) 量子力学だと考えている。場の量子論は量子化された電磁場と原子との相互作用を考える上で必要だが、いわゆる量子電気力学 (QED: Quantum electrodynamics) の知識はほとんど必要ない。もっと言うならば、一見電磁場の量子化 (もしくは光子の概念) が本質と思われるような現象 (例えば光電効果、自然放出、輻射圧) でも、古典電磁気学の範囲で完全に説明がつく場合が多

い。量子化された電磁場を用いた現象の記述は、エレガントで高尚に見えるかもしれないが、同じ現象が古典電磁気学の範囲ではどのように説明されるか知っておくことも重要である。ファインマンは同じ物理現象を多くの異なるアプローチで説明する天才であった。彼はノーベル賞講演の中で次のように言っている。「物理の基本法則が、発見の当座には一見して同じとは見えないさまざまな形をとり、それにもかかわらず数学的にちょっといじってみると互いの関係がわかってくる。(中略) どうしてそうなのか、私にはわかりません。神秘的です。とにかく経験が教える重大な事実なのです。同じことを言い表すのに、つねに第二の方法が存在して、第一の方法とは全然同じとみえない。その理由を問われても、私には答えられません。自然の単純性の現れといえよいかと思ったりしています。」同じ現象を異なる方法で説明することによって、我々はその現象をより深く理解し、自然の神秘に触れることができるのでないでしょうか。

そういった訳で、本講義では最新の原子物理学のトピックスについて網羅的な話をするのではなく、その基礎にある「古い原子物理学」に焦点をあてることにする。まず古典電磁気学を復習し、原子を古典的な調和振動子とみなして光(古典的電磁波)との相互作用を考えるローレンツモデルについて解説する。この単純な古典モデルが、原子気体の光学応答(吸収や分散)を定性的に説明するのみならず、光が原子に及ぼす力(輻射圧および双極子力)をも正しく説明し、更には原子の自然放出レートを定量的に正しく(例えば Na、K、Rb、Cs の D 線においては数%の精度で)導出するのは驚くべきことである。その後、離散的なエネルギー準位構造(2 準位および 3 準位)を持つ量子論的な原子と光との相互作用について解説する。2 準位系は、ダイナミクスのある量子系の中で最も単純なものであるが、極めて豊富な応用を含んでいる。J. J. Sakurai の「現代の量子力学」には、レーザーの説明の後に次のような文章がある。「一般に時間を含む 2 準位系の問題には、他に原子時計や光学的ポンピングといった多くの応用がある。実際、物理部門のノーベル賞が 4 件も、時間を含むある種の 2 準位を研究した人に与えられたことは興味深い*。」3 準位系と光との相互作用は、一般にラマン過程と呼ばれ、分子科学ではラマン分光法として古くから利用されているが**、現代の原子物理学においても、EIT (Electromagnetically-induced transparency) や STIRAP (Stimulated Raman adiabatic passage) といったコヒーレントなラマン過程が頻繁に利用されている(光の超低速伝播や光の保存・再生は EIT と STIRAP の併せ技である)。最後に、量子化された電磁場と原子の相互作用、そして原子物理学の最近のトピックスであるレーザー冷却とボース凝縮について解説する。

* 脚注に以下の 4 つを挙げている: 磁気共鳴に対してラビ (1944)、核磁気モーメントに対してプロットとパーセル(1952)、レーザーとレーザーに対してタウンズ、バソフ、プロチョロフ (1964)、光学的ポンピングに対してカストラ(1966)。この教科書が出版されたのは 1985 年であるが、もし彼が現在まで生きていれば、更に次の 3 件も改訂版に加えたことであろう: 水素レーザーと原子時計に対してラムゼー(1989)、レーザー冷却に対してチュー、フィリップス、コーエンタノーシ(1997)、原子気体のボース凝縮に対してコーネル、ワイマン、ケターレ(2001)。

** ラマン散乱はインドの物理学者ラマンによって 1924 年に発見され(発表は 1928 年)、1930 年にノーベル賞が授与されている。

第 1 章 古典電磁気学の復習

1. E-B 対応のマクスウェル方程式

モノポール（磁気単極子）が発見されていない現在では、磁気モーメントの起源は電流であるとする E-B 対応の電磁気学が主流である。E-B 対応のマクスウェル方程式は、以下の 4 式からなる：

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \mathbf{r}_e \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mathbf{m}_0 \left(\mathbf{j}_e + \mathbf{e}_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

これらは、いかなる状況、いかなる物質においても正しく、従って、これさえ覚えておけばよい。ただし、電荷密度 \mathbf{r}_e には自由電荷の密度 $\mathbf{r}_{e,\text{free}}$ に加えて電気分極 \mathbf{P}_e からの寄与

$$\mathbf{r}_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}_e \quad (2)$$

も含めなければならない。また電流密度 \mathbf{j}_e には、自由電荷の電流密度 $\mathbf{j}_{e,\text{free}}$ のみならず、分極電流密度

$$\mathbf{j}_p = \frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial t} \quad (3)$$

および磁化電流密度

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{j}_M \quad (4)$$

も加えなければならない。ここで、電束密度および磁場と呼ばれる場を

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}_e + \mathbf{e}_0 \mathbf{E} \quad (5)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{m}_0} - \mathbf{M} \quad (6)$$

と便宜的に定義することにより、マクスウェル方程式は次のように表現できる：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \mathbf{r}_{e,\text{free}} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j}_{e,\text{free}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (7)$$

これらは、電荷密度や電流密度のうち、物質中の分極（の時間、空間変化）や磁化（の空

間変化)からの寄与を D や H に隠しただけであり、基本的に式(1)のマクスウェル方程式と同値である。また、そもそも電荷というものは自由なものと束縛されたもの(つまり分極電荷)に本質的な差があるわけではなく、 D の定義には任意性がある*。その意味で、何が基本法則かを忘れないためにも、マクスウェル方程式としては式(1)だけを覚え、式(7)の物質中のマクスウェル方程式は必要ならば導けるように準備(つまり式(2)~(4))を、その物理的意味を理解しつつ暗記)しておくのがよい。

2. E-H 対応のマクスウェル方程式

E-B 対応のマクスウェル方程式は、電場 E と磁束密度 B に関して対称的な形をとっておらず、これが E-B 対応の電磁気学を理解しにくくしている。この非対称性は、電荷は存在するのに磁荷は存在しないという非対称性からの直接の帰結である。電気双極子は正負の電荷によって生成されるが、これと同様に(本当は電流が起源である)磁気モーメントを正負の磁荷からなる磁気双極子と考えるのが E-H 対応の電磁気学である**。つまり磁荷が存在すると仮定し、電荷と同様に磁荷に関してもガウスの法則やアンペール-マクスウェルの法則が成り立つと考えるのである。E-B 対応と E-H 対応では磁荷の基本単位が異なり、E-H 対応での磁化 P_m (単位体積あたりの磁気双極子の和、その意味で磁気分極と呼ぶべき場)は、E-B 対応の磁化 M (単位体積あたりの磁気モーメントの和)と

$$\mathbf{m}_0 \mathbf{M} = \mathbf{P}_m \quad (8)$$

という関係にある***。この磁化の単位を用いた E-H 対応のマクスウェル方程式は、次のように電場と磁場に関して対称的な形をとる：

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \mathbf{r}_e \\ \nabla \times \mathbf{E} &= - \left(\mathbf{j}_m + \mathbf{m}_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \\ \mathbf{m}_0 \nabla \cdot \mathbf{H} &= \mathbf{r}_m \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j}_e + \mathbf{e}_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (9)$$

磁荷の存在を仮定しているので、磁荷密度 \mathbf{r}_m や磁流密度 \mathbf{j}_m が新たに定義されている。電場 E と磁場 H は対等であり、電場における \mathbf{e}_0 の役割を、磁場においては \mathbf{m}_0 が担っている。

* H に関して同様の任意性がある。詳しくは太田浩一「電磁気学の基礎 I」p117 および p575 を参照のこと。

** E-B 対応の電磁気学では、微小な環状電流の磁気モーメントは $\mathbf{m} = I \mathbf{S} \mathbf{n}$ (S は電流の囲む面の面積、 \mathbf{n} はその面の法線ベクトル) で定義され、微小距離 d 離れた正負の磁荷 $\pm q_m$ からなる磁気双極子と $I \mathbf{S} \mathbf{n} = q_m d$ の関係があれば、この磁気双極子と同じ磁場を外部につくる。

*** E-B 対応における磁荷 q_m とすると、E-H 対応の磁荷 \tilde{q}_m と $\mathbf{m}_0 q_m = \tilde{q}_m$ の関係にある。磁場の

クーロンの法則は E-B 対応では $F = \frac{\mathbf{m}_0 q_{m1} q_{m2}}{4\mathbf{p} r^2}$ 、E-H 対応では $F = \frac{1}{4\mathbf{p}\mathbf{m}_0} \frac{\tilde{q}_{m1} \tilde{q}_{m2}}{r^2}$ である。

このことは、様々な公式を覚える際に大変便利である。これについては後述する。

磁荷は常に磁気双極子として存在する、つまりモノポールは存在しないと仮定すれば、式(2)と同様に、磁荷密度は磁化 P_m を用いて

$$\mathbf{r}_m = -\nabla P_m \quad (10)$$

また、式(3)と同様に磁流密度は

$$\mathbf{j}_m = \frac{\partial P_m}{\partial t} \quad (11)$$

と表現できる。ここで、E-B 対応の電磁気学で行ったように、磁化の寄与を隠すために、

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{P}_m = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (12)$$

と定義される磁束密度を便宜的に定義する。この式は、E-B 対応の電磁気学では便宜的に導入された磁場 \mathbf{H} の定義式(6)と同じであり、式(9)の E-H 対応のマクスウェル方程式は E-B 対応のマクスウェル方程式に帰着する(実際に確認してみよ)。つまり E-B 対応と E-H 対応のマクスウェル方程式は、式(12)で結ばれた等価な方程式であり、磁化の微視的機構を問わない巨視的な電磁気学においては、どちらが正しい描像かを判定することはできない。磁性の分野では E-H 対応が好まれるようである。また、電磁波を記述する際、その対称性の良さから \mathbf{B} ではなく \mathbf{H} が使われることが多い。

3. 線形媒質におけるマクスウェル方程式

媒質中の分極と電場および磁化と磁場との間に線形関係

$$\mathbf{P}_e = \epsilon_0 \mathbf{c} \mathbf{E} \quad (13)$$

$$\mathbf{P}_m = \mu_0 \mathbf{c}_m \mathbf{H} \quad (\mathbf{M} = \mathbf{c}_m \mathbf{H}) \quad (14)$$

が成り立つとする(\mathbf{c} は電気感受率、 \mathbf{c}_m は磁化率と呼ばれ、それぞれ無次元量である)。このとき、電束密度および磁束密度は、以下のようにそれぞれ電場、磁場に比例する。

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}_e + \epsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{e} \mathbf{E} \quad (15)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{P}_m = \mathbf{m} \mathbf{H} \quad (16)$$

ここで、 \mathbf{e} は媒質の誘電率、 \mathbf{m} は媒質の透磁率と呼ばれ、以下のように定義される。

$$\mathbf{e} \equiv \epsilon_0 (1 + \mathbf{c}) \quad (17)$$

$$\mathbf{m} \equiv \mu_0 (1 + \mathbf{c}_m) \quad (18)$$

E-B 対応の電磁気学では、 \mathbf{H} は便宜的に導入された場であるので、磁化 \mathbf{M} は磁束密度 \mathbf{B} に比例するものとして磁化率を定義するのが自然である。しかし式(14)が成り立てば、 $\mathbf{M} = \mathbf{c}_m \mathbf{B} / \mu_0 (1 + \mathbf{c}_m)$ となり、自動的に \mathbf{M} と \mathbf{B} の比例関係も成り立つので、どちらを基

準に比例関係を定義しても物理は同じである。E-B 対応においても H を基準に磁化率を定義するのは、磁性物性は E-H 対応の方が直感的に理解しやすいことからくる慣例であろう。

式 (15) (16) を、式 (7) のマクスウェル方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \mathbf{r}_{\mathbf{e},\text{free}} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mathbf{m} \left(\mathbf{j}_{\mathbf{e},\text{free}} + \mathbf{e} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

が得られる。この線形媒質中のマクスウェル方程式は、式 (1) の最も基本的なマクスウェル方程式において $\mathbf{e}_0 \rightarrow \mathbf{e}$ 、 $\mathbf{m}_0 \rightarrow \mathbf{m}$ の書き換えを行い、電荷密度、電流密度として自由電荷のみを考えたものとなっている。 \mathbf{e}_0 、 \mathbf{m}_0 がそれぞれ真空の誘電率、真空の透磁率と呼ばれるのは、媒質の誘電率 \mathbf{e} 、透磁率 \mathbf{m} の $c \rightarrow 0$ 、 $c_m \rightarrow 0$ の極限となっているからである。真空は予め何らかの線形媒質で満たされていて、我々はその真空という媒質の誘電率や透磁率を真空の誘電率、真空の透磁率と呼んでいる、と解釈できるのである。

4. 電磁場のエネルギー

電荷 q に働くローレンツ力は、よく知られているように $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ と表せるので、この電荷が電磁場から受ける単位時間あたりの仕事は、電荷の速度を \mathbf{v} として

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad (20)$$

で与えられる。つまり、**磁場は電荷に仕事をしない**。移動する電荷は電流であるから、単位時間、単位体積あたり電荷が電磁場から受ける仕事は、E-B 対応における電流密度 \mathbf{j} を用いて

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{j}_{\text{free}} + \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_{\mathbf{e},\text{free}} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{M}) \quad (21)$$

と表わせる。ここで E-B 対応のマクスウェル方程式 (1)、およびベクトル公式 $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ を用いると、

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = - \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{e}_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mathbf{m}_0} \mathbf{B}^2 \right) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_{\mathbf{e},\text{free}} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial t} - \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \quad (22)$$

という関係が得られる。ここで \mathbf{S} は**ポインティングベクトル**と呼ばれ、次式で定義される。

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (23)$$

ポインティングベクトルはエネルギー流密度を表すことはよく知られているが、その解釈には注意を要する。式 (22) の右辺第 1 項は、電磁場そのもののエネルギー密度

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mathbf{m}_0} \mathbf{B}^2 \quad (24)$$

の時間変化をあらわす。右辺第 2 項の $E \cdot j_{e,free}$ は、単位時間あたりに電場が自由電荷になす仕事であり、ジュール熱として電磁場から失われるエネルギーである。右辺第 3 項の $E \cdot (\partial P_e / \partial t)$ は、単位時間に電場が分極になす仕事であり、分極内に蓄えられる力学的エネルギー（ミクロに見れば電気双極子の束縛ポテンシャルエネルギー）の変化量のみならず、分極によるエネルギーの散逸（具体的には、振動する電気双極子による電磁波の放射や、ジュール熱）をも表す奥の深い項である。右辺第 4 項の $-M \cdot (\partial B / \partial t)$ は、磁化 M と磁場 B の相互作用エネルギーが $-M \cdot B$ であるから、この単位時間あたりの変化量と解釈できるが、右辺第 3 項と符号が逆であり、「磁化に蓄えられたエネルギーの時間変化」とは解釈できない。この右辺第 4 項は、いわゆる「隠れたエネルギー流密度 ($S^h = -E \times M$)」が関係しており、右辺第 3 項のような直感的な理解は難しい*。そもそも E-B 対応の電磁気学では、便宜的に導入されている H を用いてポインティングベクトルが表現されているのが不自然な印象を与える。一方、式 (22) を式 (12) を用いて、E-H 対応の視点で表してみると、

$$\nabla \cdot (E \times H) = - \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) + E \cdot j_{e,free} + E \cdot \frac{\partial P_e}{\partial t} + H \cdot \frac{\partial P_m}{\partial t} \right] \quad (25)$$

と非常に対称性がよい形をとる。今度は右辺第 4 項を「磁化に蓄えられている力学的エネルギーの時間変化量」と直感的に解釈できる。E-H 対応では、電気と磁気の法則が対称的なので、式 (25) が E と H 、 P_e と P_m に関して対称的な形をとらない理由がない（もしモノポールが存在すれば、式 (25) には磁場が単位時間に自由磁荷になす仕事 $H \cdot j_{m,free}$ が加わり、その対称性はもっと際立つであろう）。エネルギー流密度の問題に限らず、その完全な対称性ゆえに E-H 対応は E-B 対応より直感的に理解しやすい場面が多く、これが未だに E-H 対応の教科書が根強く残っている一つの原因だと思われる。

ところで、式 (22) を、分極や磁化を用いずに表現してみると、

$$\nabla \cdot (E \times H) = - \left[\left(E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} + H \cdot \frac{\partial B}{\partial t} \right) + E \cdot j_{e,free} \right] \quad (26)$$

となる。これより、電磁場のエネルギー密度と分極と磁化に蓄えられている力学的エネルギー密度の和 u_{tot} の時間微分は

$$\dot{u}_{tot} = E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} + H \cdot \frac{\partial B}{\partial t} \quad (27)$$

で与えられることがわかる。分極と電場および磁化と磁場との間に式 (13) (14) の線形関係が成り立つ場合に限り、全エネルギー密度は

$$u_{tot} = \frac{1}{2} E \cdot D + \frac{1}{2} B \cdot H \quad (28)$$

と表せる。

*詳しくは太田浩一「電磁気学の基礎 I」 p357、p599.

物質中の電磁波の伝播を考える際、物質の磁化の影響を無視することが多い。そのような場合、つまり、 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ の場合は、ポインティングベクトルを

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (29)$$

と表現してもよい。多くの教科書が式(29)でポインティングベクトルを定義しているが、正しくは(磁化が無視できない場合は) $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ であることを忘れてはならない。

5. 波動方程式と電磁波

自由電荷の存在しない線形媒質中での電磁波の伝播を考える。媒質の誘電率 ϵ および透磁率 μ は、ここでは実数とする。式(19)において、 $\mathbf{r}_{e,\text{free}} = \mathbf{j}_{e,\text{free}} = 0$ とし、対称性のよい式で議論を進めるため、便宜的に磁束密度 \mathbf{B} を磁場 \mathbf{H} で書き表すことにすると、線形媒質のマクスウェル方程式は

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (30)$$

と表せる。このマクスウェル方程式の第2式の両辺に $\nabla \times$ を施すと

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H})$$

となるが、右辺は第4式を用いて

$$-\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

と電場の時間に関する2階微分に比例する。左辺は、公式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ および第1式を用いて

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\Delta \mathbf{E}$$

と電場にラプラシアン ($\Delta \equiv \nabla^2$) をかけたものになる。このようにして電場に関する波動方程式

$$\left(\Delta - \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (31)$$

が得られる。磁場に関しても、第4式の両辺に $\nabla \times$ を施し、第2式と第3式を用いることにより、同様の波動方程式が得られる。

式(31)の波動方程式をみたす電磁波はさまざまであるが、ここでは一定の波数ベクトル \mathbf{k} で特定の方向に偏光している平面電磁波を考える。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (32)$$

式(30)の第1式に式(32)を代入すると、 $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{k} \cdot E_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = 0$ であるから、 $\mathbf{k} \cdot E_0 = 0$ でなければならない。つまり電場の偏光と波数ベクトルは直交する。また、式(30)の第4式に式(32)を代入すると

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{k} \times E_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = -\mathbf{m} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

となるが、この式を満たすような磁場は以下の形に一意的に決まる。

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = H_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (33)$$

$$H_0 = \frac{\mathbf{k} \times E_0}{\omega \mathbf{m}} \quad (34)$$

このように磁場は電場と同じ波形を持つが、磁場ベクトルは波数ベクトルと電場ベクトルの双方に直交する。その関係は、 $\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$ がそれぞれ右手系の x, y, z (右手の親指、人差し指、中指) の方向と覚えおくとよい(図1参照)。

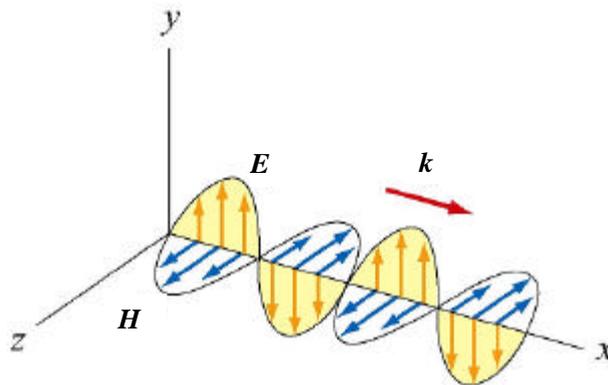


図1 平面電磁波

式(32)の電場の表現を波動方程式(31)に代入すると、波数と振動数の関係

$$k^2 - \epsilon \mathbf{m} \omega^2 = 0 \Leftrightarrow k = \sqrt{\epsilon \mathbf{m} \omega} \quad (35)$$

が得られる。式(34)より $H_0 = kE_0 / \omega \mathbf{m}$ であるから、これに式(35)を代入すると、電場と磁場の振幅の関係式

$$\sqrt{\epsilon} E_0 = \sqrt{\mathbf{m}} H_0 \quad (36)$$

が得られる。期待したように、対称性のよい関係式となっており、非常に覚えやすい(実際、覚える価値がある)。ちなみに磁束密度で同じ関係式を表すと、

$$\sqrt{\epsilon \mathbf{m}} E_0 = B_0 \quad (37)$$

となり、対称性が悪く覚えにくい。電磁波の位相速度は $v_p = \omega/k$ で与えられるから、

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon m}} \quad (38)$$

である。特に真空中の光速 c は

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 m_0}} \quad (39)$$

で与えられる。媒質の屈折率 n は、媒質中の電磁波の位相速度と真空の光速との比で定義され、以下で与えられる。

$$n \equiv \frac{c}{v_p} = \sqrt{\frac{\epsilon m}{\epsilon_0 m_0}} = \sqrt{(1 + \epsilon)(1 + m)} \quad (40)$$

ここで電磁波のエネルギーについて考えよう。式 (15) (16) (28) より、

$$u_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} m H^2 \quad (41)$$

であるが、式 (36) の関係式より磁場を電場で表すと

$$u_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \epsilon E_0^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (42)$$

となる。このように電場と磁場のエネルギーは等しい (正確には、電場のエネルギーに分極の力学的エネルギーを加えたものは、磁場のエネルギーに磁化の力学的エネルギーを加えたものに等しい)。また、ポインティングベクトルは、 \mathbf{e}_k を波数ベクトル k の単位ベクトルとして

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = E_0 H_0 \mathbf{e}_k \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = u_{\text{tot}} v_p \mathbf{e}_k \quad (43)$$

となる。このようにポインティングベクトルは、「電磁場の全エネルギー密度 \times 位相速度ベクトル」で表され、まさしく電磁場のエネルギー流密度を表していることがわかる。電磁場のポインティングベクトルを電磁波の振動周期より十分長い時間で平均したものを、その電磁場の強度と呼び、

$$I = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{1}{2} v_p \epsilon E_0^2 \quad (44)$$

で与えられる。

6. 複素電気感受率と散乱断面積との関係

これまで、媒質の誘電率 ϵ 、透磁率 m は実数と考えてきた。これは電磁場に対して分極や磁化が位相遅れなく誘起されると仮定したことになる。しかし実際は、媒質を構成する原子や分子の電磁波に対する応答にはヒステリシスがあり、分極や磁化の位相は電磁波の位相に対して遅れたり進んだりする。そのような状況を表現する際、電場、分極および磁

化を複素表示で記述するのが便利である。以下では、簡単のため、媒質の磁化は無視し ($\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$) z 方向に進行し、 x 方向に直線偏光した角周波数 ω の平面電磁波を考える。電場および分極の複素表示は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{x}}E(z, t) = \hat{\mathbf{x}}E_0 \exp[i(kz - \omega t)] \quad (45)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_0 \mathbf{c} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (46)$$

で与えられ、これらの実部が実際の電場と分極を表すと約束する。式 (46) に現れた \mathbf{c} は複素電気感受率と呼ばれ、これが複素数の値をもつ (つまり虚部を持つ) ことにより電場に対する分極の位相差を表現できる。以降、 \mathbf{c} の実部を \mathbf{c}' 、虚部を \mathbf{c}'' と表すことにする。

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}' + i\mathbf{c}'' \quad (47)$$

実際に、複素分極の式 (46) の実部を、例えば $z = 0$ の位置で計算してみると、

$$\begin{aligned} \text{Re}[P(t)] &= \frac{1}{2} \mathbf{e}_0 E_0 [\mathbf{c} \exp(-i\omega t) + \mathbf{c}^* \exp(i\omega t)] \\ &= \mathbf{e}_0 E_0 (\mathbf{c}' \cos \omega t + \mathbf{c}'' \sin \omega t) \end{aligned} \quad (48)$$

となり、 \mathbf{c}' は電場と同位相で振動する成分 ($\cos \omega t$)、 \mathbf{c}'' は電場から 90° 位相が遅れて振動する成分 ($\sin \omega t$) の電気感受率となっている。

式 (45) の電場の表式を、式 (31) の波動方程式に代入すると、

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \mathbf{c}) = 0 \Leftrightarrow k = k_0 \sqrt{1 + \mathbf{c}} \quad (49)$$

が得られる。ここで $k_0 \equiv \omega/c$ は真空中での波数である。 $\sqrt{1 + \mathbf{c}}$ は、 \mathbf{c} が実数であれば、媒質の屈折率 n に等しい (式 (40) の $\mathbf{c}_m = 0$ の場合)。 \mathbf{c} が複素数の場合は次のように複素屈折率を定義するのが便利である。

$$n + i\mathbf{k} \equiv \sqrt{1 + \mathbf{c}} \quad (50)$$

複素電気感受率との関係は

$$n^2 - \mathbf{k}^2 = 1 + \mathbf{c}' \quad (51)$$

$$2n\mathbf{k} = \mathbf{c}'' \quad (52)$$

である。式 (49) (50) を電場の式 (45) に代入すると、

$$E(z, t) = E_0 \exp[ik_0(n + i\mathbf{k})z - i\omega t] = E_0 \exp\left(-\frac{\mathbf{a}}{2}z\right) \exp[i(k'z - \omega t)] \quad (53)$$

となる。ここで

$$\mathbf{a} = 2k_0\mathbf{k} = \frac{k_0\mathbf{c}''}{n} \quad (54)$$

$$k' = k_0 n \quad (55)$$

と定義した。式(53)は、波数 k' の平面波の振幅が、減衰定数 $a/2$ で指数関数的に減衰する平面電磁波を表している。この電磁波の強度は、式(44)より $z=0$ における強度を I_0 として

$$I(z) = \frac{1}{2} c n \mathbf{e}_0 E^2(z) = I_0 e^{-az} \quad (56)$$

と表される。これは有名な**ランベルト・ベールの法則** (Lambert-Beer law) であり、減衰定数 a は**吸収係数**と呼ばれる。

式(56)は微分方程式

$$\frac{dI(z)}{dz} = -aI(z) \quad (57)$$

の解となっているが、これをエネルギー保存則から導いてみよう。媒質中のある単位体積を考え、電場が分極になす単位時間あたりの仕事(式(22)の右辺第3項)の時間平均を計算すると*、式(44)(54)より

$$\overline{\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[E_0 \cdot (-i\omega) \mathbf{e}_0 c E_0] = \frac{1}{2} \mathbf{e}_0 c k_0 c'' E_0^2 = aI \quad (58)$$

となり、その場所における電磁波の強度に吸収係数をかけたものになる。電磁場の進行方向の長さが dz 、断面積が単位面積の微小体積を考えると、この微小体積から失われる電磁波のエネルギーは $aI dz$ 。微小体積に流入するエネルギーは $I(z)$ 、流出するエネルギーは $I(z+dz)$ 。したがって、エネルギー保存則より

$$I(z) - I(z+dz) = aI(z) dz \quad (58)$$

が成り立つ。この式の両辺を dz で割り、 $dz \rightarrow 0$ の極限をとれば式(57)に帰着する。このように電磁場の減衰は、分極の位相が電磁場の位相から遅れる(つまり $c'' > 0$ となる)ことにより、分極が電場から一方的に仕事を受けることによって生じる。次章で説明するように、ミクロな視点では、分極を構成する個々の電気双極子が電磁輻射によってそのエネルギーを散逸することが減衰の起源である。

最後に、散乱断面積の概念を導入しよう。散乱体が空間密度 N で存在している媒質中を電磁波が伝播している状況を考える。一つの散乱体が散乱するパワーは入射強度に比例し、

$$P_s = sI \quad (60)$$

* $A(t), B(t)$ が同じ角周波数 ω で正弦的に時間変化する物理量の複素表示であるとき、つまり $A(t) = A e^{-i\omega t}$ 、 $B(t) = B e^{-i\omega t}$ (A, B は一般に複素数) のとき、実際の物理量を表す実部同士の積の時間平均は $\overline{\operatorname{Re}[A(t)] \operatorname{Re}[B(t)]} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[AB^*]$ で与えられる。

と表せるとする。図2のように電磁場の進行方向の長さが dz 、断面積が単位面積の微小体積を考えると、この微小体積の中には Ndz 個の散乱体が存在しているので、散乱される全パワーは $P_s Ndz$ である。したがって、エネルギー保存則より、

$$I(z) - I(z + dz) = P_s Ndz = \mathbf{s}I(z)Ndz \quad (61)$$

が成り立つ。両辺を dz で割り、 $dz \rightarrow 0$ の極限をとれば、式(57)と同じ形の微分方程式

$$\frac{dI(z)}{dz} = -\mathbf{a}I(z) \quad (62)$$

$$\mathbf{a} = N\mathbf{s} \quad (63)$$

が得られる。この結果は次のような解釈でも導くことができる。入射方向から見た散乱体の面積を \mathbf{s} とし、この面積にあたった電磁波は完全に吸収もしくは散乱されると考える。図2の微小体積に含まれる散乱体によって覆われる総面積は $N\mathbf{s}dz$ であり、これが電磁波が dz 進んだ際に減衰する割合となる。したがって

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{I(z + dz) - I(z)}{I} = N\mathbf{s}dz \quad (64)$$

が成り立つが、これは式(61)と同じである。したがって、入射強度に対する散乱パワーの比 $\mathbf{s} = P_s / I$ は**散乱断面積**という物理的意味を持つ。媒質が空間密度 N の気体原子の場合、原子1個あたりの複素電気感受率を $c_A = c'_A + ic''_A$ とすれば、式(54)より、原子気体の吸収係数は $\mathbf{a} = k_0 N c''_A$ (屈折率は $n=1$ と近似) と表せるので、これを式(63)と比較すれば**原子1個あたりの散乱断面積**は、

$$\mathbf{s}_A = k_0 c''_A \quad (65)$$

と表せる。この関係式は次章以降で用いる。

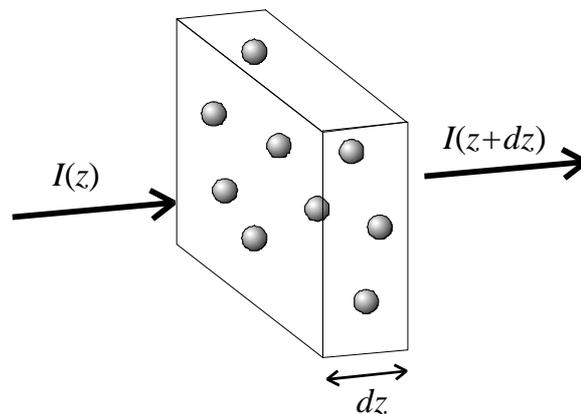


図2 散乱体による電磁場の減衰

第2章 電磁波の放射

1. マクスウェル方程式の一般解

E-B 対応のマクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{e}_0} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{m}_0 \left(\mathbf{j} + \mathbf{e}_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (4)$$

の一般解を求めたい。式(3)より、磁場には湧き出しはないので、あるベクトルポテンシャルを用いて

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5)$$

と表現できる。恒等式 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ より、式(3)は自動的に満たされるので、今後考える必要はない。式(5)を式(2)に代入すると、

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (6)$$

となるが、これは、 $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$ の回転がゼロであり、あるスカラーポテンシャルの勾配で表現できることを意味する。したがって、電場は

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla f \quad (7)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla f - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (8)$$

と表現できる。恒等式 $\nabla \times (\nabla f) = 0$ より、式(2)は自動的に満たされるので、今後は考える必要はない。 f と \mathbf{A} をまとめて電磁ポテンシャルと呼ぶ。式(8)を式(1)に代入すると、

$$-\nabla^2 f - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{e}_0} \quad (9)$$

同様に、式(5) (8)を式(4)に代入すると、

$$\nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = \mathbf{m}_0 \mathbf{j} \quad (10)$$

残念ながら、式(9) (10)はスカラーポテンシャル f とベクトルポテンシャル \mathbf{A} が入り混じり、解きやすい形をしていない。もし、式(10)の左辺第一項の勾配の中身(スカラー関数)がゼロ、つまり

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = 0 \quad (11)$$

であったとすると、これを式(9)(10)に代入して、

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \right) \mathbf{f} = -\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{e}_0} \quad (12)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\mathbf{m}_0 \mathbf{j} \quad (13)$$

という f と A のダランベール方程式が得られる。これらは4元電流 $\mathbf{j} \equiv (c\mathbf{r}, j_x, j_y, j_z)$ 、4元ポテンシャル $A \equiv (f/c, A_x, A_y, A_z)$ 、ダランベルシヤン $\equiv \nabla^2 - \partial^2 / \partial (ct)^2$ を用いて

$A + \mathbf{m}_0 \mathbf{j} = 0$ とまとめて表現することができる。式(11)の条件はローレンツ条件と呼ばれるが、この条件を満たす f 、 A が常に存在することを以下に示す。

ある電磁ポテンシャル f 、 A が式(9)(10)を満たす(つまりマクスウェル方程式を満たす)が残念ながらローレンツ条件は満たしていないとする。つまり

$$f \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \neq 0 \quad (14)$$

とする。ここで、電磁ポテンシャルをあるスカラー関数 c を用いて次のように変換する

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla c \quad (15)$$

$$\mathbf{f}' = \mathbf{f} - \frac{\partial c}{\partial t} \quad (16)$$

式(15)を式(5)に代入すると、恒等式 $\nabla \times (\nabla c) = 0$ より

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla c) = \nabla \times \mathbf{A} \quad (17)$$

となり変換前と同じ磁場を表現する。今度は式(15)(16)を式(8)に代入すると、

$$\mathbf{E} = -\nabla \mathbf{f}' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla \mathbf{f} + \nabla \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \frac{\partial c}{\partial t} = -\nabla \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (18)$$

となり、これも変換前と同じ電場を表現する。このように電磁場を不変に保つ変換をゲージ変換と呼ぶ。さて、ゲージ変換後の電磁ポテンシャルをローレンツ条件の式の左辺に代入すると、

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla c) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{f} + \frac{\partial c}{\partial t} \right) = f + \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) c \quad (19)$$

これがゼロであればゲージ変換後の電磁ポテンシャルはローレンツ条件を満たす。そのような c は次のダランベール方程式を満たさなければならない

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) c = -f \quad (20)$$

後に示すように、 f が任意のスカラー関数でも、このダランベール方程式は常に解を持つ。

したがって、ローレンツ条件を満たす電磁ポテンシャルを必ず求めることができる。今後は最初から電磁ポテンシャルがローレンツ条件を満たすとし、式(12)(13)を議論の出発点とする。

ダランベール方程式のグリーン関数(伝搬関数)で物理的に意味のある遅延伝搬関数

$$G_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi r} \mathbf{d}(t - r/c) \quad (21)$$

であるから、式(12)(13)より電磁ポテンシャルの一般解は

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (22)$$

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (23)$$

である。ちなみに、これらはローレンツ条件を自動的に満たしている。式(22)(23)は、電荷密度、電流密度が時間に依存しない場合、それぞれ静電磁場におけるクーロンポテンシャル、ベクトルポテンシャルに帰着する。静電磁場との違いは、電荷密度、電流密度の時刻が遅延している点のみである。ファインマン物理学では、式(22)(23)を導出した後に次のように述べている。「われわれはマクスウェル方程式を解いた。どんな電荷、電流があっても、上の積分によりポテンシャルが直接に分かり、微分して場が求められる。これでマクスウェル方程式は終わりである。(中略)電磁気の世界の中心はここにある。電気、磁気、光の完全な理論 動く電荷の作る場の完全な記述など それはすべてここにある。力と美の点で完成された、マクスウェルのうち建てた建造物がここにある。これは恐らく物理学の最大の成功の一つである。その重要性を記憶するために、それをまとめて、きれいな額に入れておこう。我々もファインマンにならって、電磁気学の全てを額に入れておこう(\mathbf{r} を1、 \mathbf{r}' を2、 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r_{12}$ とおいた)。

マクスウェル方程式：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

その解：

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{f}(\mathbf{1}, t) &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\mathbf{r}(2, t - r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2 \\ \mathbf{A}(\mathbf{1}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(2, t - r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2 \end{aligned}$$

2. 電磁波の放射

このマクスウェル方程式の解を使って、原点付近で振動する電気双極子が放射する電磁場を求めてみよう。振動する電荷 q の位置ベクトルを $x(t)$ とし、原点には $-q$ の動かない電荷が置かれているとする。この電気双極子は

$$p(t) = qx(t) \quad (24)$$

である。この電気双極子が作る電流密度は、電荷の電荷密度を ρ とすれば

$$j(r, t) = \dot{x}(t)\rho(r, t) \quad (25)$$

である。原点から十分離れた観測地点では、式 (23) の分母の $|r - r'|$ は、単に原点からの距離 r で近似でき、これを定数とみなして積分の外に出すことができる。また、振動する電荷の速度が光速に比べ十分遅ければ、電荷内の遅延時間の違いは無視し、遅延時間を一律に r/c と置くことができる。そのような場合は、式 (23) の積分を実行すると

$$\begin{aligned} A(r, t) &\cong \frac{m_0}{4\pi} \int \frac{j(r', t - r/c)}{r} dV' \\ &= \frac{m_0}{4\pi r} \dot{x}(t - r/c) \int \rho(r', t - r/c) dV' \\ &= \frac{m_0}{4\pi} \frac{q\dot{x}(t - r/c)}{r} \\ &= \frac{m_0}{4\pi} \frac{\dot{p}(t - r/c)}{r} \end{aligned} \quad (26)$$

が得られる。このベクトルポテンシャルの回転が磁場であるから、 e_r を r 方向の単位ベクトルとして

$$B = \nabla \times A = \frac{m_0}{4\pi} \frac{[\dot{p} + (r/c)\ddot{p}]_{t-r/c} \times e_r}{r^2} \quad (27)$$

となる ($[\]_{t-r/c}$ は遅延した時刻 $t - r/c$ での値をとることを意味する)。右辺第一項

$$\frac{m_0}{4\pi} \frac{[\dot{p}]_{t-r/c} \times r}{r^3} = \frac{m_0}{4\pi} \int \frac{j(r', t - r/c) \times e_r}{r^2} dV' \quad (28)$$

は、電流密度が時間的に変化しなければ、原点付近にある電流密度がつくる静磁場を求めるビオ・サバルの公式に他ならない。右辺第二項

$$\frac{m_0}{4\pi c} \frac{[\ddot{p}]_{t-r/c} \times e_r}{r} \quad (29)$$

は輻射を表す項である。以降、観測点は十分遠方にあり、第二項の磁場 (輻射) のみを考える。電気双極子が角周波数 ω で単振動している場合、 $\ddot{p} = -\omega^2 p$ であるから、

$$B = -\frac{m_0 \omega^2}{4\pi c} \frac{[p]_{t-r/c} \times e_r}{r} \quad (30)$$

この振動する磁場の振幅は、電荷の単振動の振幅を x_0 とすれば

$$B_0 = \frac{m_0 q x_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi r c} \quad (31)$$

となる。ここで \mathbf{q} は電荷の振動方向と観測点 \mathbf{r} の方向のなす角である。この振動する磁場が電磁波を形成していると考えれば、振動磁場に付随する振動電場の振幅は、マクスウェル方程式より得られる関係式 $E = cB$ より

$$E_0 = \frac{m_0 q x_0 \omega^2 \sin \mathbf{q}}{4pr} = \frac{q x_0 \omega^2 \sin \mathbf{q}}{4pe_0 c^2 r} \quad (32)$$

と表せる。この振動する双極子が電磁波として放出するパワーは、電磁波のエネルギー流を表す（真空中での）ポインティングベクトルの大きさの時間平均

$$\bar{S} = \frac{1}{2m_0} E_0 B_0 = \frac{q^2 x_0^2 \omega^4}{32p^2 e_0 c^3 r^2} \sin^2 \mathbf{q} \quad (33)$$

を全立体角にわたって積分し、

$$P = \int \bar{S} d\Omega = \frac{q^2 x_0^2 \omega^4}{12pe_0 c^3} \quad (34)$$

となる*。調和振動子のエネルギーは $U = \frac{1}{2} m_e \omega^2 x_0^2$ であるから、エネルギー減衰レート Γ は

$$\Gamma = \frac{P}{U} = \frac{q^2 \omega^2}{6pe_0 m_e c^3} \quad (35)$$

で与えられる。

3. 自己力 (発散の困難と繰り込み)

運動する半径 a の球状の電荷が自分自身に及ぼす自己力を式 (22)(23) を用いて計算すると、電荷の速度は光速に比べて十分小さく、 $a \rightarrow 0$ の極限で

$$\mathbf{F} = -\frac{m_0 q^2}{6pa} \dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{m_0 q^2}{6pc} \ddot{\mathbf{x}}(t) \quad (36)$$

となることが知られている。この式は $a \rightarrow 0$ の極限での式ではあるが、右辺第一項は $a \rightarrow 0$ の極限で発散する。電荷の“裸”の質量を m_0 とすると、ニュートンの運動方程式は

$$m_0 \ddot{\mathbf{x}}(t) = -\frac{m_0 q^2}{6pa} \dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{m_0 q^2}{6pc} \ddot{\mathbf{x}}(t) \quad (37)$$

となるが、ここで右辺第一項を左辺に移項し、電荷の“繰り込まれた”質量を

$$m = m_0 + \frac{m_0 q^2}{6pa} \quad (38)$$

と定義すれば、運動方程式は

$$m \ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{m_0 q^2}{6pc} \ddot{\mathbf{x}}(t) \equiv \mathbf{F}_{\text{rad}} \quad (39)$$

となる。つまり、繰り込まれた質量を持つ電荷が受ける自己力は、実効的に式 (37) の右

* 単振動ではなく、一般の運動の場合、放射エネルギーは $P = \frac{m_0}{6pc} [\dot{\mathbf{p}}]_{t-r/c}^2$ で与えられる。

辺第二項のみと考えることができる。特に電荷が単振動している場合、 $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$ と表せるので、

$$F_{\text{rad}} = -\frac{m_0 q^2 \omega^2}{6\pi c} \dot{x}(t) \quad (40)$$

となり、自己力は速度に比例する減衰力として働く。この減衰力が運動する電荷になす単位時間あたりの仕事の時間平均は、電荷の単振動の振幅を x_0 とすれば、

$$\overline{F_{\text{rad}} \cdot \dot{x}(t)} = -\frac{m_0 q^2 \omega^2}{6\pi c} \overline{\dot{x}^2(t)} = -\frac{m_0 q^2 x_0^2 \omega^4}{12\pi c} \left(= -\frac{q^2 x_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \right) \quad (41)$$

となる。これは、式(34)の振動する電荷から放射される電磁波のパワーと等しい大きさを持つ。つまり、自己力を考えることによって初めて輻射場と運動する電荷のエネルギー保存則が成立する。ファインマンはノーベル賞講演の中で、自己力の問題を次のように述べている。「わたしは大学院に進み、いつしか、電子は自身に作用をしないというアイデアに間違いのあることを悟ったのです。電子を加速すると輻射を出しますから、その分のエネルギーだけ余分の仕事をしてやらなければなりません。輻射の抵抗というものが生ずるのでして、この力に抗して仕事をする必要があるわけです。当時この力の起源は、ローレンツに従って、電子の自身への作用にあるとされていました。自身への作用を計算してみますと、その第一項は一種の慣性を与えます（相対論的には不満足な点はありますけれども）、この慣性的な項は点電荷に対しては無限大です。しかし第二項はエネルギーの損失の速さを与えるもので、これは点電荷については輻射されるエネルギーの量から求めた損失に正しく一致いたします。それゆえ、輻射抵抗の力はエネルギー保存のためには絶対に必要なのに、電荷が自身に作用しないとしたら消失してしまうのでした。」(R. P. ファインマン著、江沢洋訳「物理法則はいかにして発見されたか」より。) この古典電磁気学における発散の困難は、量子電気力学(QED)にも受け継がれ、繰り込み理論*によって表面上は回避されているが、現在まで解決されていない。しかしながら、繰り込み理論を用いたQEDはラムシフトや電子の異常磁気モーメントの実験値を極めてよく再現し、現在実験的に最も高い(10¹²)精度で検証された理論となっている**。

*観測される電子の質量、電荷を計算結果、つまり「裸の」質量、電荷と輻射補正との和と等しいと置くことによって、無限大を取り除く手法。1947年、水素原子のラムシフトを説明するために朝永振一郎、ジュリアン・シュウィンガー、リチャード・ファインマンによって独立に提唱された。この3名は1965年にノーベル物理学賞を受賞する。

** 現在はむしろQEDが予測する電子の異常磁気モーメントの値が実験値と等しいとおくことによって超微細構造定数 $a \equiv e^2 / 4\pi \epsilon_0 \hbar c$ を決定している。2006年、ハーバード大学のG.ガブリエルスらが測定した電子のg因子は $g/2 = 1.001\,159\,652\,180\,85(76)$ 。この値がQEDの計算結果と等しいとおくことによって、 $a^{-1} = 137.035\,999\,070(98)$ と定められた。

第3章 ローレンツモデル

1. 電磁輻射 (リエナール・ヴィーヘルトポテンシャル)

ファインマン物理学 (光熱波動) の第3章「電磁輻射」には、運動する点電荷がつくる電場 E が天下りの次に次式で与えられている。

$$E = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} + \frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{e}_{r'} \right] \quad (1)$$

r' は遅延時刻 $t - r'/c$ における電荷と観測点 P との距離を意味する。右辺第3項目が電磁輻射を表す。この式は1950年頃、ファインマンによってシンクロトロン放射を考える良い方法としてある講義でのべられたものだが、基本的にはリエナールとヴィーヘルトがそれぞれ1898年と1900年に導出したものである。電荷が原点付近で x 軸方向にのみ運動している場合、 x 軸からの角度が q の観測点における電場の大きさは、時刻 t における点電荷の加速度を $a(t)$ として

$$E(t) = -\frac{qa(t - r/c) \sin q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \quad (2)$$

と表される。特に、電荷 $-e$ の電子が振幅 x_0 、角周波数 w で単振動している場合、電場の振幅 E_0 は

$$E_0 = \frac{ex_0 w^2 \sin q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \quad (3)$$

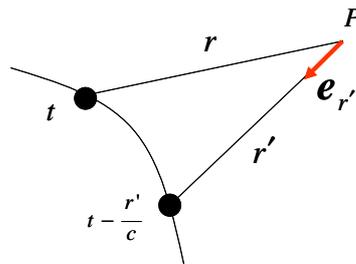


図1 加速度運動する点電荷

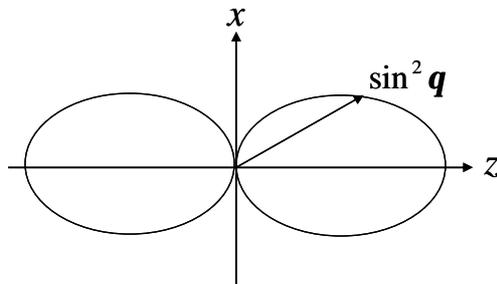


図2 加速度運動する点電荷の電磁波放射パターン

となる。この振動する電子が放出するエネルギーは、第1章の式(44)の電磁波の強度

$$I = \frac{1}{2} |S| = \frac{e^2 x_0^2 \omega^4}{32 \pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \quad (4)$$

を全立体角にわたって積分し、

$$P = \int I d\Omega = \frac{e^2 x_0^2 \omega^4}{12 \pi \epsilon_0 c^3} \quad (5)$$

となる。調和振動子のエネルギーは $U = \frac{1}{2} m_e \omega^2 x_0^2$ であるから、エネルギー減衰レート Γ は

$$\Gamma = \frac{P}{U} = \frac{e^2 \omega^2}{6 \pi \epsilon_0 m_e c^3} \quad (6)$$

で与えられる。例えば波長 $1 \mu\text{m}$ の輻射に対しては $\Gamma = 3.53 \text{ MHz}$ である。

2. 原子の調和振動子モデル (ローレンツモデル)

図3に示すように、電荷 $+e$ ($e > 0$) の原子核の周りに電荷 $-e$ の電子雲が束縛されている原子を考える。電子雲に働く復元力は、変位 x に比例するものとする(調和振動子モデル)。この原子に x 方向に直線偏光した角周波数 ω の平面電磁波

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{x} E(z, t) = \hat{x} E_0 \exp[i(kz - \omega t)] \quad (7)$$

を照射したとすると、原子は原点 ($z = 0$) にあるとすると、変位 $x(t)$ の運動方程式は、

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2g \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m_e} E_0 e^{-i\omega t} \quad (8)$$

となる。ただし、 $2g = \Gamma$ は前節で求めたエネルギー減衰レートである。 $x(t) = x(\omega) e^{-i\omega t}$ とおいて式(8)に代入し、 $x(t)$ の定常的な解を求めると、

$$x(\omega) = \frac{e}{m_e} \cdot \frac{E_0}{\omega^2 + 2ig\omega - \omega_0^2} \quad (9)$$

となる。この原子の電気双極子モーメントは

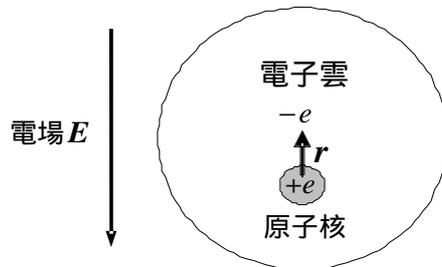


図3 原子の調和振動子モデル

$$p_0 e^{-i\omega t} = -ex(t) = e_0 \left[\frac{e^2}{e_0 m_e} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2ig\omega} \right] E_0 e^{-i\omega t} \quad (10)$$

であるので、この原子 1 個の複素電気感受率は、

$$c_A(\omega) = \frac{e^2}{e_0 m_e} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2ig\omega} \quad (11)$$

と求められる。特に共鳴に近い場合 ($\omega \approx \omega_0$)

$$c_A(\omega) = \frac{e^2}{2m_e e_0 \omega_0} \cdot \frac{1}{\omega_0 - \omega - ig} \quad (12)$$

と近似でき、このとき、複素電気感受率の実部と虚部はそれぞれ

$$\text{Re}[c_A(\omega)] \equiv c'_A(\omega) = -\frac{e^2}{2m_e e_0 \omega_0} \cdot \frac{d}{d^2 + g^2} \quad (13)$$

$$\text{Im}[c_A(\omega)] \equiv c''_A(\omega) = \frac{e^2}{2m_e e_0 \omega_0} \cdot \frac{g}{d^2 + g^2} \quad (14)$$

と表される。ここで電磁波の離調を $d = \omega - \omega_0$ とおいた。図 4 に複素電気感受率の離調依存性を示す。このように、電磁場の吸収を表す c''_A は半値半幅 g (半値全幅 $2g = \Gamma$) のローレンツ関数となる。第一章の式 (65) より、この原子の共鳴周波数における散乱断面積 $s_0 = kc''_A(\omega_0)$ を計算すると、式 (14) および、式 (6) を用いて

$$s_0 = kc''_A(\omega_0) = 6p\lambda^2 \quad (15)$$

となる。つまり、原子の共鳴断面積は、入射している電磁波の波長のみ依存する。この極めてシンプルな結果は、量子論的 2 準位原子においても正しく、覚える価値がある。

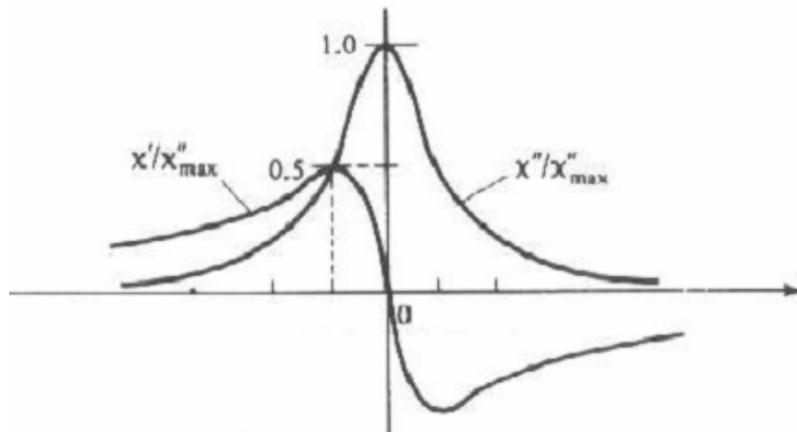


図 4 原子の複素電気感受率の実部と虚部の離調依存性

3. レイリー散乱とトムソン散乱

電磁場の周波数が原子の共鳴周波数に比べ十分小さいか、または十分大きい場合、原子の複素電気感受率を表す式(11)の分母の減衰項は無視することができる ($g \ll \omega, \omega_0$ とする)。このとき、原子一個がつくる電気双極子の振幅は

$$p_0 = ex(\omega) = \left[\frac{e^2}{m_e} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right] E_0 \quad (16)$$

となり、この原子が放射する電磁波のパワーは、式(5)より $p_0 = ex_0$ であるから

$$\begin{aligned} P &= \frac{p_0^2 \omega^4}{12pe_0 c^3} = \frac{\omega^4}{12pe_0 c^3} \left[\frac{e^2}{m_e} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right]^2 E_0^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} e_0 c E_0^2 \right) \frac{8pr_0^2}{3} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \end{aligned} \quad (17)$$

となる。ここで、

$$r_0 = \frac{e^2}{4pe_0 m_e c^2} \approx 2.82 \times 10^{-15} \text{ m} \quad (18)$$

は古典電子半径と呼ばれる。第一章の式(60)にあるように、原子の散乱断面積 s は、入射している電磁波のパワー $I = e_0 c E_0^2 / 2$ に対する放射する電磁波(散乱波)のパワーの比 ($s = P/I$) であるから、

$$s = \frac{P}{I} = \frac{8pr_0^2}{3} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (19)$$

となる。 $\omega \ll \omega_0$ の場合、式(19)の分母の ω^2 は無視することができるので、

$$s_{\text{Rayleigh}} = \frac{8pr_0^2}{3} \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \quad (20)$$

となり、入射している電磁場の周波数の4乗に比例する。このような散乱は**レイリー散乱**と呼ばれ、空の青さの起源となっている。逆に $\omega \gg \omega_0$ の場合、式(19)の分母の ω_0^2 は無視することができるので、

$$s_{\text{Thomson}} = \frac{8pr_0^2}{3} \quad (19)$$

となり、今度は入射している電磁波の波長に依存せず一定の値をとる。このような散乱は**トムソン散乱**と呼ばれる。

ここで一つのパラドックスを提示したい。ここでは散乱断面積を式(11)の分母の減衰項 $2ig\omega$ を無視、つまり c_A の虚部を無視し、 c_A を実数と考えて導出されている。しかし、第一章の式(65)によると、 c_A が実数であれば (c_A の虚部がなければ) 散乱断面積はゼロとなる。 c_A が実数のとき電磁波は散乱されるのか、されないのか、どちらであろう？

第4章 2準位原子と電磁波との相互作用

1. 相互作用表示と回転波近似

エネルギー差が $\hbar\omega_0$ の2準位系(基底準位が $|1\rangle$ 、励起準位が $|2\rangle$)に、角周波数 ω で時間的に変動する摂動 $V \cos \omega t$ が加えられたときの時間発展を考える。エネルギーの基準を基底準位にとると、シュレーディンガー表示におけるハミルトニアンは

$$H_S = \hbar\omega_0 |2\rangle\langle 2| + V \cos \omega t \quad (1)$$

与えられ、状態ベクトル $|\Psi(t)\rangle_S = c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle$ の時間発展はシュレーディンガー方程式

$$H_S |\Psi(t)\rangle_S = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle_S \quad (2)$$

に従う。この式に左から $\langle 1|$ または $\langle 2|$ をかけることにより、 $c_1(t), c_2(t)$ の満たす連立微分方程式が得られる。

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & V_{12} \cos \omega t \\ V_{21} \cos \omega t & \hbar\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

ここで $V_{ij} \equiv \langle i|V|j\rangle$ と定義し、摂動の対角成分はゼロ ($V_{11} = V_{22} = 0$) と仮定した。式(3)はハミルトニアン行列が時間に依存し、一般に解析的に解くことはできず、近似をするにも見通しが悪い。そこで、ハミルトニアンから時間依存性を極力取り除くため、相互作用表示に移行する。まず、次のユニタリー変換を定義する。

$$U \equiv \exp\left(-i \frac{H_0}{\hbar} t\right) \quad (4)$$

$$H_0 \equiv \hbar\omega |2\rangle\langle 2| \quad (5)$$

式(5)で定義した H_0 は、シュレーディンガー表示のハミルトニアンの無摂動部分 ($\hbar\omega_0 |2\rangle\langle 2|$) の ω_0 (原子の固有周波数) を、 ω (摂動の角周波数) で置き換えたものであり、通常の相互作用表示の処方箋には従っていないことに注意する。このとき、相互作用表示におけるハミルトニアンは

$$H_1 = U^\dagger (H_S - H_0) U = -\mathbf{d} |2\rangle\langle 2| + (V_{12} |1\rangle\langle 2| e^{-i\omega t} + V_{21} |2\rangle\langle 1| e^{i\omega t}) \cos \omega t \quad (6)$$

と表せる。ここで、摂動周波数の固有周波数からの離調を $\mathbf{d} \equiv \omega - \omega_0$ と定義した。相互作用表示における状態ベクトルを $|\Psi(t)\rangle_1 = C_1(t)|1\rangle + C_2(t)|2\rangle$ は、相互作用表示のシュレーディンガー方程式

$$H_1 |\Psi(t)\rangle_1 = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle_1 \quad (7)$$

に従う。先程と同様に左から $\langle 1|$ または $\langle 2|$ をかけると、 $C_1(t), C_2(t)$ の連立微分方程式

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & V_{12}(1+e^{-2i\omega t}) \\ V_{21}(1+e^{2i\omega t}) & -2\hbar d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} \quad (8)$$

が得られる。摂動が共鳴条件に近く ($d \ll \omega_0$) かつその大きさが励起状態のエネルギーに比べて十分小さい場合 ($V \ll \hbar\omega_0$)、このハミルトニアン行列の非対角項に現れる $e^{\pm 2i\omega t}$ という因子は、 $C_1(t), C_2(t)$ が時間変化する典型的な周波数 (d や V/\hbar) に比べ極めて速く振動するので、その寄与は平均化され無視することができる。このとき、式 (8) は

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & V_{12} \\ V_{21} & -2\hbar d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} \quad (9)$$

と近似でき、ハミルトニアン行列から時間依存性を取り除くことができる。この速く振動する因子 $e^{\pm 2i\omega t}$ を無視する近似を**回転波近似** (RWA: Rotating-wave approximation) という。このとき、相互作用表示のハミルトニアンは実効的に

$$H_1 = -\hbar d |2\rangle\langle 2| + \frac{1}{2} (V_{12} |1\rangle\langle 2| + V_{21} |2\rangle\langle 1|) \quad (10)$$

と書き表すことができる。相互作用項の因子 $1/2$ は、 $\cos \omega t = (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2$ の $1/2$ から来ている。場の量子論の視点で言うなら、原子を励起 (光子を吸収) する相互作用と、原子を脱励起 (光子を放出) する相互作用には、(複素平面上で) 右回りか左回りかのどちらかの摂動しか寄与 (共鳴) しないのである。相互作用表示からシュレーディンガー表示に戻るには、

$$|\Psi(t)\rangle_S = U |\Psi(t)\rangle_1 = C_1(t) |1\rangle + C_2(t) e^{-i\omega t} |2\rangle \quad (11)$$

とすれば良い。

2. 2準位原子と電磁波との相互作用

基底状態 $|1\rangle$ と励起状態 $|2\rangle$ のエネルギー差が $\hbar\omega_0$ である 2 準位原子と、 x 軸方向に偏光した振幅 E_0 、角周波数 ω の電磁場との相互作用を考える。原子の位置での電場は

$$E(t) = \hat{x} E_0 \cos \omega t \quad (12)$$

と表される (E_0 は正の実数とする)。原子と電磁場の相互作用として、電気双極子相互作用を考える。原子の電気双極子モーメントを $d \equiv -er$ ($e > 0$) とすると、相互作用 (摂動) ハミルトニアンは、

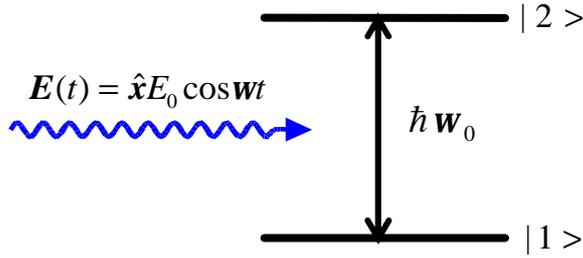


図1 2準位原子と電磁場との相互作用

$$V = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \quad (13)$$

で与えられる。シュレーディンガー表示における原子系のハミルトニアンは、

$$\hat{H}_S = \hbar \omega_0 |2\rangle\langle 2| - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} = \hbar \omega_0 |2\rangle\langle 2| - d_x E_0 \cos \omega t \quad (14)$$

となる。ここで $d_x = -ex$ は原子の電気双極子モーメントの x 成分である。原子が永久双極子モーメントを持たないならば、 $\langle 1|d_x|1\rangle = \langle 2|d_x|2\rangle = 0$ であり、式(14)は

$$\hat{H}_S = \hbar \omega_0 |2\rangle\langle 2| - dE_0 (|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|) \cos \omega t \quad (15)$$

と表現できる。ここで $d = \langle 1|d_x|2\rangle = \langle 2|d_x|1\rangle$ と定義した。以降、電磁波の角周波数は共鳴に近い ($|\mathbf{d}| \ll \omega_0$) とし、式(10)の回転波近似をした相互作用表示のハミルトニアンを用いて系の時間発展を考える。相互作用表示のハミルトニアンは

$$\hat{H}_I = -\hbar \mathbf{d} |2\rangle\langle 2| - \hbar \frac{\Omega}{2} (|2\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2|) \quad (16)$$

と表せる。ここで、**ラビ周波数**と呼ばれる次のパラメータを導入した。

$$\Omega \equiv \frac{dE_0}{\hbar} \quad (17)$$

これは、電磁場と原子の相互作用の大きさを周波数の次元で表すもので、極めて便利な量である。状態ベクトル $|\Psi(t)\rangle_I = C_1(t)|1\rangle + C_2(t)|2\rangle$ の係数 $C_1(t), C_2(t)$ の従う方程式は、式(15)のシュレーディンガー方程式より

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ \Omega & 2\mathbf{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} \quad (18)$$

と表される。

3. 1原子の電気双極子モーメントと複素電気感受率

2準位原子の状態ベクトルの時間発展を具体的に考える前に、2準位原子の双極子モーメントや電気感受率がどのように表現されるかを考えておく。ここでは状態ベクトルではなく、後の便宜のため密度行列 $\mathbf{r}(t) \equiv |\Psi(t)\rangle_{11}\langle\Psi(t)|$ を用いて表現する。密度行列の各要素は以下のように表せる。

$$\mathbf{r}_{11} = \langle 1 | \mathbf{r} | 1 \rangle = C_1(t)C_1^*(t) \quad (19)$$

$$\mathbf{r}_{12} = \langle 1 | \mathbf{r} | 2 \rangle = C_1(t)C_2^*(t) \quad (20)$$

$$\mathbf{r}_{21} = \langle 2 | \mathbf{r} | 1 \rangle = C_2(t)C_1^*(t) \quad (21)$$

$$\mathbf{r}_{22} = \langle 2 | \mathbf{r} | 2 \rangle = C_2(t)C_2^*(t) \quad (22)$$

原子の電気双極子モーメントの x 成分 d_x の期待値は、式 (11) を用いて、

$$\begin{aligned} P(t) &= {}_S\langle\Psi(t)|d_x|\Psi(t)\rangle_S \\ &= {}_1\langle\Psi(t)|U^+d_xU|\Psi(t)\rangle_1 \\ &= {}_1\langle\Psi(t)|d[|2\rangle\langle 1|\exp(i\omega t)+|1\rangle\langle 2|\exp(-i\omega t)]|\Psi(t)\rangle_1 \quad (23) \\ &= d[\mathbf{r}_{12}\exp(i\omega t)+\mathbf{r}_{21}\exp(-i\omega t)] \\ &= 2d(\operatorname{Re}[\mathbf{r}_{21}]\cos\omega t+\operatorname{Im}[\mathbf{r}_{21}]\sin\omega t) \end{aligned}$$

と表せる。電場と分極の複素表示の関係式 (第1章の式(46)もしくは(48)) より、原子1個の複素電気感受率 c_A は

$$c_A = \frac{1}{e_0} \frac{P(t)\text{の}\exp(-i\omega_L t)\text{成分}}{E(t)\text{の}\exp(-i\omega_L t)\text{成分}} = \frac{2d\mathbf{r}_{21}}{e_0 E_0} \quad (24)$$

と求められる。我々の最終目標は、 \mathbf{r}_{21} の定常解から c_A の具体形を求めることである。

4. ラビ振動とフェルミの黄金則

式(18)の連立微分方程式は、容易に解くことができる。初期条件 $C_1(0)=1$, $C_2(0)=0$ における $C_2(t)$ 解は

$$C_2(t) = i \frac{\Omega}{\Omega'} \sin \frac{\Omega'}{2} t \quad (25)$$

と周期的な時間変化 (ラビ振動) をする。ここで一般化ラビ周波数を

$$\Omega' \equiv \sqrt{\Omega^2 + d^2} \quad (26)$$

と定義した。励起状態の存在確率 $\mathbf{r}_{22} = C_2 C_2^*$ は

$$\mathbf{r}_{22} = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + d^2} \sin^2 \frac{\Omega'}{2} t = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + d^2} \frac{1 - \cos \Omega' t}{2} \quad (27)$$

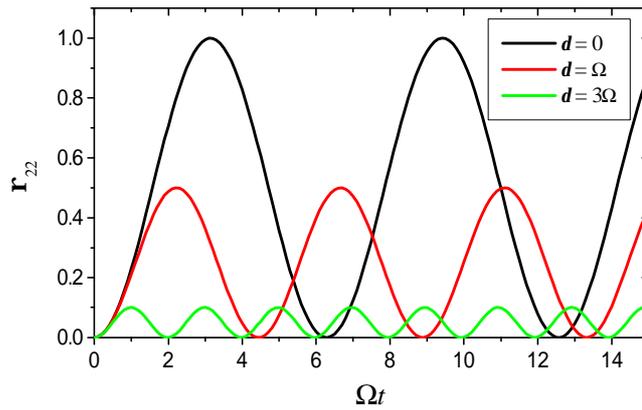


図2 ラビ振動 (r_{22}) の離調依存性

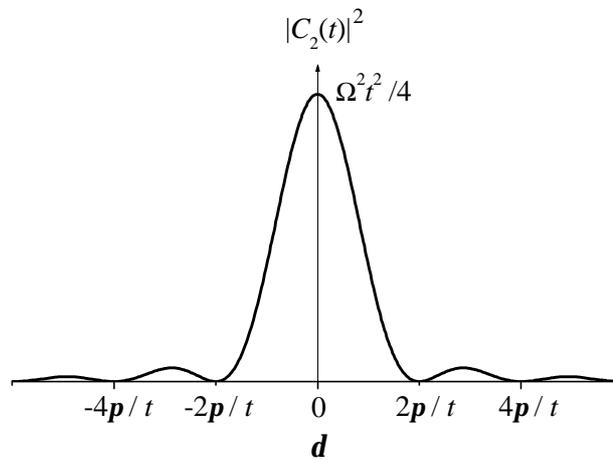


図3 励起状態の存在確率の離調依存性

となり、図2に示すように一般化ラビ周波数 Ω' で振動し、その振幅は離調を大きくすると減少していく。

電磁波の強度が弱い極限 ($\Omega \rightarrow 0$) では、励起状態の存在確率を表す式 (27) は

$$|C_2(t)|^2 = \Omega^2 \frac{\sin^2(dt/2)}{d^2} \quad (28)$$

と表され、図3に示すように $d=0$ に鋭いピークを持つ。相互作用時間を t とすると、その幅は t に反比例し、ピークの高さは t^2 に比例する。よって、デルタ関数を用いて近似的に

$$|C_2(t)|^2 \cong \frac{P}{2} \Omega^2 d(w-w_0)t \quad (29)$$

と表現できる*。このように励起状態の存在確率は相互作用時間 t に比例する。したがって、単位時間当たりの遷移レート R は、式 (28) を t で割り

* 積分公式 $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \frac{1}{p}$ を利用した。

$$R = |C_2(t)|^2 / t = \frac{\mathbf{p}}{2} \Omega^2 \mathbf{d}(\mathbf{w}_L - \mathbf{w}_A) = \frac{2\mathbf{p}}{\hbar^2} \left| \frac{\langle 2 | -d_x E_0 | 1 \rangle}{2} \right|^2 \mathbf{d}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0) \quad (30)$$

と表せる。これは**フェルミの黄金則**に他ならない。遷移モーメントについての因子 1/2 は回転波近似によるものである。摂動が時間に依存しない場合は、この因子 1/2 はつかず、その代わり終状態と初状態のエネルギーが同じでなければ遷移は起きない。

5. 光ブロッホ方程式

状態ベクトルの時間発展が純粹に式(18)の微分方程式に従うとすると、最初に励起状態にあった原子は、いつまでの励起状態に居続けることになる。しかし実際は、励起状態の原子は単位時間あたり $\Gamma \equiv 2g$ の確率で自然放出により基底状態に緩和する。この効果を現象論的に取り入れるため、 $C_2(t)$ の微分方程式に、減衰項 $-gC_2(t)$ を付け加える。

$$\frac{dC_2(t)}{dt} = i \frac{\Omega}{2} C_1(t) - (\mathbf{g} - i\mathbf{d})C_2(t) \quad (31)$$

この式より、励起状態の存在確率である \mathbf{r}_{22} の時間微分を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_{22}}{dt} &= \frac{dC_2(t)}{dt} C_2^*(t) + C_2(t) \frac{dC_2^*(t)}{dt} \\ &= -2\mathbf{g}\mathbf{r}_{22} - i \frac{\Omega}{2} (\mathbf{r}_{21} - \mathbf{r}_{12}) \\ &= -\Gamma \mathbf{r}_{22} + \Omega \text{Im}(\mathbf{r}_{21}) \end{aligned} \quad (32)$$

このように、減衰項 $-\Gamma \mathbf{r}_{22}$ が表れる。同様に \mathbf{r}_{12} の時間微分を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathbf{r}}_{12}}{dt} &= \frac{dC_1(t)}{dt} C_2^*(t) + C_1(t) \frac{dC_2^*(t)}{dt} \\ &= (-i\mathbf{d} - \mathbf{g})\tilde{\mathbf{r}}_{12} + i \frac{\Omega}{2} (\mathbf{r}_{22} - \mathbf{r}_{11}) \end{aligned} \quad (33)$$

となる。 \mathbf{r}_{12} の減衰項 $-\mathbf{g}\mathbf{r}_{12}$ の係数が \mathbf{r}_{22} の減衰項 $-\Gamma \mathbf{d}_{22}$ の半分 ($\mathbf{g} = \Gamma/2$) であることは重要である。 \mathbf{r}_{21} の時間微分は、 $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_{12}^*$ より式(33)の複素共役である。

$$\frac{d\mathbf{r}_{21}}{dt} = (i\mathbf{d} - \mathbf{g})\mathbf{r}_{21} - i \frac{\Omega}{2} (\mathbf{r}_{22} - \mathbf{r}_{11}) \quad (34)$$

\mathbf{r}_{11} の時間微分を考えるときは、注意が必要である。式(18)より素直に計算すれば

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}_{11}}{dt} &= \frac{dC_1(t)}{dt} C_1^*(t) + C_1(t) \frac{dC_1^*(t)}{dt} \\ &= -i \frac{\Omega}{2} (\tilde{\mathbf{r}}_{12} - \tilde{\mathbf{r}}_{21})\end{aligned}\quad (35)$$

となる．しかし，確率の保存則 $\mathbf{r}_{11} + \mathbf{r}_{22} = 1$ より、

$$\frac{d\mathbf{r}_{11}}{dt} = -\frac{d\mathbf{r}_{22}}{dt}\quad (36)$$

が成立していなければならない．そこで、自然放出による励起状態から基底状態へ確率の移動を表す項 $\Gamma \mathbf{r}_{22}$ を式 (35) に付け加える。

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}_{11}}{dt} &= \Gamma \mathbf{r}_{22} - i \frac{\Omega}{2} (\tilde{\mathbf{r}}_{12} - \tilde{\mathbf{r}}_{21}) \\ &= \Gamma(1 - \mathbf{r}_{11}) - \Omega \text{Im}(\tilde{\mathbf{r}}_{21})\end{aligned}\quad (37)$$

この式は，確かに式 (36) を満たしている．

ここで，次の変数を導入する。

$$W \equiv \mathbf{r}_{22} - \mathbf{r}_{11}\quad (38)$$

$$U \equiv \mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{21} = 2 \text{Re}[\mathbf{r}_{21}]\quad (39)$$

$$V \equiv i(\mathbf{r}_{12} - \mathbf{r}_{21}) = 2 \text{Im}[\mathbf{r}_{21}]\quad (40)$$

式 (23) からわかるように、 U, V はそれぞれ原子の複素電気感受率の実部と虚部に対応する。これらが満たす連立微分方程式は，

$$\frac{dW}{dt} = -\Gamma(W + 1) + \Omega V\quad (41)$$

$$\frac{dU}{dt} = -gU - dV\quad (42)$$

$$\frac{dV}{dt} = -gV + dU - \Omega W\quad (43)$$

となる．これらの方程式は**光ブロッホ方程式**と呼ばれ、ベクトル $\vec{\mathbf{r}} \equiv (U, V, W)$ は**ブロッホベクトル**と呼ばれる。もし緩和がなければ ($\Gamma = g = 0$)，式 (41) ~ (43) は以下のように $\vec{\mathbf{r}}$ の回転運動を記述する微分方程式に従う。

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{\mathbf{r}}\quad (44)$$

ただし，

$$\vec{\Omega} \equiv (\Omega, 0, d)\quad (45)$$

微分方程式 (49) より, \vec{r} は $\vec{\Omega}$ の周りを周波数 $|\vec{\Omega}| = \sqrt{\Omega^2 + \mathbf{d}^2}$ で歳差運動することがわかる. 緩和が存在する場合 ($\Gamma = 2g \neq 0$) は, \vec{r} はある定常的な点に収束していく. この点を求めるには, 式 (41) ~ (43) において時間微分を 0 とおいた式 (U, V, W に関する 3 元連立一次方程式) を解けばよく, 結果は,

$$U = -\frac{2\mathbf{d}}{\Omega} \frac{s(\mathbf{d})}{1+s(\mathbf{d})} \quad (46)$$

$$V = \frac{2\mathbf{g}}{\Omega} \frac{s(\mathbf{d})}{1+s(\mathbf{d})} \quad (47)$$

$$W = -\frac{1}{1+s(\mathbf{d})} \quad (48)$$

となる. ここで

$$s(\mathbf{d}) \equiv s_0 L(\mathbf{d}) \quad (49)$$

$$s_0 \equiv \frac{\Omega^2}{2\mathbf{g}^2} \quad (50)$$

$$L(\mathbf{d}) \equiv \frac{1}{1+(\mathbf{d}/\mathbf{g})^2} \quad (51)$$

と定義した. $s(\mathbf{d})$ は, **飽和パラメータ**と呼ばれる. 特に $s(0) = s_0$ を **共鳴飽和パラメータ**と呼ぶことにする. $L(\mathbf{d})$ は, $L(0) = 1$ となるよう規格化された半値半幅 のローレンツ関数である. 式 (46) ~ (48) より, 密度行列の各要素は以下のように求まる:

$$\mathbf{r}_{11} = \frac{1}{2}(1+W) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2+s(\mathbf{d})}{1+s(\mathbf{d})} \quad (52)$$

$$\mathbf{r}_{22} = \frac{1}{2}(1-W) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s(\mathbf{d})}{1+s(\mathbf{d})} \quad (53)$$

$$\mathbf{r}_{12} = \frac{1}{2}(U - iV) = -\frac{s(\mathbf{d})}{1+s(\mathbf{d})} \cdot \frac{\mathbf{d} + i\mathbf{g}}{\Omega} \quad (54)$$

$$\mathbf{r}_{21} = \frac{1}{2}(U + iV) = -\frac{s(\mathbf{d})}{1+s(\mathbf{d})} \cdot \frac{\mathbf{d} - i\mathbf{g}}{\Omega} \quad (55)$$

6. 2準位原子気体の吸収係数および屈折率

式 (24), (55) より, 2 準位原子の複素電気感受率 c_A は

$$\begin{aligned} c_A &= \frac{2d\mathbf{r}_{21}}{\mathbf{e}_0 E_0} = -\frac{2d}{\mathbf{e}_0 E_0} \cdot \frac{s_0 L(\mathbf{d})}{1+s(\mathbf{d})} \cdot \frac{\mathbf{d} - i\mathbf{g}}{\Omega} \\ &= \frac{d^2}{\mathbf{e}_0 \hbar g^2} \cdot \frac{L(\mathbf{d})}{1+s(\mathbf{d})} (-\mathbf{d} + i\mathbf{g}) = \frac{d^2}{\mathbf{e}_0 \hbar} \cdot \frac{-\mathbf{d} + i\mathbf{g}}{d^2 + (1+s_0)g^2} \end{aligned} \quad (56)$$

と求められる。この c_A は、 $s_0 \rightarrow 0$ の極限では $\frac{e^2}{2m\omega_0} \leftrightarrow \frac{d^2}{\hbar}$ の置き換えをすれば古典論と完全に一致する。 c_A の具体的な値を知るには、電気双極子モーメント d の値を知る必要がある。自然放出のウィグナー・ワイスコップ理論によると、自然放出レート Γ は、

$$\Gamma \equiv 2g = \frac{d^2 \omega^3}{3pe_0 \hbar c^3} = \frac{d^2 k^3}{3pe_0 \hbar} \quad (57)$$

で与えられるので、これを変形すれば、電気双極子モーメントは、

$$d^2 = \frac{6pe_0 \hbar g}{k^3} \quad (58)$$

と表される。よって、 c_A は具体的に、

$$c_A = 6p\lambda^3 \frac{L(\mathbf{d})}{1+s(\mathbf{d})} \cdot \frac{-\mathbf{d} + i\mathbf{g}}{\mathbf{g}} \quad (59)$$

と表せる ($\lambda \equiv 1/k = l/2p$)。また (63) より、共鳴飽和パラメータ $s_0 = \Omega^2/2g^2$ と、実際の電場強度 $I = e_0 c E_0^2/2$ との関係式

$$s_0 = \frac{\Omega^2}{2g^2} = \frac{m_e^2 E_0^2}{2\hbar^2 g^2} = \frac{6pe_0 E_0^2}{2\hbar g k^3} = \frac{1}{2} e_0 c E_0^2 \cdot \frac{6p\lambda^3}{\hbar g} = I/I_s \quad (60)$$

が得られる。ここで、

$$I_s \equiv \frac{\hbar g}{6p\lambda^3} \quad (61)$$

は**飽和強度**と呼ばれ、励起状態の占有確率 r_{22} が $1/4$ (飽和値 $1/2$ の半分) となる電磁波の強度である。一原子あたりの吸収係数、つまり原子の吸収断面積 $s_A(\mathbf{d})$ は、第1章の式 (65) より (屈折率を $n=1$ と近似して)

$$s_A(\mathbf{d}) = k \text{Im}(c) = 6p\lambda^2 \frac{L(\mathbf{d})}{1+s(\mathbf{d})} = s_A \frac{L(\mathbf{d})}{1+s(\mathbf{d})} \quad (62)$$

と求められる。ここで

$$s_A \equiv 6p\lambda^2 \quad (63)$$

は、電磁波の強度が飽和強度に比べて十分弱く ($s(\mathbf{d}) = I/I_s \sim 0$)、かつ共鳴の場合 ($\mathbf{d} = 0$) の吸収断面積であり、驚くべきことに原子の遷移波長 l のみで決まる。この二準位原子からなる気体の吸収係数 a は、一原子あたりの吸収断面積 $s_A(\mathbf{d})$ に気体の密度 N をかけたものになる (第1章の式 (63))、

$$a = N s_A(\mathbf{d}) \quad (64)$$

第5章 3準位原子と電磁波との相互作用

1. The Hamiltonian in the interaction picture

By defining the single-photon detunings $\Delta_1 = \omega_1 - \omega_{13}$ and $\Delta_2 = \omega_2 - (\omega_{13} - \omega_{12})$ and the two-photon detuning $d = \Delta_1 - \Delta_2 = \omega_1 - \omega_2 - \omega_{12}$, we can write the Hamiltonian for the lambda(Λ) system in the appropriate rotating frame (interaction picture), after the rotating-wave approximation (RWA),

$$\hat{H} = -\hbar d |2\rangle\langle 2| - \hbar\Delta_1 |3\rangle\langle 3| - \frac{\hbar\Omega_1}{2} [|1\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1|] - \frac{\hbar\Omega_2}{2} [|2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 2|], \quad (1)$$

where $\Omega_1 = d_{13}E_1/\hbar$ and $\Omega_2 = d_{23}E_2/\hbar$ are the (single photon) Rabi frequencies which characterize the coupling between the atomic dipole d and the laser electric field $E = E_1 \cos \omega_1 t + E_2 \cos \omega_2 t$. A general state of the form

$$|y\rangle = c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle + c_3(t)|3\rangle \quad (2)$$

obeys the Schrodinger equation $\hat{H}|y\rangle = i\hbar\partial_t|y\rangle$, yielding the following differential equations:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_1 \\ 0 & 2d & \Omega_2 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & 2\Delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

2. The dark state

The matrix of the above Hamiltonian can be easily diagonalized. Let I be the eigenvalue of the Hamiltonian, which is determined by the characteristic equation as follows.

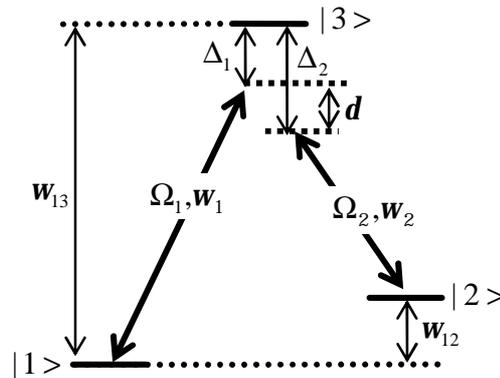


Fig.1 Λ type three-level system

$$\det \begin{vmatrix} -I & 0 & \Omega_1 \\ 0 & 2d - I & \Omega_2 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & 2\Delta_1 - I \end{vmatrix} = 0 \rightarrow I = 0, -\Delta_1 \pm \sqrt{\Delta_1^2 + \Omega_1^2 + \Omega_2^2} \quad (4)$$

The eigenstate corresponding to the eigenvalue $I = 0$ is

$$|\mathbf{y}\rangle_{\text{Dark}} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}} (\Omega_2 |1\rangle - \Omega_1 |2\rangle) \quad (5)$$

which contains no excited state component. Therefore, this state is immune to spontaneous emission and called the dark state.

3. Introduction of the decay

To calculate the electric susceptibility of the probe transition ($|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$), we need to introduce the decay terms, which account for spontaneous emission and dephasing of the ground state, to the original Hamiltonian,

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H} - i\hbar g_2 |2\rangle\langle 2| - i\hbar g_3 |3\rangle\langle 3|. \quad (6)$$

This is non-Hermitian, so the norm of the state does not conserve. However, we can use this effective Hamiltonian as long as the probe field is weak ($\Omega_1 \rightarrow 0$) and the population of the excited state is small ($c_3 \ll 1$) (for more details, see Lukin's lecture note at <http://lukin.physics.harvard.edu/teaching.htm>). The resultant equations of motion are

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 &= i \frac{\Omega_1}{2} c_3 \\ \dot{c}_2 &= -(\mathbf{g}_2 - i\mathbf{d})c_2 + i \frac{\Omega_2}{2} c_3 \\ \dot{c}_3 &= -(\mathbf{g}_3 - i\Delta_1)c_3 + i \frac{\Omega_1}{2} c_1 + i \frac{\Omega_2}{2} c_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Here, we introduce the generalized (complex) decay parameters

$$\begin{aligned} \Gamma_{12} &= \mathbf{g}_2 - i\mathbf{d} \\ \Gamma_{13} &= \mathbf{g}_3 - i\Delta_1 \end{aligned} \quad (8)$$

4. Absorption and dispersion line shape

We are interested in the susceptibility \mathbf{c} for the probe field which is proportional to the off-diagonal matrix element $\mathbf{r}_{31} = c_3 c_1^*$ in the steady state. By setting $c_1 = 1$, $\dot{c}_2 = \dot{c}_3 = 0$, we get

$$c_3 = i \frac{\Omega_1}{2} \frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{12}\Gamma_{13} + \Omega_2^2/4}. \quad (9)$$

Using the relation $\mathbf{c} = \frac{2d_{13}}{e_0 E_1} \mathbf{r}_{31} \propto \frac{2d_{13}^2}{e_0 \hbar \Omega_1} \mathbf{r}_{31}$, and $\mathbf{r}_{31} = c_3 c_1^* \approx c_3$, we finally obtain

$$\mathbf{c} \propto \frac{i\Gamma_{12}}{\Gamma_{12}\Gamma_{13} + \Omega_2^2/4}. \quad (10)$$

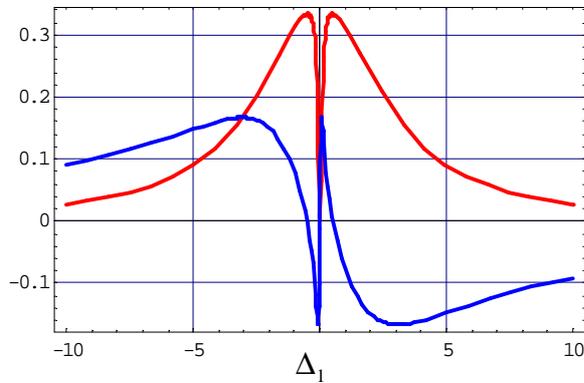
The following is a Mathematica calculation of the real (dispersion) and the imaginary (absorption) part of \mathbf{c} with different control (coupling) field detunings Δ_2 . Several interesting features can be seen:

1. The absorption vanishes completely at $\Delta_1 = \Delta_2$ (dark resonance).
2. Extremely steep dispersion curve at $\Delta_1 = \Delta_2$ (slow light).
3. For $|\Delta_2| > g_3$, sharp Raman absorption peak with the same height as the one-photon absorption peak appears at $\Delta_1 = \Delta_2$.

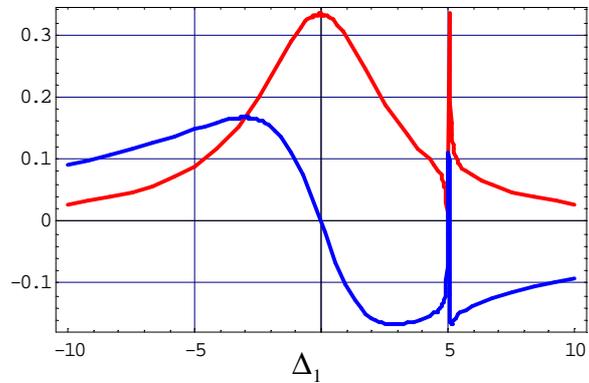
```

γ3 = 3
γ2 = 0
Ω2 = 1
Δ2 = 0
δ = Δ1 - Δ2
Γ12 = γ2 - I δ
Γ13 = γ3 - I Δ1
Kai = I Γ12 / (Γ12 Γ13 + Ω2^2 / 4)
Plot[{Im[Kai], Re[Kai]}, {Δ1, -10, 10}, PlotStyle ->
  {{Thickness[0.01], RGBColor[1, 0, 0]}, {Thickness[0.01], RGBColor[0, 0, 1]}},
  Frame -> True, GridLines -> Automatic]

```



$$g_3 = 3, g_2 = 0, \Delta_2 = 0, \Omega_2 = 1$$



$$g_3 = 3, g_2 = 0, \Delta_2 = 5, \Omega_2 = 1$$