

量子と光 もっと光を！ vs 一個光を！

2015年1月23、27日 久我 隆弘

イントロダクション

「もっと光を」…ゲーテ最期の言葉といわれている
ドイツの文豪、自然科学者
「色彩論」“色は光と闇の間にある”
(確かこんな表現だった…)
現象としては「波の回折」



[http://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Goethe_\(Stieler_1828\).jpg](http://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Goethe_(Stieler_1828).jpg)

「一個光を」…2012年ノーベル物理学賞

The Nobel Prize in Physics 2012
Serge Haroche, David J. Wineland

The Nobel Prize in Physics 2012
Serge Haroche
David J. Wineland



Photo: © CNRS
Photothèque/Christophe Lebedinsky

Serge Haroche

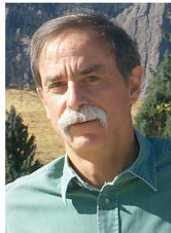


Photo: © NIST

David J. Wineland

The Nobel Prize in Physics 2012 was awarded jointly to Serge Haroche and David J. Wineland "for ground-breaking experimental methods that enable measuring and manipulation of individual quantum systems"

言葉通り「光の粒子性」

きちんと理解するには量子光学の知識が必要
(他にも原子物理学の知識)

今回は、学問の中身にまでは
あまり深入りせず、表面的な
話に留めるつもり。

イントロダクション 光(電磁波)とは?

光 … 最も身近な「素粒子」

Newtonの時代から、“波”なのか“粒子”なのかの議論

… 既に解決済 「二重性」

光の本質を探る研究はほぼ完了している → 量子光学

現在の研究者の興味は、光をうまく利用する研究に移行

基礎学問的

分光学、レーザー分光
レーザー冷却
ボース・アインシュタイン凝縮
超精確原子時計
非古典的な光の状態
etc

応用実用的

レーザー加工、裁断
光通信
半導体レーザー、LED
Lidar (Radar)
単一光子源、量子情報
etc

講義の概要

基礎的事項 ～量子光学の考え方～
光の波動性と粒子性の整理

波動としての光を利用した研究
レーザー分光から超精確(正確)原子時計へ
不確かさの考え方と正しい評価法

粒子としての光を利用した研究
単一光子源とは (定義と利用価値)
単一光子源の作り方

おまけ(時間があれば)
古典光学による量子論のシミュレーション



量子光学の考え方

Maxwell方程式(真空中)

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

波動方程式

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

真空中の光速

電場や磁場は波動方程式に従って伝播する つまり“波動” ≡ 電磁波

しかし、電磁波は媒質がなくても伝わる (とても重要)

cf : Michelson-Morley の実験

(電磁波を伝える媒質とされていたEtherの存在を否定した)

つまり、電磁波は媒質の振動として伝わる“古典的波動”ではない
「場」が振動することにより伝わる“波動”

5



量子光学の考え方

Michelson-Morleyの実験

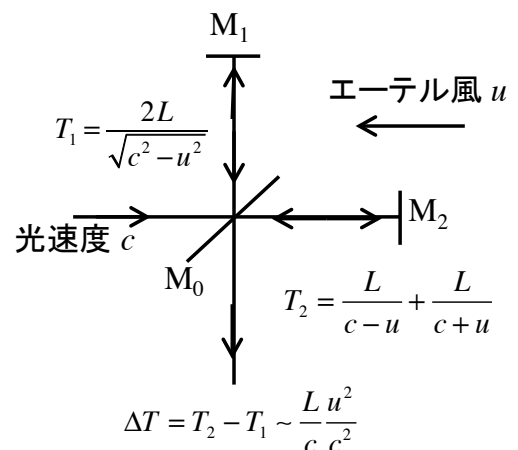
地球がエーテルの中を運動していれば、
地球の自転に応じた周期が干渉に現れるはず
(実際の実験では干渉計を回転させた、1887年)



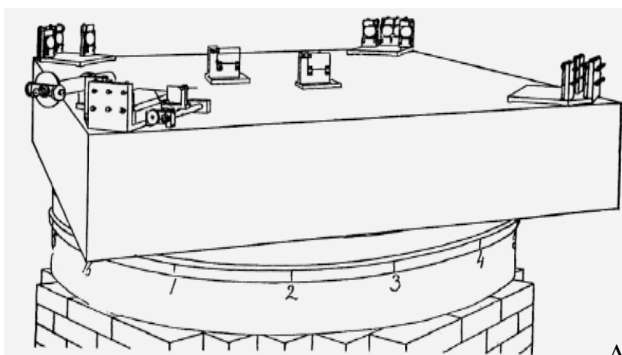
干渉の変化は現れなかった。



エーテルは存在しないと考えるのが妥当。



1887年のMichelson-Morleyの実験装置(四角い岩石全体が水銀溜めの上に浮いている)





量子光学の考え方

電磁場の全エネルギー(古典的ハミルトニアン)

$$\mathcal{H}_{\text{Total}} = \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right) dV$$

モデルとしてLC共振回路を考える

$$\mathcal{H}_{\text{Total}} = \frac{Q^2(t)}{2C} + \frac{\Phi^2(t)}{2L}$$

7



量子光学の考え方

電磁場の全エネルギー(古典的ハミルトニアン)

$$\mathcal{H}_{\text{Total}} = \frac{Q^2(t)}{2C} + \frac{\Phi^2(t)}{2L} \quad \Phi(t) = L \frac{dQ(t)}{dt}$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} m \omega^2 q^2(t) + \frac{p^2(t)}{2m} \quad p(t) = m \frac{dq(t)}{dt}$$

一次元調和振動子のハミルトニアンと同じ形をしている

$$q(t) = \sqrt{\frac{L}{m}} Q(t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0 V_{\text{mode}}}{m \omega^2}} E(t) \quad \frac{1}{2} m \omega^2 q^2(t) \dots \text{電場のもつエネルギーに対応}$$

$$p(t) = \sqrt{\frac{m}{L}} \Phi(t) = -\sqrt{\frac{m V_{\text{mode}}}{\epsilon_0 \omega^2}} \frac{B(t)}{\mu_0} \quad \frac{p^2(t)}{2m} \dots \text{磁場のもつエネルギーに対応}$$

$q(t)$... 一般化座標

$p(t)$... 一般化運動量

8



量子光学の考え方

交換関係 $[\hat{q}(t), \hat{p}(t)] = i\hbar$ を導入して(第二)量子化

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2(t) + \frac{\hat{p}^2(t)}{2m}$$

さらに $\hat{q}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^+e^{i\omega t})$ $\hat{p}(t) = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(-\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^+e^{i\omega t})$ とする $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \quad \text{単一モードのハミルトニアン}$$

\hat{a} : 消滅演算子

\hat{a}^+ : 生成演算子

数式を追っていくのは難しいが、結局、電磁場のエネルギーは、仮想的な粒子が調和振動している時と同じということ。

そしてその粒子の位置と運動量の間には不確定性関係があり、全エネルギーは離散的な値をとる。 **電磁場の第二量子化**

なぜ第二? 第一はどこで行ったのか?

実は、最初の波動方程式がいわゆる第一量子化に対応していた。

電磁場のエネルギー $\langle \hat{\mathcal{H}} \rangle = \hbar\omega\left(\langle \hat{a}^+\hat{a} \rangle + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$

光は $\hbar\omega$ を単位としたエネルギー量子 **粒子性**

9



いろいろな光の状態の図形的表現

単一モードのハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2(t) + \frac{\hat{p}^2(t)}{2m}$

交換関係 $[\hat{q}(t), \hat{p}(t)] = i\hbar$ 不確定性関係 $\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

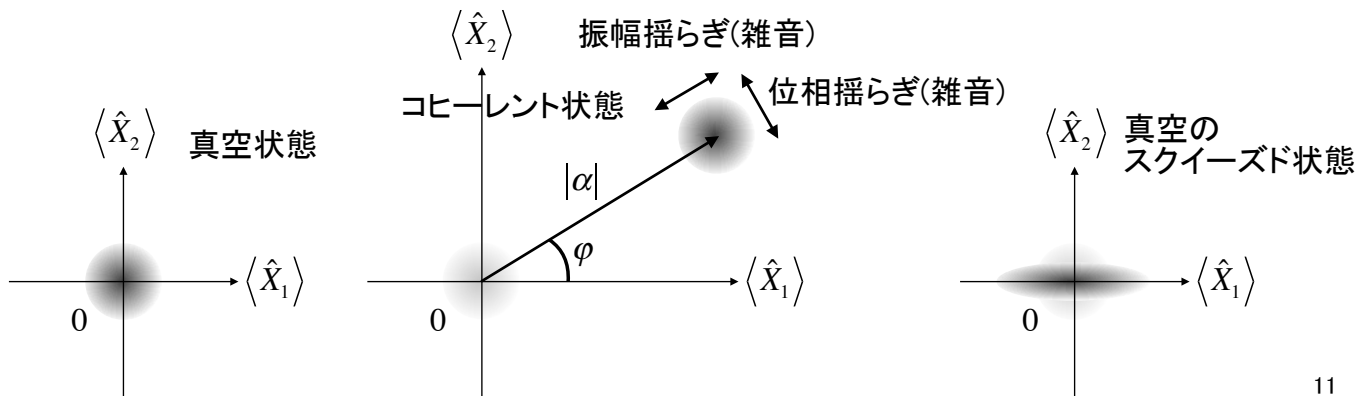
一次元調和振動子の運動と同じ

位相空間上での軌跡として表現できる

いろいろな光の状態の図形的表現

ω で回転する座標系で表すと便利

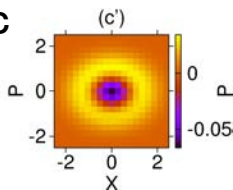
光の状態の位相空間での表示



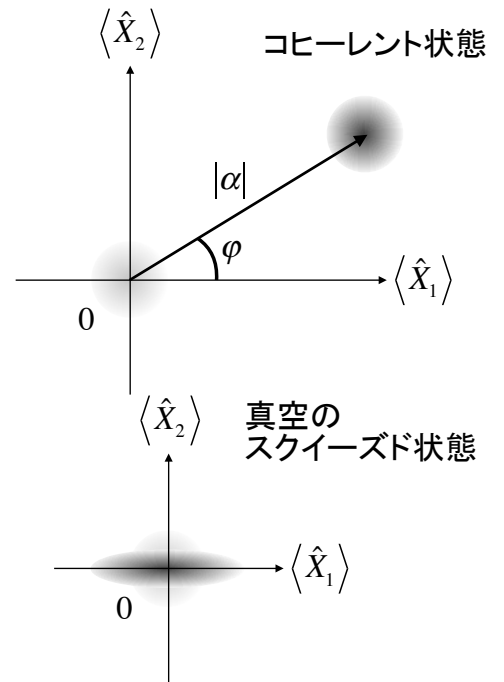
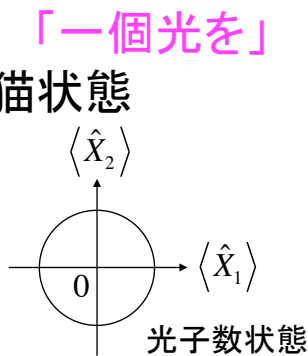
いろいろな光の状態

- コヒーレント状態
- スクイズド状態
- 光子数状態
- シュレーディンガーの猫状態

etc



シュレーディンガーの猫状態



古典的な“波”としての光
強度が無限大の極限

「もっと光を」



波動性の利用 -分光学の歴史-

BC300頃	Euclid (埃及)	光の直進、反射	幾何光学
15世紀	Leonardo da Vinci (伊)	回折現象	
1590		顕微鏡	
16世紀	Galileo Galilei (伊)	望遠鏡の原理、望遠鏡(1609)	天文学
1620頃	Snell (蘭)	屈折の法則	
1650頃	Fermat (仏)	Fermatの原理	
1660頃	Grimaldi (伊)	回折現象	波動光学
1666	Newton (英)	ガラスの分散、プリズム分光器	
1678	Huygens (蘭)	光の波動説	
1785	Rittenhouse (米)	回折格子の製作	
1802	Wallaston (英)	太陽スペクトル中の暗線	Wallaston prism
1807	Young (英)	光の干渉	
1814	Fraunhofer (独)	太陽スペクトル中の暗線	
1815~23	Fresnel (仏)	光の回折、偏光の波動論	ベクトル波動光学
1821	Fraunhofer (独)	回折格子分光計	
1853	Ångström (瑞典)	吸収と放出の波長は同じ (水素原子のBalmer- α 、 β 、 γ 線)	
1860	Bunsen (独)、Kirchhoff (独)	スペクトル分析の方法(物質の固有スペクトル)	ブンゼンバーナー
1861	Maxwell (英)	電磁場の方程式、光の電磁波説	古典電磁気学
1881, 87	Michelson (米)	Michelson干渉計、光速度測定	
1885	Balmer (瑞西)	水素のスペクトル系列	
1888	Hertz (独)	電磁波の実験的証明	
1890	Rydberg (瑞典)	スペクトル公式	

13



波動性の利用 -分光学の歴史-

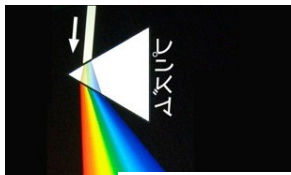
1900	Planck (独)	黒体輻射の式	光の粒子性
1905	Einstein (独)	光電効果、特殊相対論	
1906	Lyman (米)	Lyman系列	紫外分光
1908	Paschen (独)	Paschen系列	赤外分光
1911	Rutherford (新西蘭、英)	原子のRutherford模型	放射性崩壊、 α 線
1913	Bohr (丁抹)	水素原子模型	量子力学
1915	Sommerfeld (独)	微細構造定数	
	Einstein (独)、de Haas (蘭)	磁気回転効果	
1917	Einstein (独)	自然放出(A係数)、誘導放出(B係数)	
1918	Bohr (丁抹)	対応原理	
1922	Stern (独)、Gerlach (独)	Stern-Gerlachの実験 原子の磁気能率、電子スピン	
1923	de Broglie (仏)	物質波の概念	
1924	Bose (印)、Einstein (独)	Bose-Einstein 凝縮	
1925	Heisenberg (独)	行列力学	
1926	Schrödinger (奥太利、愛蘭)	波動力学	
1927	Heisenberg (独)	不確定性原理	
	Bohr (丁抹)	相補性原理	
1928	Dirac (英)	相対論的量子力学	
1930	Lawrence (米)	サイクロトロン、マンハッタン計画	高エネルギー物理
1947	Lamb (米)	Lambシフトの発見	マイクロ波分光
	Bethe (独、米)	Lambシフトの説明、量子電磁力学	電磁場の量子化
1960	Maiman (米)	レーザーの発明	

14

波動性を利用 -分光学-

分光学：スペクトルの位置を正確に測定し、エネルギー準位に関する知見を得る

17世紀



プリズム 17世紀～

相対不確かさ = 10^{-3} (1000分の1)

18世紀

白色光は様々な「色」から成る

回折格子分光器 18世紀末～

相対不確かさ = 10^{-6} (100万分の1)

19世紀

水素のスペクトル(バルマー)系列

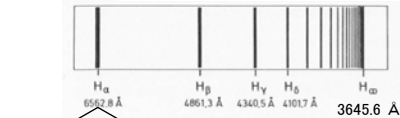
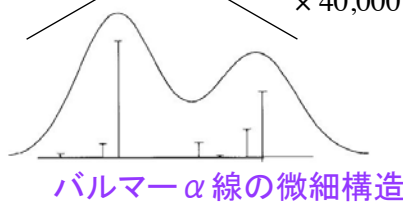


Fig. 8.3. Balmer series in the hydrogen emission spectrum. The convergence of the lines to the series limit H_∞ is clearly seen

離散的エネルギー準位

20世紀



バルマーα線の微細構造

ボーアの水素原子模型(1913)

初期量子論

ディラックの相対論的量子論(1928)

電子のスピン、反粒子の存在

ここ以降は「周波数」を使う

周波数(振動数) $\nu = c/\lambda$ 光の速さ/波長

波長
周波数(振動数)

実験値とその不確かさ

相対不確かさとは？ 実験値の信頼性を客観的に表す指標

測定値は必ずばらつく ... 真実

- ランダム確率過程(放射性崩壊など)
- 量子論の不確か性関係(量子ゆらぎ)
- 測定器の精度
- 外部環境の変化
- 測定条件の制御不足
- etc

- 原理的に避けられないばらつき
- Aタイプの不確かさの要因となる
- 頑張れば避けられるばらつき
- Aタイプの不確かさ
- Bタイプの不確かさ

👉 Aタイプの不確かさは測定回数を増やして「統計をためる」ことで小さくなる

大数の法則、中心極限定理

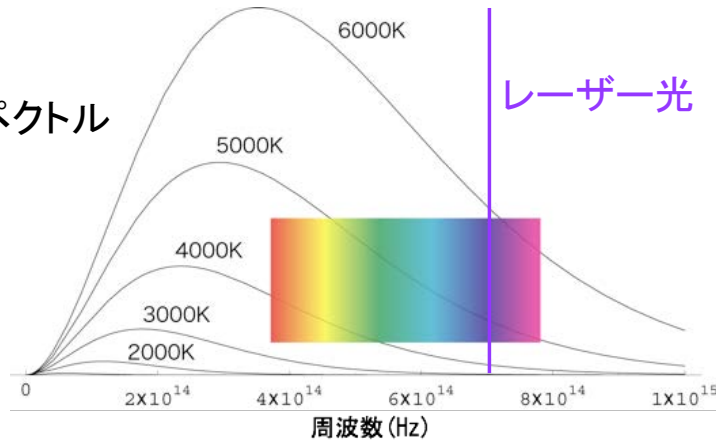
「もっと光を！」



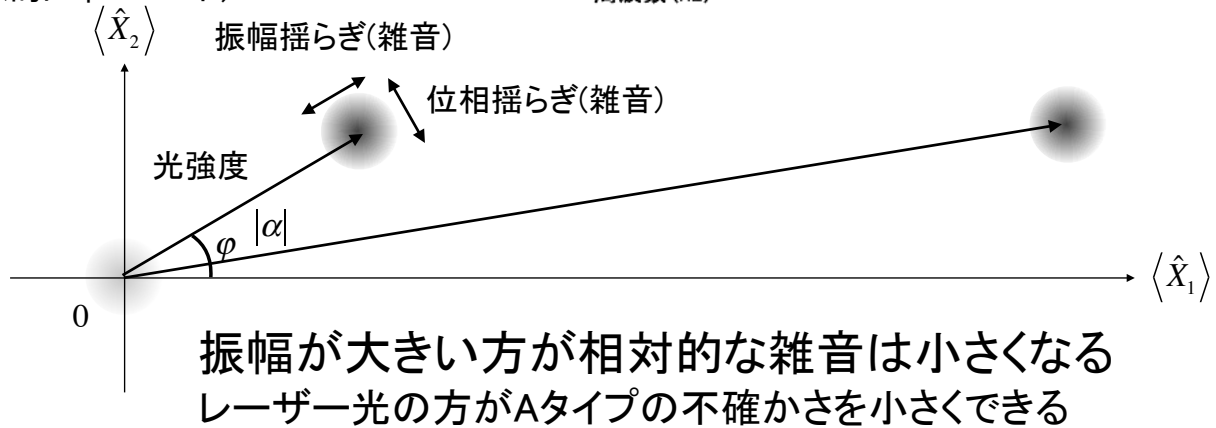
実験値とその不確かさ

「もっと光を!」

黒体輻射スペクトル



ある周波数の光
(近似的に単一モード)



17



実験値とその不確かさ

「測る」を究めろ!」 19~23ページ参照

光とは関係ないが、具体例として振り子の周期測定を考える。
長さ $L = 1.795 \text{ m}$ の振り子の 10 周期分の時間 (T) を 20 回測定

測定値がばらつく原因は、ストップウォッチのボタンを押す
タイミングのばらつきと考えられる

Aタイプの不確かさの要因

(回数を繰り返せば小さくできる)

ストップウォッチは0.01秒の桁までしか表示しない

Bタイプの不確かさの要因

(繰り返しても小さくできない)

実際の測定結果から、不確かさを求めてみる

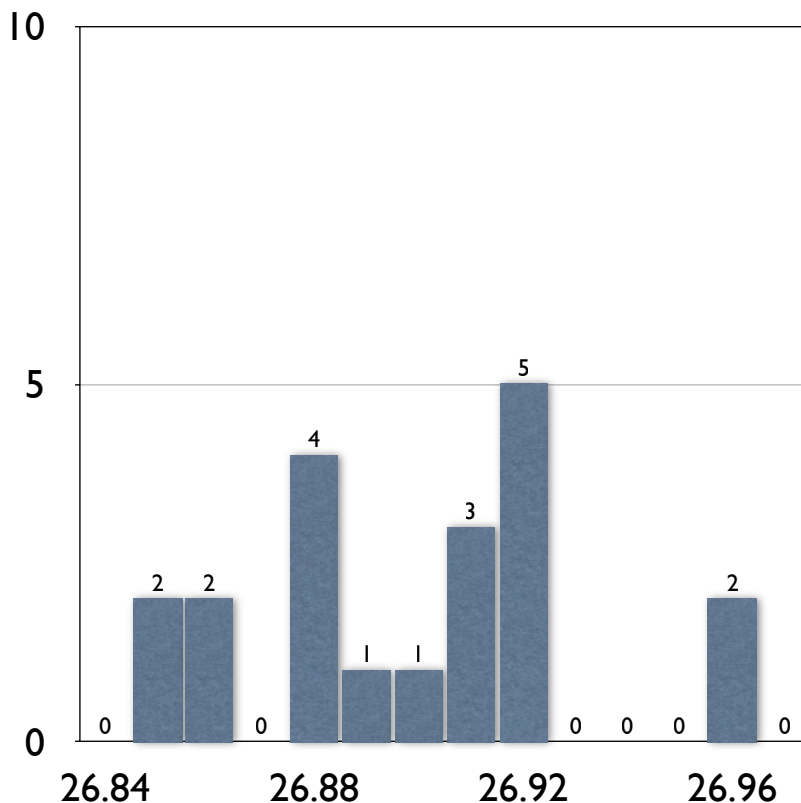
18

実験値とその不確かさ

	T/s
1	26.85
2	26.85
3	26.88
4	26.96
5	26.92
6	26.92
7	26.91
8	26.96
9	26.86
10	26.88
11	26.86
12	26.90
13	26.88
14	26.88
15	26.91
16	26.92
17	26.92
18	26.91
19	26.89
20	26.92

長さ $L = 1.795 \text{ m}$ の振り子
10周期分の時間 / s

「測る」を究めろ!」 45~47ページ参照



実験値とその不確かさ

	T/s
1	26.85
2	26.85
3	26.88
4	26.96
5	26.92
6	26.92
7	26.91
8	26.96
9	26.86
10	26.88
11	26.86
12	26.90
13	26.88
14	26.88
15	26.91
16	26.92
17	26.92
18	26.91
19	26.89
20	26.92

長さ $L = 1.795 \text{ m}$ の振り子
10周期分の時間 / s

20個の測定値の平均

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 26.8990$$

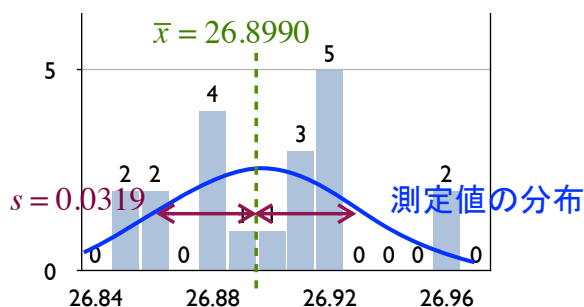
不偏分散

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 0.001020$$

分布の幅

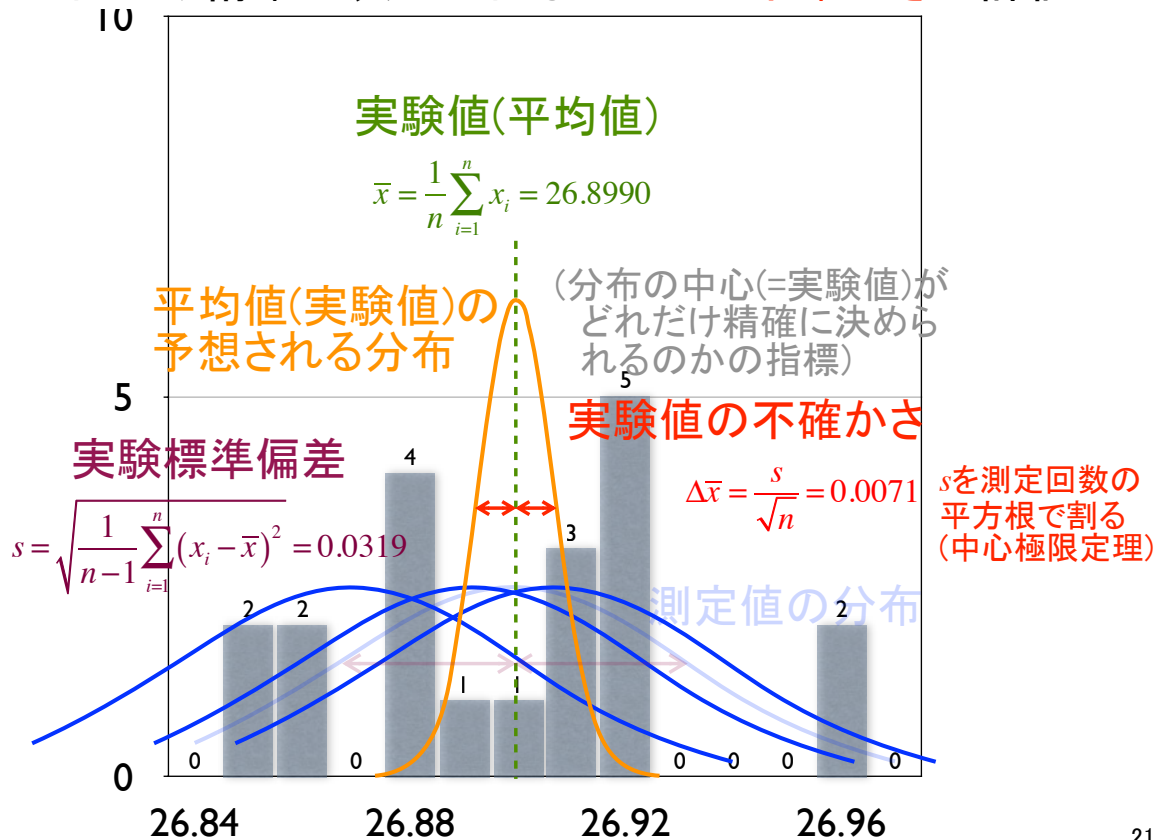
$$s = \sqrt{s^2} = 0.0319$$

測定値の分布は**ガウス分布**だと仮定すると、
平均値は 26.8990 s **実験値**
分布の幅 (**実験標準偏差**)は 0.0319 s
となる。



実験値とその不確かさ

実験値はどれだけ精確に決められるのか … 不確かさの評価



21

実験値とその不確かさ

測定値の分布の様子から、

実験値 = 26.8990 s、不確かさ = 0.0071 s

が得られた。

しかし、ここで得た不確かさは、測定値のばらつきによる不確かさ(Aタイプの不確かさ)だけしか考えていない。

ただ今回使ったストップウォッチは、0.01秒の桁までしか表示しない。

つまり四捨五入による「丸め」誤差がある。

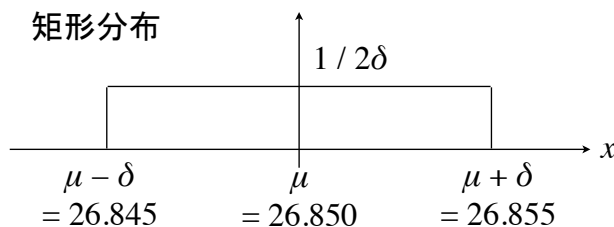
Bタイプの不確かさの原因になる

22



実験値とその不確かさ

ストップウォッチの表示が“26.85”のとき、
実際の値はある範囲(下図)に均等に分布しているはず



矩形分布の分散

$$\sigma^2 = \int_{\mu-\delta}^{\mu+\delta} \frac{1}{2\delta} (x-\mu)^2 dx = \frac{\delta^2}{3}$$

$\delta = 0.005$ として分散の平方根を分布の幅、
つまりBタイプの不確かさと考える

$$\Delta T_B = \frac{0.005}{\sqrt{3}} = 0.0029 \text{ s}$$

合成標準不確かさ

各不確かさの二乗和の平方根

$$\Delta T = \sqrt{\Delta \bar{T}^2 + \Delta T_B^2 + \dots} = 0.0077 \text{ s}$$

23



実験値とその不確かさ

以上のことをまとめると以下のようになる

平均値(実験値) $T/s = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \underline{26.8990}$

測定値の不偏分散 $s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$
 $= \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 - N \bar{x}^2 \right) = \underline{0.001020}$

実験標準偏差 $s = \sqrt{s^2} = \underline{0.0319}$

不確かさ(Aタイプ) $\Delta \bar{T} / s = \Delta \bar{x} = \frac{s}{\sqrt{N}} = \underline{0.0071}$

不確かさ(Bタイプ) $\Delta x_B = \frac{\delta}{\sqrt{3}} = \underline{0.0029}$

合成標準不確かさ $\Delta T / s = \Delta x = \sqrt{\Delta \bar{x}^2 + \Delta x_B^2 + \dots} = \underline{0.0077}$

24



実験値とその不確かさ

実験結果の表記法(相手への伝え方)

ある物理量の値 = **実験値** ± **不確かさ** **単位**

例 $T = 26.8990 \pm 0.0077 \text{ s}$... 不確かさは2桁
 ...実験値の下の桁を
 不確かさに合わせる

$T = 26.899 \pm 0.008 \text{ s}$... 「不確かさ」の概念から
 考えると、1桁でも良い

実験値(平均値)だけでなく、その値の**不確かさ**(信頼性)も伝える
 (現代の科学技術の現場では必要不可欠なこと)
 もちろん、一般社会でも ... 例: 放射線測定など

- 「100%正しい結果」というのはありえない(必ず**不確かさ**がある)
- **実験値**の信頼性(**不確かさ**)もきちんと伝える
- **不確かさ**が与えられていない情報(**実験値**)は信用しない

25



実験値とその不確かさ

精密計測の最前線 (既存の物理法則の厳しい検証)

実験値の不確かさをどこまで小さくできるか
公平を期すには、相対不確かさで比較する

そして相対不確かさを小さくすることで新しい現象も見えてくる(...はず)。

$$T = \bar{T} \pm \Delta T = \bar{T} \left(1 \pm \frac{\Delta T}{\bar{T}} \right)$$

相対不確かさ
 無次元量なので他の物理量測定との比較可能

$$\text{相対不確かさ} = \frac{\text{不確かさ}}{\text{実験値}}$$

$$T = 26.8990 \pm 0.0077 \text{ s}$$

$$= 26.8990(1 \pm 0.00029) \text{ s}$$

$$\text{相対不確かさ} \quad 0.00029 = 2.9 \times 10^{-4}$$

26