量子計測学Ⅱ（鳥井）　レポート問題 2006 年 6 月 23 日出題　（〆切：７月１１日）

I（線形システムの一般論）

任意の二つの入力の和 $f_1(t)+f_2(t)$ に対する出力 $L[f_1(t)+f_2(t)]$が、それぞれの入力に対する出力の和 $L[f_1(t)]+L[f_2(t)]$に等しくなるようなシステムは**線形システム**と呼ばれる。ある線形システムに、デルタ関数 $\delta(t)$ を入力したら、その出力は $h(t)$ であったとする。$h(t)$ は**インパルス応答**と呼ばれる。

（１）この線形システムに $f_{\mathrm{in}}(t)$ を入力したときの出力は

$$f_{\mathrm{out}}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)f_{\mathrm{in}}(\tau)d\tau$$

と表せることを示せ。

（２） $f_{\mathrm{in}}(t), f_{\mathrm{out}}(t), h(t)$ のフーリエ変換をそれぞれ $F_{\mathrm{in}}(\omega), F_{\mathrm{out}}(\omega), H(\omega)$ とする。ただしフーリエ変換の定義は $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\omega t}dt$ とする。このとき、

$$F_{\mathrm{out}}(\omega)=H(\omega)F_{\mathrm{in}}(\omega)$$

が成り立つことを示せ。

II（分極の古典モデル）

バネ定数 k のバネにつながれている質量 m の電子に、x 軸方向に偏光した電場 $E(t)$ によるクーロン力 $-eE(t)$ $(e>0)$ および速度に比例する減衰力 $2m\gamma dx/dt$ が働いている振動子（システム）を考える。この電子の平衡点からの変位を $x(t)$ とすると、運動方程式は

$$m\frac{dx^2}{dt^2}=-kx-eE(t)-2m\gamma\frac{dx}{dt}\Leftrightarrow\frac{dx^2}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=-\frac{e}{m}E(t)$$

と表される。ここで $\omega_0\equiv\sqrt{k/m}$ と定義した。

（１）$E(t)$ を入力、$x(t)$ を出力と考えたとき、このシステムが線形であることを確認せよ。

（２）このシステムにインパルス $E(t)=\delta(t)$ を加えたときのインパルス応答 $x(t)=h(t)$ を求めよ（ヒント：電場のインパルスは電子に瞬間的に力積を与え、その後電子は減衰振動する。力積の大きさは運動量の変化量に等しい）。

（３）（２）で求めたインパルス応答 $h(t)$ のフーリエ変換 $H(\omega)$ を求めよ。

（４）今度は、このシステムに入力 $E(t)=Ee^{-i\omega t}$ （フーリエ変換は $E(\omega')=2\pi E\delta(\omega'-\omega)$ ）を加える。このときの出力 $x(t)$ を次の２通りの方法で求めよ（両者は一致するか？）。

① $H(\omega)E(\omega)$ を逆フーリエ変換する。つまり、 $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega')E(\omega')e^{-i\omega' t}d\omega'$ 。

② $x(t)=x(\omega)e^{-i\omega t}$ とおいて運動方程式に代入し、 $x(\omega)$ を求める（講義と同じ方法）。

（５）この振動子が空間密度 n で分布している媒質を考える。この媒質の分極は

$$P(t) = -nex(t)$$

で与えられる。この媒質の複素電気感受率 $\chi(\omega)$ を求めよ。

III（クラマース・クローニッヒの関係）

（１） II（５）で求めた複素電気感受率の実部 $\chi'(\omega)$ および虚部 $\chi''(\omega)$ は、$\omega \approx \omega_0$（共鳴付近）のとき、A を正の定数として

$$\begin{cases} \chi'(\omega) = A\dfrac{\omega_0 - \omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \\ \chi''(\omega) = A\dfrac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \end{cases}$$

と近似できることを示せ。

（２）（１）で求めた、$\chi'(\omega)$ および $\chi''(\omega)$ はクラマース・クローニッヒの関係式

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi''(\omega')}{\omega' - \omega}d\omega'$$

を満足していることを示せ。

IV（非共鳴領域でのガラスの分散関係）

（１） II（５）で求めた複素電気感受率は、$\omega << \omega_0$ または $\omega >> \omega_0$（非共鳴領域）のとき、B を正の定数として

$$\chi(\omega) = B\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

と近似できることを示せ。

（２） マクスウェル方程式より $n(\omega) = \sqrt{1 + \chi(\omega)}$ がなりたつので、非共鳴領域での媒質の屈折率の $n(\omega)$ は、C を正の定数として

$$\left(n^2(\omega) - 1\right)^{-1} = C\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) = C\left(\lambda_0^{-2} - \lambda^{-2}\right)$$

と近似的に表すことができる。自分が行った基礎実験「ガラスの屈折率」のデータを用いて、横軸を λ^{-2}、縦軸を $\left(n^2 - 1\right)^{-1}$ とするグラフを描き、上式が定性的に正しいことを確認せよ。また、共鳴波長 λ_0 を実際に計算し、それが紫外線の領域にあることを確認せよ。実験ノートを紛失したものは、右の表のデータ（鳥井の実験ノート）を用いてもよいが、その旨をレポートに明記すること。

波長 (nm)	**屈折率**
579	1.7387
577	1.7398
546	1.7434
492	1.7544
435	1.7716
408	1.7839
405	1.7865