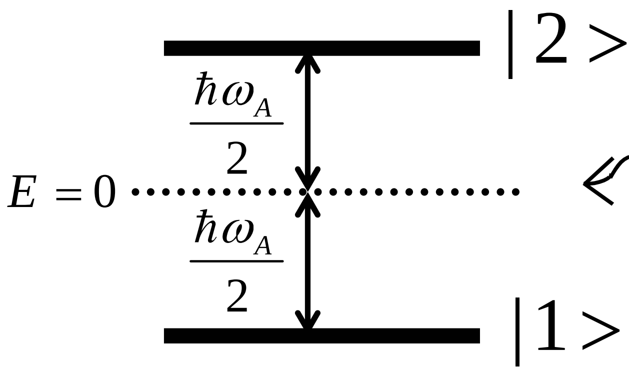
2準位原子とレーザー光との相互作用



$$\boldsymbol{E}(t)=E_0\hat{\boldsymbol{x}}\cos\omega_L t$$

(電気双極子近似における)
相互作用ハミルトニアン

$$\boxed{\hat{H}=\hat{H}_0-\hat{\boldsymbol{d}}\cdot\boldsymbol{E}=\hat{H}_0+e\hat{D}_x E(t)}$$

変位演算子
$\left(\hat{D}_x\equiv\sum_i\hat{x}_i\right)$

電気双極子相互作用

$$\hat{H}_0\,|1>=-\frac{\hbar\omega_A}{2}|1>,\quad \hat{H}_0\,|2>=\frac{\hbar\omega_A}{2}|2>$$

2準位原子の波動関数と密度行列

波動関数

$$|\Psi(t)>=c_1(t)|1>+c_2(t)|2>$$

確率振幅の単なる書き換え

$$=C_1(t)\exp\left(\frac{i}{2}\omega_L t\right)|1>+C_2(t)\exp\left(-\frac{i}{2}\omega_L t\right)|2>$$

密度行列: $\rho \equiv |\Psi><\Psi|$

$$\rho_{11}=<1|\rho|1>=C_1(t)C_1^*(t)$$ ←基底状態の存在確率

$$\rho_{22}=<2|\rho|2>=C_2(t)C_2^*(t)$$ ←励起状態の存在確率

$$\rho_{12}=<1|\rho|2>=C_1(t)C_2^*(t)\exp(i\omega_L t)=\tilde{\rho}_{12}\exp(i\omega_L t)$$

$$\rho_{21}=<2|\rho|1>=C_2(t)C_1^*(t)\exp(-i\omega_L t)=\tilde{\rho}_{21}\exp(-i\omega_L t)$$

2準位原子1個の分極

$$P(t) = -e < \Psi | \hat{D}_x | \Psi >$$
$$= -e\Big[\rho_{11} < 1 | \hat{D}_x | 1 > + \rho_{12} < 2 | \hat{D}_x | 1 >$$
$$+ \rho_{21} < 1 | \hat{D}_x | 2 > + \rho_{22} < 2 | \hat{D}_x | 2 > \Big]$$

原子は永久双極子モーメントを持たないと仮定する

$$< 1 | \hat{D}_x | 1 > = < 2 | \hat{D}_x | 2 > = 0$$ **より**

$$P(t) = -e[\rho_{12} < 2 | \hat{D}_x | 1 > + \rho_{21} < 1 | \hat{D}_x | 2 >]$$
$$= d_{12}\Big[\tilde{\rho}_{12} \exp(i\omega_L t) + \tilde{\rho}_{21} \exp(-i\omega_L t)\Big]$$

ただし $d_{12} \equiv -e < 1 | \hat{D}_x | 2 > = -e < 2 | \hat{D}_x | 1 >$

2準位原子の複素電気感受率

定義: $\boxed{Pe^{-i\omega_L t} = \varepsilon_0 \chi(\omega_L) E e^{-i\omega_L t}}$

$$\chi(\omega_L) = \frac{Pe^{-i\omega_L t}}{\varepsilon_0 E e^{-i\omega_L t}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{P(t)\text{の}e^{-i\omega_L t}\text{成分}}{E(t)\text{の}e^{-i\omega_L t}\text{成分}} = \frac{2d_{12}}{\varepsilon_0 E_0} \tilde{\rho}_{21}$$

$$\boxed{\chi(\omega_L) \propto \tilde{\rho}_{21}}$$

複素電気感受率は密度行列の対角成分に比例する

原子系の時間発展

シュレーディンガー方程式は

$$\hat{H}\,|\Psi> = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi> \quad \left(\hat{H} = \hat{H}_0 + e\hat{D}_x E_0 \cos\omega_L t\right)$$

$$\Omega \equiv \frac{e<1|D_x|2>E_0}{\hbar} = -\frac{d_{12}E_0}{\hbar}$$ **と定義すると（ラビ周波数）**

$$\hat{H} = +\frac{\hbar\omega_A}{2}\left[|2><2| - |1><1|\right]$$

$$\hbar\Omega\left(|1><2| + |2><1|\right)\frac{\exp(i\omega_L t) + \exp(-i\omega_L t)}{2}$$

回転波近似
(Rotating-wave Approximation)

$$<1|\hat{H}|\Psi> = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}<1|\Psi>$$

無視

$$\rightarrow i\hbar\frac{dC_1(t)}{dt} = \frac{\hbar}{2}(\omega_L - \omega_A)C_1(t) + \frac{\hbar\Omega}{2}\left[1 + \cancel{\exp(-2i\omega_L t)}\right]C_2(t)$$

$$<2|\hat{H}|\Psi> = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}<2|\Psi>$$

無視

$$\rightarrow i\hbar\frac{dC_2(t)}{dt} = -\frac{\hbar}{2}(\omega_L - \omega_A)C_2(t) + \frac{\hbar\Omega}{2}\left[\cancel{\exp(+2i\omega_L t)} + 1\right]C_1(t)$$

結果的に

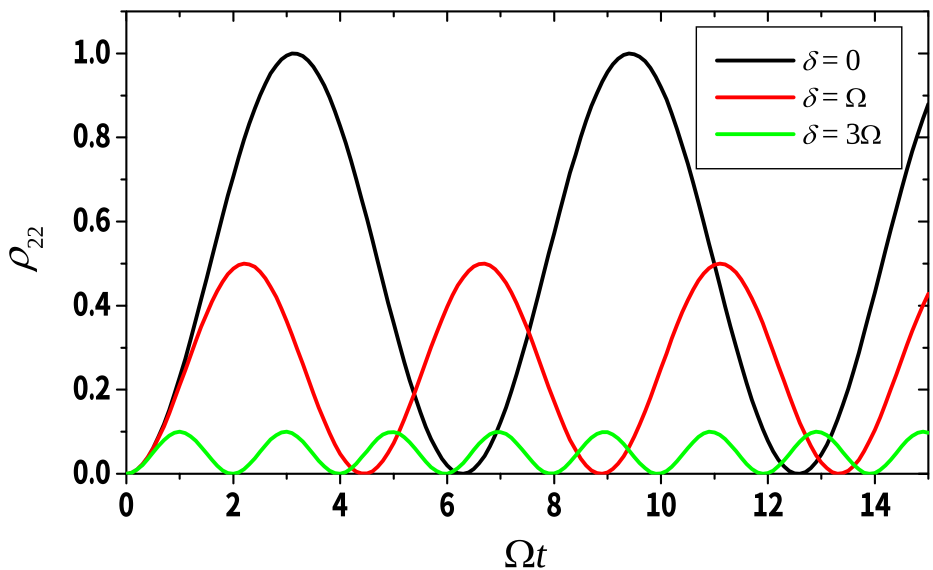
$$\boxed{i\hbar\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \delta & \Omega \\ \Omega & -\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}}$$

ラビ振動

$$C_1(0)=1,\quad C_2(0)=0$$ とすると、$$C_2(t)=-i\frac{\Omega}{\Omega'}\sin\frac{\Omega'}{2}t$$

$$\Omega' \equiv \sqrt{\Omega^2+\delta^2}$$ ：一般化ラビ周波数

$$\left|C_2(t)\right|^2=\rho_{22}=\frac{\Omega^2}{\Omega^2+\delta^2}\sin^2\frac{\Omega'}{2}t=\frac{\Omega^2}{\Omega^2+\delta^2}\frac{1-\cos\Omega' t}{2}$$



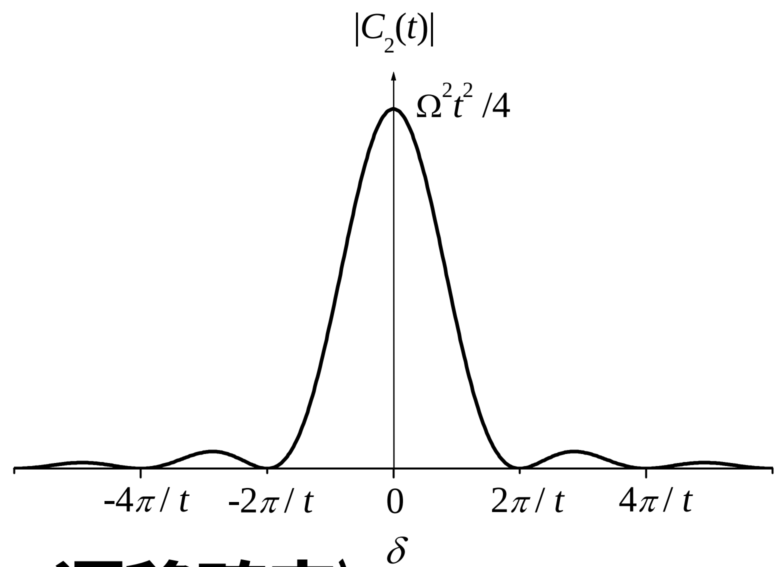
フェルミの黄金則

$\Omega \to 0$ の極限では、

$$|C_2(t)|^2 = \Omega^2 \frac{\sin^2(\delta t/2)}{\delta^2}$$

$$\cong \frac{\pi}{2}\Omega^2 \delta(\omega_L - \omega_A) t$$

$\hbar^2$



遷移レート（単位時間当たりの遷移確率）

$$|C_2(t)|^2 / t = \frac{\pi}{2}\Omega^2 \delta(\omega_L - \omega_A)$$

相互作用ハミルトニアン

$$= \frac{2\pi}{\hbar^2}\left|\frac{<2|eD_x E_0|1>}{2}\right|^2 \delta(\omega_L - \omega_A)$$

フェルミの黄金則

回転波近似