分極と電場の関係

空間依存性	空間対称性	波長依存性	線形性
均一 Homogeneous	**等方的** Isotropic	**非分散的** Nondispersive	**線形** Linear
不均一 Inhomogeneous (**ファイバー**)	**非等方的** anisotropic (**複屈折性**)	**分散的** Dispersive (**吸収と分散**)	**非線形** Nonlinear (SHGなど)

一般的な電場と分極との線形関係

$$\boldsymbol{P}e^{-i\omega t} = \varepsilon_0 \chi(\omega) \boldsymbol{E} e^{-i\omega t}$$

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$$ ：複素電気感受率

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P} + \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi(\omega)) \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

$$\varepsilon(\omega) \equiv \varepsilon_0 (1 + \chi(\omega))$$ ：複素誘電率

分散性媒質中の電磁波

媒質中をz軸方向に伝播する電磁波（電場）を

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\hat{\boldsymbol{x}}E(z,t)=\hat{\boldsymbol{x}}E_0\exp\left[i(Kz-\omega t)\right]$$

と表すことにすると、マクスウェル方程式より

$$K^2=\frac{\omega^2}{c^2}(1+\chi(\omega))=k^2(1+\chi(\omega))$$

$|\chi(\omega)|<<1$ と仮定すると、

$$K=k\sqrt{1+\chi(\omega)}\cong k\left(1+\frac{\chi'(\omega)}{2}+i\frac{\chi''(\omega)}{2}\right)$$

吸収係数と屈折率

Kの値を代入して、

$$E(z,t) = E_0 \exp\left[ik\left(1+\frac{\chi'}{2}+i\frac{\chi''}{2}\right)z - i\omega t\right]$$

$$= E_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{2}z\right)\exp\left[i\left(k'z - \omega t\right)\right]$$

$$I(z) = I_0 \exp\left(-\alpha z\right)$$

$$\begin{cases} \alpha = k\chi'' & \text{：吸収係数} \\ k' = k\left(1+\chi'/2\right) & \\ n = 1+\chi'/2 & \text{：屈折率} \end{cases}$$

(余談) 線形システム

$$f_{\text{out}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) f_{\text{in}}(\tau) d\tau$$

$$\Big\downarrow \text{ フーリエ変換}$$

$$F_{\text{out}}(\omega) = H(\omega) F_{\text{in}}(\omega)$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{P(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) E(\omega)}$$

Kramers-Kronigの関係

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi''(\omega')}{\omega'-\omega}d\omega' = \frac{2}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega'\chi''(\omega')}{\omega'^2-\omega^2}d\omega'$$

$$\chi''(\omega) = \frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi'(\omega')}{\omega-\omega'}d\omega' = \frac{2}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega\chi'(\omega')}{\omega^2-\omega'^2}d\omega'$$

証明に必要なもの：

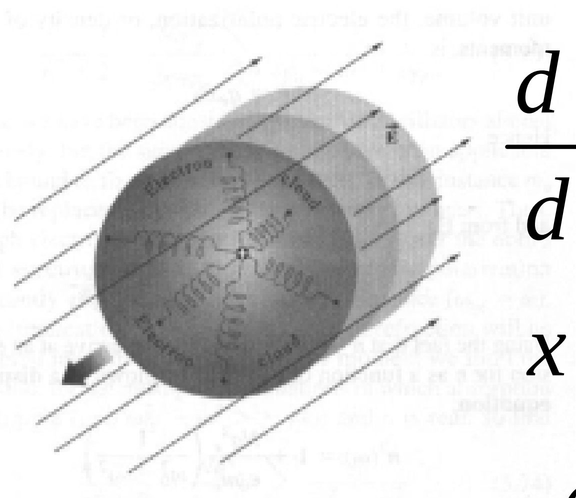
①$P(t) = \varepsilon_0 \frac{E}{2}\left[\chi(\omega)e^{-i\omega t} + \chi(-\omega)e^{i\omega t}\right]$**は実数なので、**

$$\chi^*(\omega) = \chi(-\omega) \rightarrow \chi'(\omega) = \chi'(-\omega),\ \chi''(\omega) = -\chi'(-\omega)$$

偶関数 **奇関数**

② $\chi(\omega) \propto \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{i\omega t}dt$ **は上半平面で正則（因果律より）**

分極のミクロな古典モデル
(調和振動子)



$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m}Ee^{-i\omega t}$$

$x = x(\omega)e^{-i\omega t}$ **とおいて代入すると**

$$x(\omega) = \frac{e}{m}\cdot\frac{E}{\omega^2 + 2i\gamma\omega - \omega_0^2}$$

$$Pe^{-i\omega t} = -nex = \varepsilon_0\left[-\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}\cdot\frac{1}{\omega^2 + 2i\gamma\omega - \omega_0^2}\right]Ee^{-i\omega t}$$

↑

振動子の密度

$$\chi(\omega)$$

$$\chi(\omega) = -\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{1}{\omega^2 + 2i\gamma\omega - \omega_0^2}$$

$\omega \approx \omega_0$ (共鳴付近) のときは

$$\chi(\omega) = -\frac{ne^2}{2m\varepsilon_0\omega_0} \cdot \frac{1}{\omega - \omega_0 + i\gamma} \propto -\frac{\delta - i\gamma}{\delta^2 + \gamma^2}$$

$$(\delta \equiv \omega - \omega_0)$$

$$\begin{cases} \chi'(\omega) = -A\dfrac{\delta}{\delta^2 + \gamma^2} \\ \chi''(\omega) = A\dfrac{\gamma}{\delta^2 + \gamma^2} \end{cases}$$

半値半幅：γ