# ヘルムホルツ方程式

マクスウェル方程式より、

$$\Delta \boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$ ←3次元波動方程式

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\begin{pmatrix} E_x(\boldsymbol{r},t) \\ E_y(\boldsymbol{r},t) \\ E_z(\boldsymbol{r},t) \end{pmatrix} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{pmatrix} E_x(\boldsymbol{r},t) \\ E_y(\boldsymbol{r},t) \\ E_z(\boldsymbol{r},t) \end{pmatrix}$$

電磁波は特定の方向にのみ偏光しているとし（近似し）、その成分を$u$とする。また時間依存性は$e^{-i\omega t}$であるとすると

$$\Delta u + k^2 u = 0$$ ヘルムホルツ方程式

$$\left(k = \omega / c\right)$$

# ヘルムホルツ方程式の解

$\Delta u + k^2 u = 0$ の解として、$u = f(x,y,z)e^{ikz}$

の形のものを探してみる。方程式に代入すると、

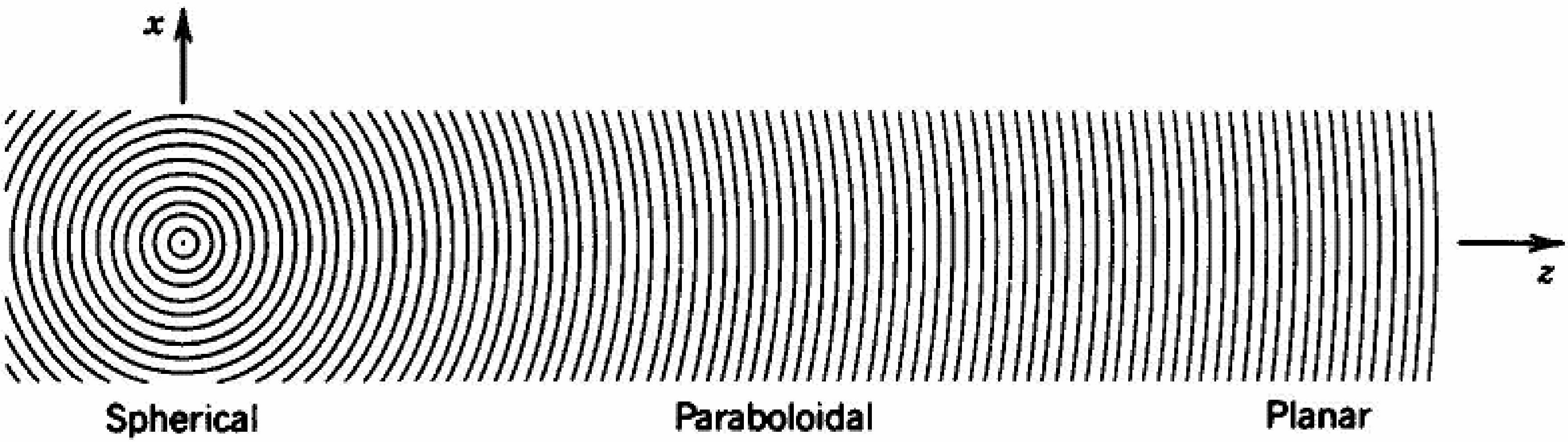
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2ik\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

波の振幅 $f$ が$z$方向に関して（波長スケールで）緩やかに変化する場合(slowly varying envelope approximation)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} << k\frac{\partial f}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Paraxial (近軸)ヘルムホルツ方程式

# 近軸ヘルムホルツ方程式の解①




$$u(\boldsymbol{r}) = \frac{A}{r} e^{ikr} \longrightarrow$$

近似

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} \\ &= z\left(1 + \frac{x^2+y^2}{z^2}\right)^{1/2} \\ &\cong z + \frac{x^2+y^2}{2z} \end{aligned}}$$

$$u(\boldsymbol{r}) = \frac{A}{z} \exp\left[ik\left(z + \frac{x^2+y^2}{2z}\right)\right]$$

$$\left(f = \frac{A}{z}\exp\left[ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right]\right)$$

$$u(\boldsymbol{r}) = Ae^{ikz}$$

$$(f = 1)$$

この２つは解になっている

# 近軸ヘルムホルツ方程式の解②

放物面波 (paraboloidal wave) の場合、

$$f = \frac{A}{z}\exp\left[ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right]$$

$z \to z - iz_0$ と置き換えても、近軸ヘルムホルツ方程式を満たす

$$f = \frac{A}{z-iz_0}\exp\left[ik\frac{x^2+y^2}{2(z-iz_0)}\right]$$

←実はこれが既にガウシアンビームを表している。

関数$R(z)$, $w(z)$を次のように定義する：

$$\frac{1}{z-iz_0} = \frac{z+iz_0}{z^2+z_0^2} = \frac{1}{R(z)} + i\frac{2}{kw^2(z)}$$

$$R(z) \equiv z\left[1+\left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right] \quad w(z) \equiv w_0\left[1+\left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]^{1/2} \quad w_0 \equiv \left(\frac{2z_0}{k}\right)^{1/2}$$

# ガウシアン (Gaussian) ビーム

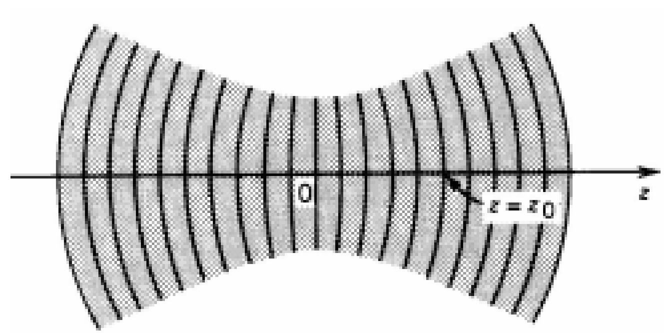
$$f = \frac{A}{z - iz_0}\exp\left[ik\frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{R(z)} + i\frac{2}{kw^2(z)}\right)\right]$$

$$= A_0\frac{w_0}{w(z)}\exp\left[-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right]\exp\left[ik\frac{\rho^2}{2R(z)} - i\varsigma(z)\right]$$

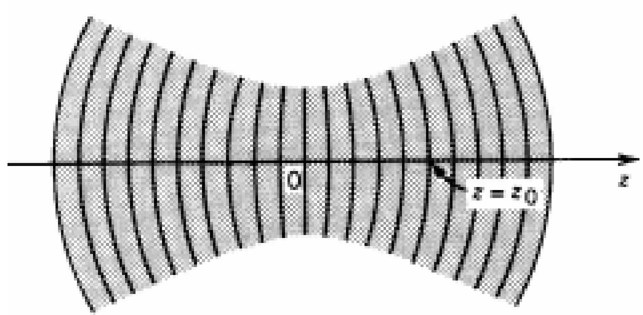
$$\left(\begin{array}{l}\zeta(z) \equiv \tan^{-1}\left(\dfrac{z}{z_0}\right)\\ \rho \equiv (x^2+y^2)^{1/2}\end{array}\right)$$

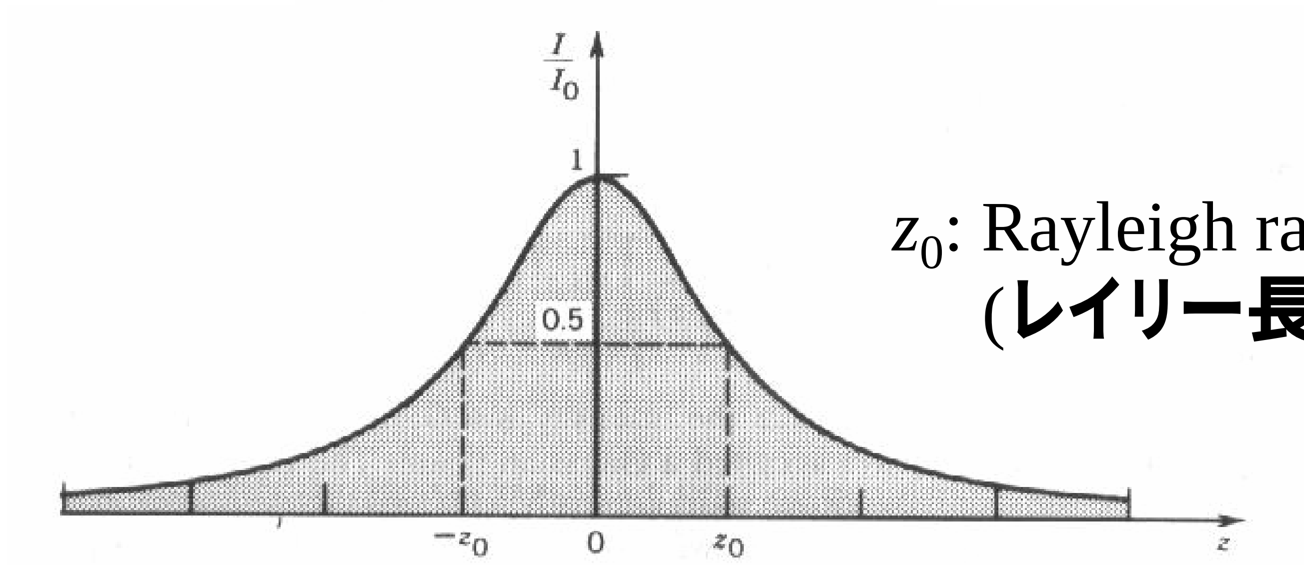
$$u = fe^{ikz} = A_0\frac{w_0}{w(z)}\exp\left[-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right]\exp\left[ik\left(z + \frac{\rho^2}{2R(z)}\right) - i\varsigma(z)\right]$$

$$I \equiv |u|^2 = I_0\left[\frac{w_0}{w(z)}\right]^2\exp\left[-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}\right]$$



# z軸上の強度変化

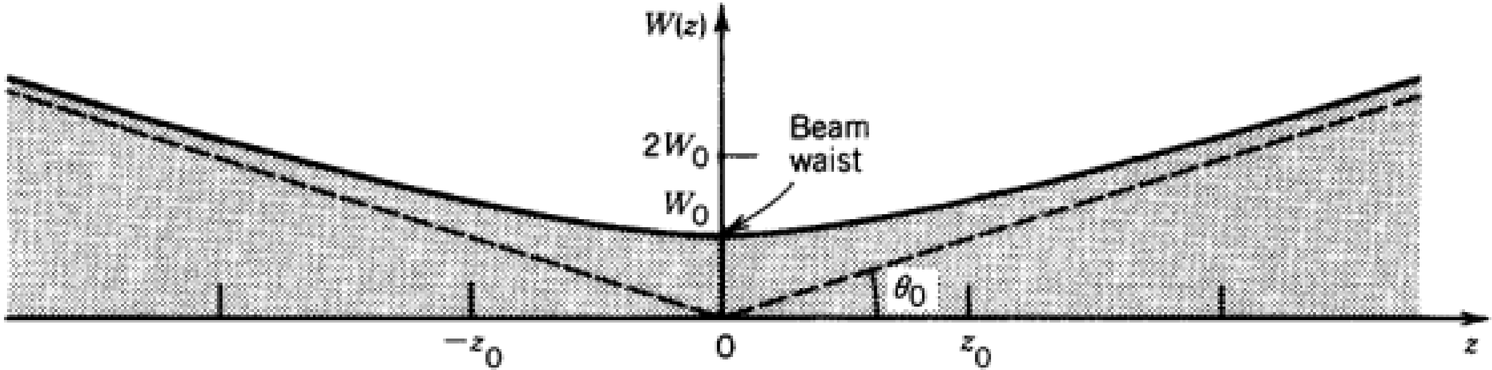



$z_0$: Rayleigh range
(レイリー長)

$$I(0,0,z) = I_0\left[\frac{w_0}{w(z)}\right]^2 = \frac{I_0}{1+(z/z_0)^2}$$

# ビーム半径(Beam radius)



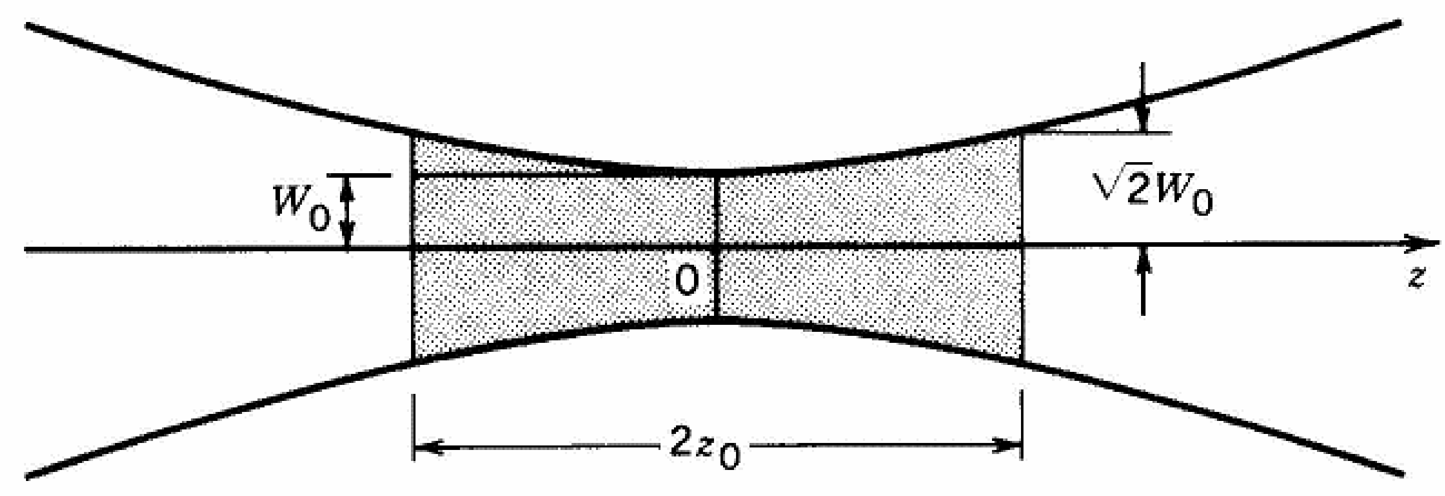

$$w(z) \equiv w_0 \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{1/2} \qquad w_0 = \left( \frac{\lambda z_0}{\pi} \right)^{1/2}$$

: beam waist (**ビームウエスト**)

$$\theta_0 = \lim_{z \to \infty} \frac{w(z)}{z} = \frac{w_0}{z_0} = \frac{\lambda}{\pi w_0}$$

: divergence angle (**広がり角**)

# 焦点深度 (depth of focus)



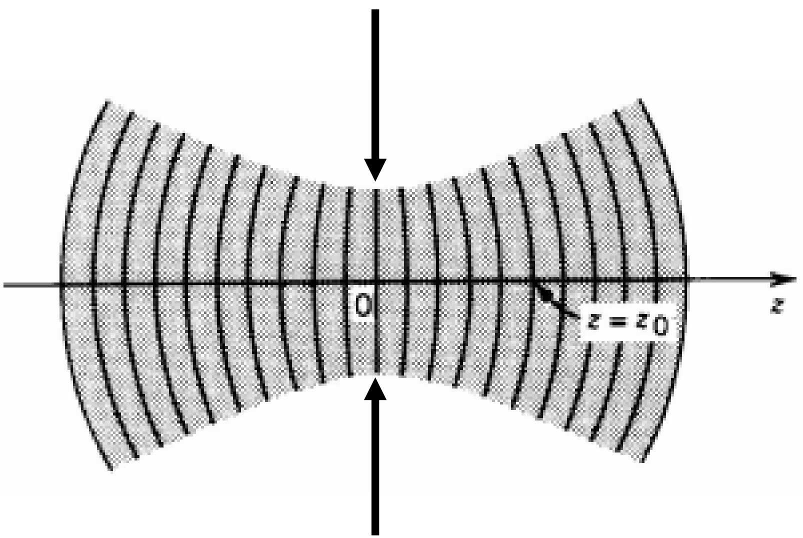

ビーム半径が $\sqrt{2}w_0$以下である領域の長さ

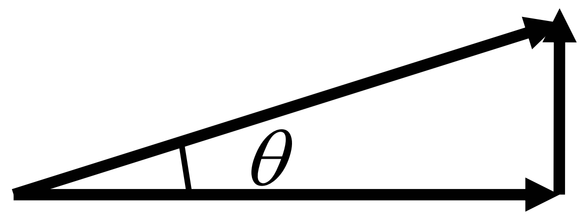
(強度が $I_0 / 2$ 以上である領域の長さ)

$2z_0$: depth of focus (confocal parameter)

# ガウシアンビームと不確定性原理

$$\Delta x \approx w_0 \rightarrow \Delta p \approx \frac{h}{\Delta x} = \frac{h}{w_0}$$



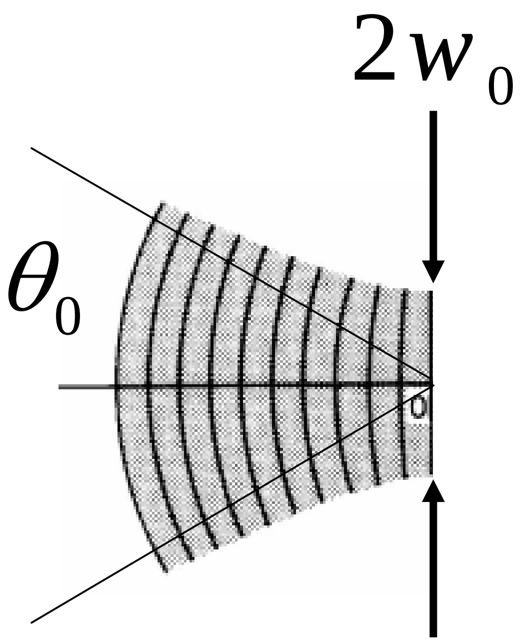




$$\Delta p \approx \frac{h}{w_0}$$

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$\theta = \frac{\Delta p}{p} = \frac{\lambda}{h} \cdot \frac{h}{w_0} = \frac{\lambda}{w_0}$$

# ビームはどこまで絞れるのか？

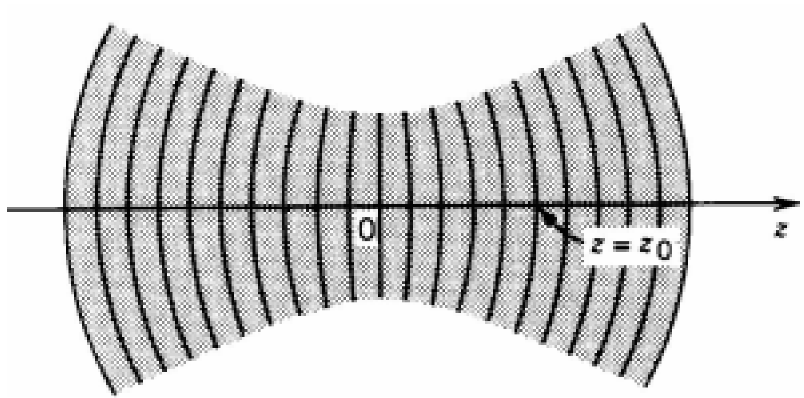


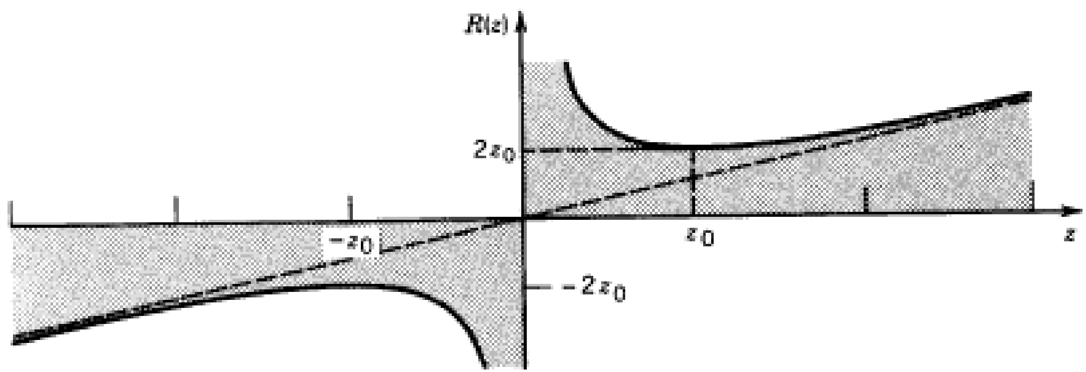

$$\theta \approx \frac{\lambda}{w_0} \rightarrow w_0 \approx \frac{\lambda}{\theta}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $w_0 \approx \lambda$

**ビームは波長以下には絞れない**

# 波面の曲率




c.f. paraboloidal wave

$$R(z) \equiv z\left[1+\left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right] \xrightarrow{z >> z_0} z$$

$$u \propto \exp\left[ik\left(z+\frac{\rho^2}{2z}\right)\right]$$

# エルミート・ガウシアンビーム

$$u_{l,m}(x,y,z) = A_{l,m}\left[\frac{w_0}{w(z)}\right] G_l\left[\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right] G_m\left[\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right]$$

$$\times \exp\left[ik\left(z + \frac{x^2+y^2}{2R(z)}\right) - i(l+m+1)\varsigma(z)\right]$$

$$\left(G_l(\xi) \equiv H_l(\xi)\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)\right)$$