物質中のマックスウェル方程式

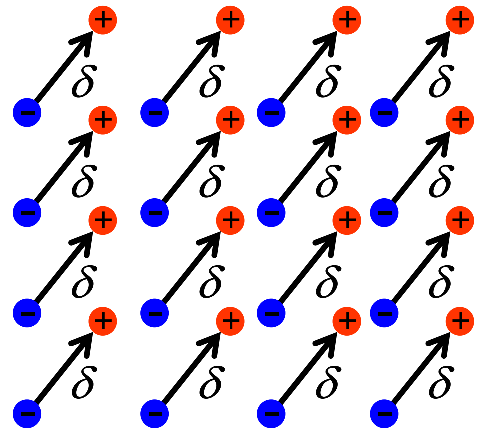
この講義（光エレクトロニクス）では
物質　誘電体

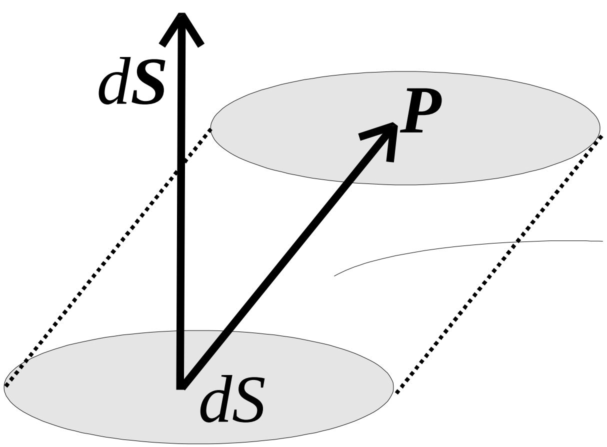
誘電体（dielectric medium）とは、電場Eによって分極Pが誘起される物質（磁気的性質はないとする）

分極（ベクトル）の定義

分極ベクトルとは、
単位体積あたりの双極子モーメントの和

$$\boldsymbol{P} \equiv n\boldsymbol{p} = nq\boldsymbol{\delta}$$





$$\boldsymbol{P} \cdot d\boldsymbol{S} = nq\boldsymbol{\delta} \cdot d\boldsymbol{S}$$

$$= nq \times \delta dS \cos\theta$$

面素dSを通過した電荷の量

分極電流

分極の時間微分は、電流密度の定義そのものである（分極電流密度）

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

この分極電流は、アンペールの法則のjに代入しなければならない

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$$ 代入

分極電荷

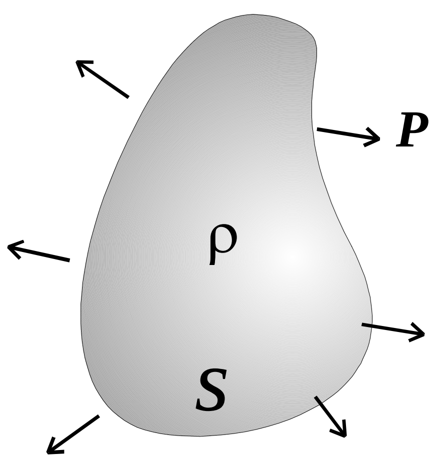
電荷の保存則より

$$\int_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV \quad \rightarrow \int_S \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV$$

$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$ **代入**

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV$$

$$\rightarrow \int_S \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S} = -\int_V \rho\, dV \quad \rightarrow \nabla\cdot\boldsymbol{P} = -\rho$$



分極の湧き出し (のマイナスは) 、
電荷密度を与える (分極電荷密度) 。

この分極電荷密度は、ガウスの法則の
ρに代入しなければならない。

誘電体（分極がある媒質中）のマクスウェル方程式

代入

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho \quad -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$$

代入

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

誘電体 (分極がある媒質中) の
マクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \left(\boldsymbol{P} + \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \right) = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\boldsymbol{P} + \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \right)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

電束密度

次のベクトル場を便宜的に定義してみる

$$\boldsymbol{D} \equiv \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \quad \text{(電束密度)}$$

すると、マックスウェル方程式は、以下のように簡単になる

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

更に、次のベクトル場 (磁場) を便宜的に定義してみる

$$\boldsymbol{H} \equiv \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M} \Leftrightarrow \boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})$$

誘電体では、近似的に磁化ベクトル$M=0$である。すると、
$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$より, マクスウェル方程式は、次のように表現できる：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$$

電磁波のエネルギー密度

何が保存する量か？

$$\boldsymbol{H}\cdot\left(\nabla\times\boldsymbol{E}\right)=-\mu_0\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{H}^2$$

$$-)\quad \boldsymbol{E}\cdot\left(\nabla\times\boldsymbol{H}\right)=\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}+\varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2$$

$$\nabla\cdot\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2+\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{H}^2\right)}_{\text{電磁波のエネルギー密度}}-\underbrace{\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}}_{\text{分極電流になした仕事}}$$

$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\equiv\boldsymbol{S}$：ポインティングベクトル (Poynting vector)

分極と電場の関係

空間依存性	空間対称性	波長依存性	線形性
均一 Homogeneous	**等方的** Isotropic	**非分散的** Nondispersive	**線形** Linear
不均一 Inhomogeneous (**ファイバー**)	**非等方的** anisotropic (**複屈折性**)	**分散的** Dispersive (**吸収と分散**)	**非線形** Nonlinear (SHGなど)

最も簡単な関係

Homogeneous, isotropic, nondispersive, and Linear

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi \boldsymbol{E}$$

χ :電気感受率(electric susceptibility)

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P} + \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

$\varepsilon \equiv \varepsilon_0 (1 + \chi)$:誘電率(electric permittivity)

一様媒質中のマクスウェル方程式

Homogeneous, isotropic, nondispersive, and Linear case ($\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi \boldsymbol{E}$)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$$

真空中のマクスウェル方程式のε_0を単にεに置き換えたもの

一様媒質中の電磁波 (平面波)

Homogeneous, isotropic, nondispersive, and Linear case ($\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi \boldsymbol{E}$)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0 \cos(kr - \omega t) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}]$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{H}_0 \cos(kr - \omega t) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{H}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}]$$

TEM (Transverse Electromagnetic) wave

光速：(位相速度) $c = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu_0}}$ $\qquad \sqrt{\varepsilon} E_0 = \sqrt{\mu_0} H_0$

屈折率：$n = \dfrac{c_0}{c} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \sqrt{1 + \chi} \cong 1 + \dfrac{\chi}{2}$