2階線形常微分方程式

数学的準備①　マクローリン展開

無限回微分可能な関数$f(x)$が、以下のようにべき級数展開できるとする:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

係数a_nを求めるには、上式の両辺をn回微分して、x=0を代入すればよい

$$\left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=0} = \left.\frac{d^n}{dx^n}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots)\right|_{x=0} = n! a_n$$

よって、

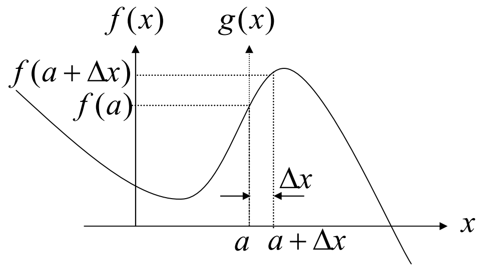
$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \left(f^{(n)}(x) \equiv \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right)$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots$$

テイラー展開と近似

$x=a$ を新しい原点とする関数

$$g(x)=f(a+x)$$



を考えて$g(x)$ をマクローリン展開すると

$$g(x)=g(0)+g'(0)x+\frac{1}{2!}g''(0)x^2+\cdots\cdots+\frac{g^{(n)}(a)}{n!}x^n+\cdots$$

xは「原点からの差異」を表すので、これをΔxと書き換えて、g を f で表すと

$$f(a+\Delta x)=f(a)+f'(a)\Delta x+\frac{1}{2!}f''(a)(\Delta x)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(\Delta x)^n+\cdots$$

0次近似　1次近似　2次近似　n次近似

指数関数・三角関数のべき級数展開

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

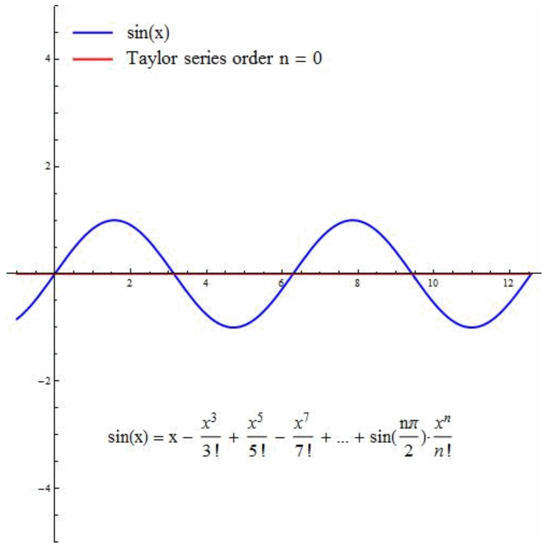
$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$e^{ix}=1+ix-\frac{1}{2!}x^2-i\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(ix)^n$$

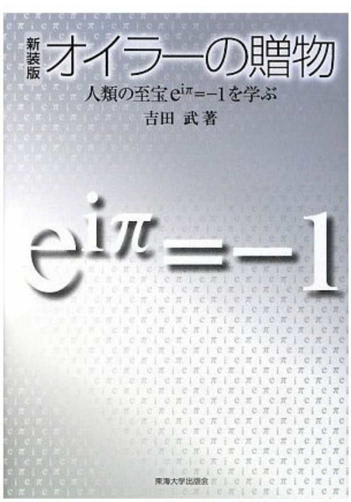
$$=\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots\right)+i\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots\right)=\boxed{\cos x+i\sin x}$$

Sin(x)のテイラー展開の収束



http://mathforum.org/mathimages/index.php/Taylor_Series

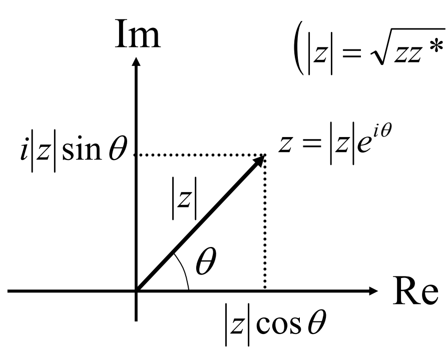
数学的準備② オイラーの公式



$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta$$

$$\left(|z| = \sqrt{zz^*}\right)$$



指数関数の性質

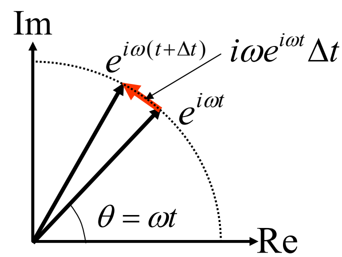
$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$$

$$\frac{d}{d\theta}e^{i\theta} = ie^{i\theta}$$

cf.　三角関数の加法定理

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$



特に $\theta = \omega t$　と表されるとき

$$\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = \frac{de^{i\theta}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = i\omega e^{i\omega t}$$

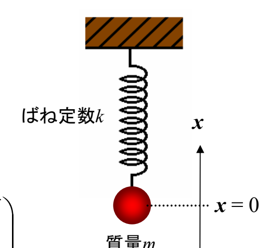
（注意）指数関数の微分では、実部と虚部は混じらない

$$\mathrm{Re}\left[\frac{de^{i\omega t}}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left[e^{i\omega t}\right] \qquad \mathrm{Im}\left[\frac{de^{i\omega t}}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\mathrm{Im}\left[e^{i\omega t}\right]$$

単振動

ばね定数kのばねに質量mのおもりがついているとする。自然長からの伸びをxとすると、運動方程式は

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$



解の形として、指数関数　$x = e^{\alpha t}$　を仮定して代入すると

$$\left(\alpha^2 + \frac{k}{m}\right)e^{\alpha t} = 0 \rightarrow \alpha = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega_0 \qquad \left(\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

よって、一般解は

$$x(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}$$

初期条件として、t=0 のとき $x = x_0, \dot{x} = 0$ の場合、

$$A = B = \frac{x_0}{2} \rightarrow x(t) = \frac{x_0}{2}e^{i\omega_0 t} + \frac{x_0}{2}e^{-i\omega_0 t} = x_0\cos\omega_0 t$$

空気抵抗は ∝速度、それとも ∝速度^2

粘性抵抗ならば

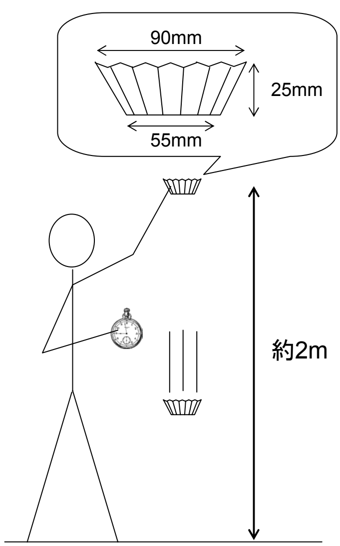
$$F_V = -bv \rightarrow m\frac{dv}{dt} = -bv + mg \xrightarrow{\text{無限の時間}} v_t = \frac{mg}{b} \quad \text{(終端速度)}$$

慣性抵抗ならば

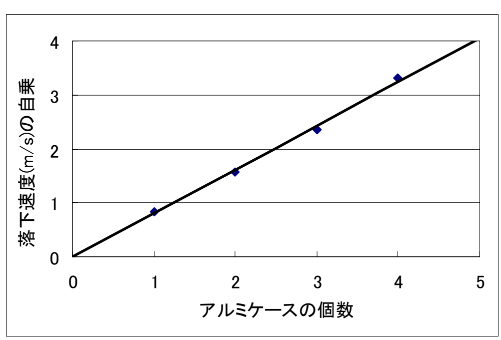
$$F_I = -bv^2 \rightarrow m\frac{dv}{dt} = -bv^2 + mg \xrightarrow{\text{無限の時間}} v_t = \sqrt{\frac{mg}{b}} \quad \text{(終端速度)}$$

同じ形状で、質量の異なる物体を落下させたとき、終端速度が質量に比例すれば粘性抵抗、質量の平方根に比例すれば慣性抵抗

実験:アルミカップの終端速度

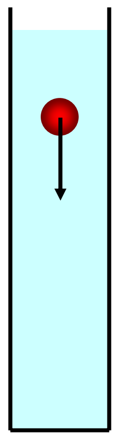


アルミカップの個数	1個	2個	3個	4個
2mの落下時間(s)	2.2	1.6	1.3	1.1
落下速度(m/s)	0.91	1.3	1.5	1.8
落下速度の自乗(m^2/s^2)	0.83	1.6	2.4	3.3



終端速度の自乗は質量に比例→慣性抵抗

粘性抵抗が働く物体の速度変化



$$m\frac{dv}{dt}=-bv+mg \rightarrow \frac{dv}{dt}+\frac{b}{m}v=g$$

非斉次

＜非斉次方程式の一般的解法＞

①まず特殊解を求める（探す）

今の場合、終端速度 $v_t=\frac{mg}{b}$ が特殊解。

②右辺=0とおいて（斉次方程式にして）一般解を求める

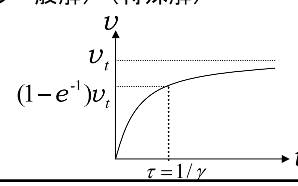
$$\frac{dv}{dt}+\frac{b}{m}v=0 \rightarrow v=Ae^{-\gamma t}\left(\gamma\equiv\frac{b}{m}\right)$$

③（本当の一般解）＝（斉次方程式の一般解）+（特殊解）

$$v=Ae^{-\gamma t}+v_t$$

初速度をゼロとすると、$A=-v_t$

$$v=(1-e^{-\gamma t})v_t$$



減衰振動

速度に比例する抵抗力（粘性抵抗）が働くの単振動の運動方程式は

$$F=m\frac{d^2x}{dt^2}=-b\frac{dx}{dt}-kx \rightarrow \ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2x=0$$

ただし、$\gamma\equiv b/2m, \omega_0=\sqrt{k/m}$ とおいた。

解の形として、指数関数 $x=e^{\alpha t}$ を仮定して代入すると

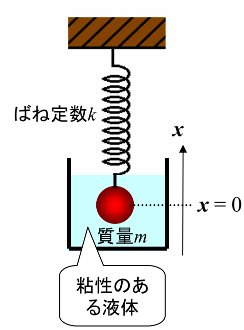
$$\left(\alpha^2+2\gamma\alpha+\omega_0^2\right)e^{\alpha t}=0 \rightarrow \alpha=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$$

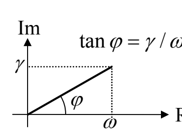
$\gamma<\omega_0$ の場合、$\alpha_\pm=-\gamma\pm i\omega\left(\omega\equiv\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}<\omega_0\right)$

一般解は $x(t)=Ae^{\alpha_+t}+Be^{\alpha_-t}=e^{-\gamma t}\left(Ae^{i\omega t}+Be^{-i\omega t}\right)$

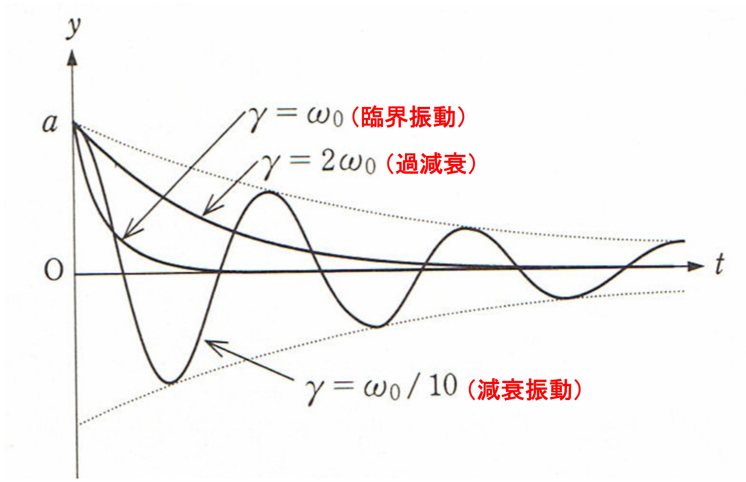
初期条件として、t=0 のとき $x=x_0, \dot{x}=0$ の場合、

$$A=\frac{\omega-i\gamma}{2\omega}x_0, B=\frac{\omega+i\gamma}{2\omega}x_0 \rightarrow x(t)=x_0\frac{\sqrt{\omega^2+\gamma^2}}{\omega}e^{-\gamma t}\cos(\omega t-\varphi)$$



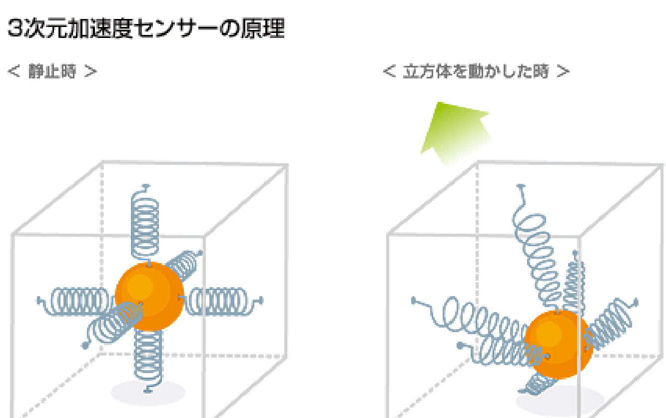


臨界減衰と過減衰



兵頭俊夫「考える力学」p77

加速度センサーの原理

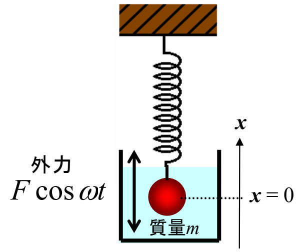


http://www.tdk.co.jp/techmag/knowledge/200612/

強制振動

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx + F\cos\omega t$$

$$\rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \boxed{\frac{F}{m}\cos\omega t} \leftarrow \text{非斉次}$$



非斉次方程式の一般的解法（斉次方程式の一般解+特殊解）でも解ける。
その方法は教科書に譲り、ここでは定常解（十分時間が経った後の解）を求めよう。

＜解法のテクニック＞

① 実部にのみ意味があると約束して、周期関数を複素表示する

$$\frac{F}{m}\cos\omega t = \frac{F}{m}\mathrm{Re}\left[e^{i\omega t}\right] \rightarrow \frac{F}{m}e^{i\omega t}$$

② $x(t)$は（定常状態では）外力と同じ角周波数ωで振動する周期関数と仮定する。

$$x(t) = x(\omega)e^{i\omega t}$$

共鳴・共振（Resonance）

運動方程式に代入して、$x(\omega)$について解くと

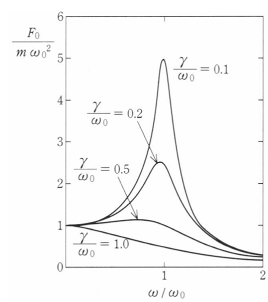
$$x(\omega) = \frac{F}{m}\cdot\frac{1}{-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2}$$

振動の振幅の大きさは、

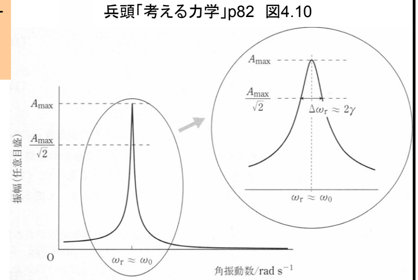
$$\left|x(\omega)\right| = \frac{F}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

特に、$\gamma \ll \omega_0$の場合、$\omega \sim \omega_0$では、

$$\left|x(\omega)\right| = \frac{F}{2\omega_0 m}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\omega_0-\omega)^2 + \gamma^2}}$$



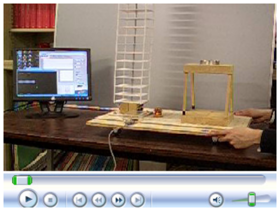
兵頭「考える力学」p82 図4.10



基礎物理学実験テキスト「振動・波動Ⅱ」p140 図5

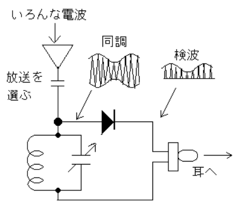
様々な共鳴現象

＜地震波の共鳴＞



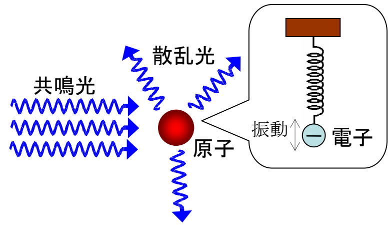
http://www.kz.tsukuba.ac.jp/~sakai/dsn.htm

＜ラジオ（LC並列共振回路）＞

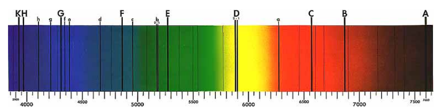


http://www9.wind.ne.jp/fujin/diy/radio/radio02.htm

＜原子・分子による光の吸収＞



共鳴する原子　原子・分子の共鳴周波数に等しい光（共鳴光）を照射すると、原子内の電子が振動し、光は散乱される。



太陽光スペクトルの暗線（フラウンフォーファー線）
太陽の大気中に存在する様々な原子・分子が、固有の共鳴周波数の光を吸収するため、多数の暗線が生じる。