

2階線形常微分方程式

数学的準備① マクローリン展開

無限回微分可能な関数 $f(x)$ が、以下のようにべき級数展開できるとする:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

係数 a_n を求めるには、上式の両辺を n 回微分して、 $x=0$ を代入すればよい

$$\left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=0} = \frac{d^n}{dx^n} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots) \Big|_{x=0} = n!a_n$$

よって、

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \left(f^{(n)}(x) \equiv \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right)$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots$$

テイラー展開と近似

$x = a$ を新しい原点とする関数

$$g(x) = f(a + x)$$

を考えて $g(x)$ をマクローリン展開すると

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2!}g''(0)x^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}x^n + \dots$$

x は「原点からの差異」を表すので、これを Δx と書き換えて、 g を f で表すと

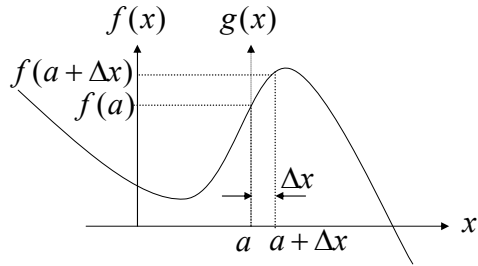
$$f(a + \Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(a)(\Delta x)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(\Delta x)^n + \dots$$

0次近似

1次近似

2次近似

n 次近似



指数関数・三角関数のべき級数展開

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

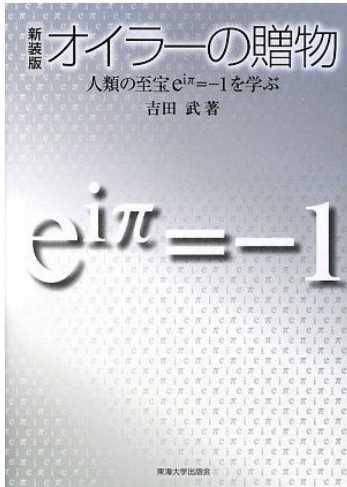
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(ix)^n$$

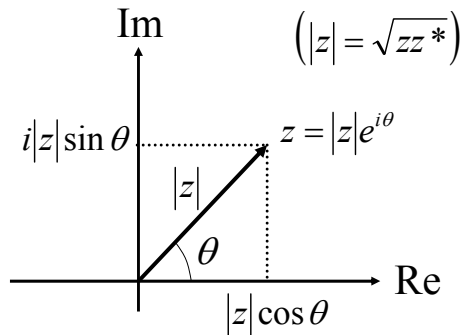
$$= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots\right) + i\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \dots\right) = \cos x + i \sin x$$

数学的準備② オイラーの公式



$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|\cos \theta + i|z|\sin \theta$$



指数関数の性質

$$e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}$$

$$\frac{d}{d\theta} e^{i\theta} = ie^{i\theta}$$

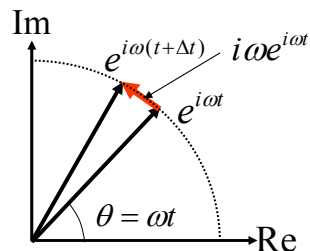
特に $\theta = \omega t$ と表されるとき

$$\frac{d}{dt} e^{i\omega t} = \frac{de^{i\theta}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = i\omega e^{i\omega t}$$

cf. 三角関数の加法定理

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$



(注意) 指数関数の微分では、実部と虚部は混じらない

$$\operatorname{Re} \left[\frac{de^{i\omega t}}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \operatorname{Re} [e^{i\omega t}] \quad \operatorname{Im} \left[\frac{de^{i\omega t}}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \operatorname{Im} [e^{i\omega t}]$$

単振動

ばね定数 k のばねに質量 m のおもりがついているとする。自然長からの伸びを x とすると、運動方程式は

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

解の形として、指数関数 $x = e^{\alpha t}$ を仮定して代入すると

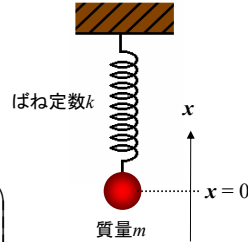
$$\left(\alpha^2 + \frac{k}{m} \right) e^{\alpha t} = 0 \rightarrow \alpha = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i \omega_0 \quad \left(\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$$

よって、一般解は

$$x(t) = A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t}$$

初期条件として、 $t=0$ のとき $x = x_0, \dot{x} = 0$ の場合、

$$A = B = \frac{x_0}{2} \rightarrow x(t) = \frac{x_0}{2} e^{i\omega_0 t} + \frac{x_0}{2} e^{-i\omega_0 t} = x_0 \cos \omega_0 t$$



空気抵抗は \propto 速度、それとも \propto 速度²

粘性抵抗ならば

$$F_V = -bv \rightarrow m \frac{dv}{dt} = -bv + mg \xrightarrow{\text{無限の時間}} v_t = \frac{mg}{b}$$

終端速度

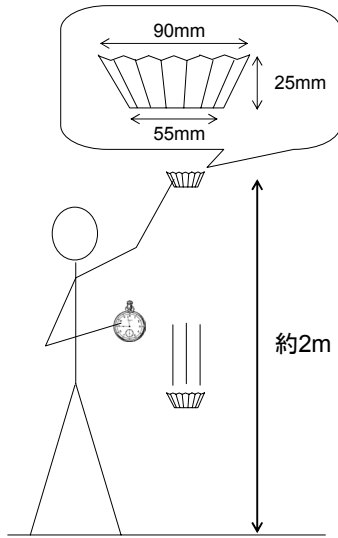
慣性抵抗ならば

$$F_I = -bv^2 \rightarrow m \frac{dv}{dt} = -bv^2 + mg \xrightarrow{\text{無限の時間}} v_t = \sqrt{\frac{mg}{b}}$$

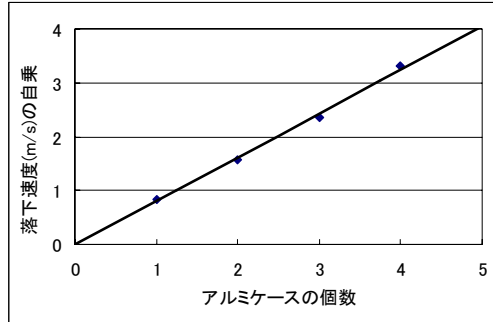
終端速度

同じ形状で、質量の異なる物体を落下させたとき、終端速度が質量に比例すれば粘性抵抗、質量の平方根に比例すれば慣性抵抗

実験：アルミカップの終端速度

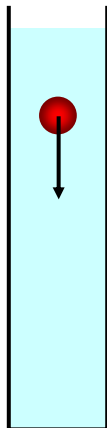


アルミカップの個数	1個	2個	3個	4個
2mの落下時間(s)	2.2	1.6	1.3	1.1
落下速度(m/s)	0.91	1.3	1.5	1.8
落下速度の自乗(m ² /s ²)	0.83	1.6	2.4	3.3



終端速度の自乗は質量に比例→慣性抵抗

粘性抵抗が働く物体の速度変化



$$m \frac{dv}{dt} = -bv + mg \rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{b}{m}v = g$$

非斉次

<非斉次方程式の一般的解法>

①まず特殊解を求める(探す)

今の場合、終端速度 $v_t = \frac{mg}{b}$ が特殊解。

②右辺=0とおいて(斉次方程式にして)一般解を求める

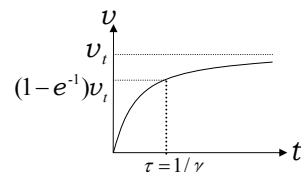
$$\frac{dv}{dt} + \frac{b}{m}v = 0 \rightarrow v = Ae^{-\gamma t} \left(\gamma \equiv \frac{b}{m} \right)$$

③(本当の一般解) = (斉次方程式の一般解) + (特殊解)

$$v = Ae^{-\gamma t} + v_t$$

初速度をゼロとすると、 $A = -v_t$

$$v = (1 - e^{-\gamma t})v_t$$



減衰振動

速度に比例する抵抗力(粘性抵抗)が働く単振動の運動方程式は

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - kx \rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

ただし、 $\gamma \equiv b/2m, \omega_0 = \sqrt{k/m}$ とおいた。

解の形として、指数関数 $x = e^{\alpha t}$ を仮定して代入すると

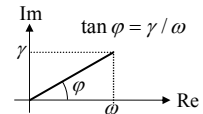
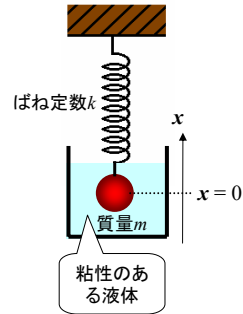
$$(\alpha^2 + 2\gamma + \omega_0^2)e^{\alpha t} = 0 \rightarrow \alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$\gamma < \omega_0$ の場合、 $\alpha_{\pm} = -\gamma \pm i\omega$ ($\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$)

一般解は $x(t) = Ae^{\alpha_+ t} + Be^{\alpha_- t} = e^{-\gamma t} (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t})$

初期条件として、 $t=0$ のとき $x = x_0, \dot{x} = 0$ の場合、

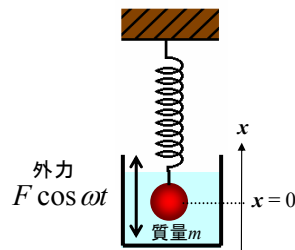
$$A = \frac{\omega - i\gamma}{2\omega} x_0, B = \frac{\omega + i\gamma}{2\omega} x_0 \rightarrow x(t) = x_0 \frac{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}}{\omega} e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \varphi)$$



強制振動

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - kx + F \cos \omega t$$

$$\rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \cos \omega t \leftarrow \text{非齊次}$$



非齊次方程式の一般的解法(齊次方程式の一般解+特殊解)でも解ける。その方法は教科書に譲り、ここでは定常解(十分時間が経った後の解)を求めよう。

<解法のテクニック>

- ① 実部にものみ意味があると約束して、周期関数を複素表示する

$$\frac{F}{m} \cos \omega t = \frac{F}{m} \operatorname{Re}[e^{i\omega t}] \rightarrow \frac{F}{m} e^{i\omega t}$$

- ② $x(t)$ は(定常状態では)外力と同じ角周波数 ω で振動する周期関数と仮定する。

$$x(t) = x(\omega) e^{i\omega t}$$

共鳴・共振 (Resonance)

運動方程式に代入して、 $x(\omega)$ について解くと

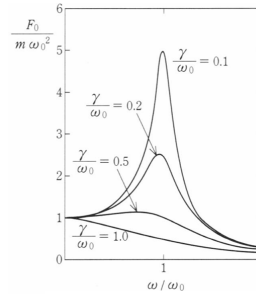
$$x(\omega) = \frac{F}{m} \cdot \frac{1}{-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2}$$

振動の振幅の大きさは、

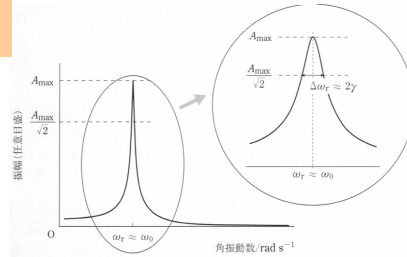
$$|x(\omega)| = \frac{F}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

特に、 $\gamma \ll \omega_0$ の場合、 $\omega \sim \omega_0$ では、

$$|x(\omega)| = \frac{F}{2\omega_0 m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}}$$



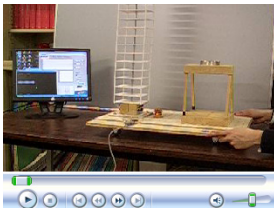
兵頭「考える力学」p77 図4.10



基礎物理学実験テキスト「振動・波動Ⅱ」p140 図5

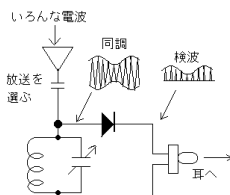
様々な共鳴現象

<地震波の共鳴>



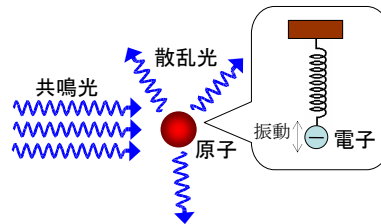
<http://www.kz.tsukuba.ac.jp/~sakai/dsn.htm>

<ラジオ(LC並列共振回路)>

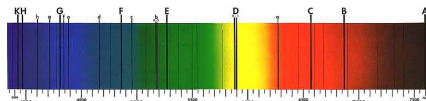


<http://www9.wind.ne.jp/fujin/diy/radio/radio02.htm>

<原子・分子による光の吸収>



共鳴する原子 原子・分子の共鳴周波数に等しい光(共振光)を照射すると、原子内の電子が振動し、光は散乱される。



太陽光スペクトルの暗線(Fraunhofer ーファー線)
太陽の大気中に存在する様々な原子・分子が、固有の共鳴周波数の光を吸収するため、多数の暗線が生じる。