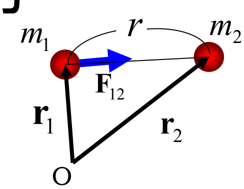
第3章
様々な力

種々の力

万有引力 $\mathbf{F}_{12} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\mathbf{e}_{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}$



電磁気力

$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$

$$\varepsilon_0 \nabla\cdot\mathbf{E} = \rho \qquad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad \nabla\times\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j} + \varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t})$$

静電気力、磁力　原子間力、分子間力

弾性力　これらの区別はあいまい（起源はみな同じ電磁気力）　束縛力（垂直抗力、張力）

摩擦力　抵抗力（粘性抵抗、慣性抵抗）

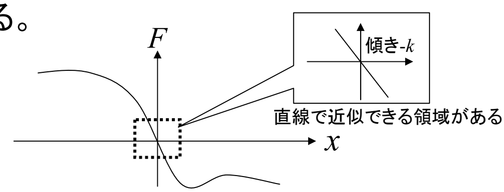
弾性力
（物体がその形を維持しようとする力）

自然長（力が働いてないときの長さ）からの「ずれ」をxとする。この「ずれ」を元に戻そうとする力Fは、xが十分小さいならば、近似的にxに比例する。

$$F = -kx$$

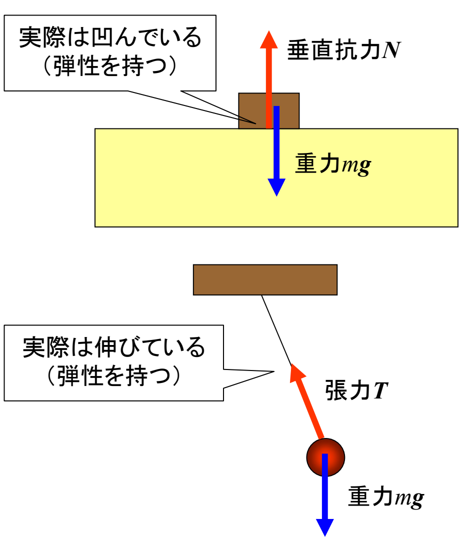
k : ばね定数
(spring constant)

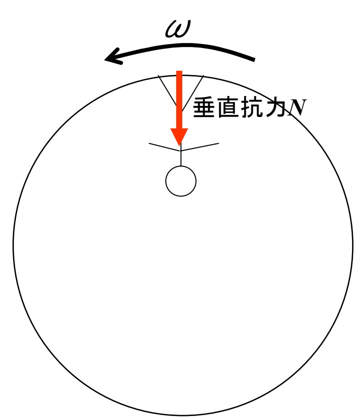
これを**フックの法則**という（あくまで近似法則）。負号は物質の変位を戻す方向に力が働くことを表現する。



ばねはかりは、フックの法則が成り立つ力の範囲が広いばねを利用して重さを測る道具

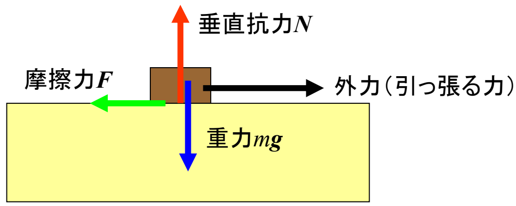
束縛力（張力・垂直抗力）
（物体の位置を束縛する弾性力）

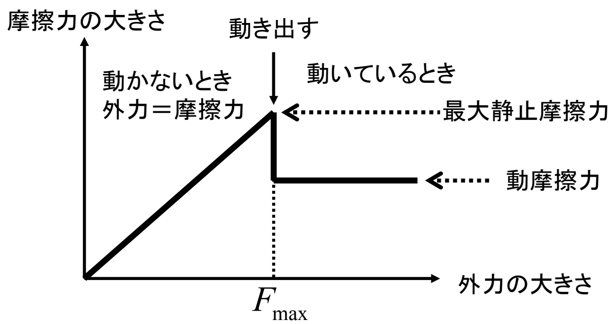




摩擦力

物質の移動を妨げる分子・原子間力？





静止摩擦係数

$$F_{\max} = \mu N$$

クーロンの第1法則

$$F = \mu' N$$

クーロンの第2法則

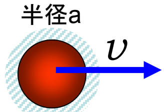
動摩擦係数

$$\mu > \mu'$$

クーロンの第3法則

抵抗力（粘性抵抗、慣性抵抗）

粘性抵抗：物体が近傍の流体を引きずることによって受ける反作用



ストークスの法則

$$F_V = 6\pi a \eta \upsilon$$

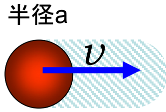
η ：流体の粘性係数

表 3.1 流体の粘性係数と密度（巻末文献 38 による）

物質	粘性係数（$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$）	密度（kg/m^3）
空気（20℃, 1気圧）	1.809×10^{-5}	1.205
空気（30℃, 1気圧）	1.857×10^{-5}	1.165
水（20℃）	1.002×10^{-3}	9.982×10^2
グリセリン（20℃）	1.495	1.264×10^3
グリセリン（30℃）	6.22×10^{-1}	——

藤原「物理学序論としての力学」p.49

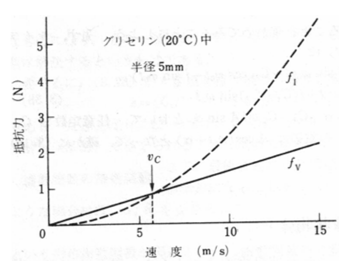
慣性抵抗：物体が通過する空間にある流体との衝突によって受ける反作用



ニュートンによる経験則

$$F_I = \frac{1}{4}\pi \rho a^2 \upsilon^2$$

ρ ：流体の密度



藤原「物理学序論としての力学」p.50

第4章
運動方程式の解法

定数係数の線形常微分方程式

2階　1階

$$a_2\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=f(t) \qquad f(t)\begin{cases}=0 & \text{斉次(同次)}\\ \neq 0 & \text{非斉次(非同次)}\end{cases}$$

せいじ　斉次（同次）
ひせいじ　非斉次（非同次）

1階斉次方程式
（例）放射性崩壊、複利の借金（預金）額

$$\frac{dN}{dt}=-\Gamma N \qquad \frac{dN}{dt}=+\alpha N$$

Γ：1秒間に崩壊する確率　α：金利　N：借金（預金）

2階斉次方程式
（例）単振動、減衰振動

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\underbrace{\boxed{-kx}}_{\text{復元力}} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2}=\underbrace{\boxed{-b\frac{dx}{dt}}}_{\text{粘性抵抗}}-kx$$

k：ばね定数

2階非斉次方程式
（例）自由落下、強制振動

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g \qquad m\frac{d^2x}{dt^2}=-b\frac{dx}{dt}-kx+\underbrace{\boxed{F_0\cos\omega t}}_{\text{周期的な外力}}$$

1階線形常微分方程式

常微分方程式の解法：2つの方針

＜解の形を予測して代入（発見的手法）＞

$$a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

解は微分して同じ関数形になる指数関数で表現されるのではないか？

$$x(t) = Ae^{\alpha t}$$

うまくいかなければ、定数部分Aも時間の関数とおいてみよう（定数変化法）

$$x(t) = A(t)e^{\alpha t}$$

力学B（運動方程式）では、こちらの手法でOK

＜変数分離して両辺を積分（解析的手法）＞

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

$f(t) = 0$ のとき

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x \quad \left(\alpha \equiv \frac{a_1}{a_0} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} dx = \alpha dt$$

両辺を積分して

$$\log x = \alpha t + C$$

$$\therefore x = Ae^{\alpha t} \quad (A = e^C)$$

$a_0 = 0$ のとき

$$\frac{dx}{dt} = g(t) \quad \left(g(t) \equiv \frac{f(t)}{a_0} \right)$$

$$\Leftrightarrow dx = g(t)dt$$

両辺を積分して

$$x = \int g(t)dt + C$$

解ける方程式の形が限られている

放射性元素の崩壊

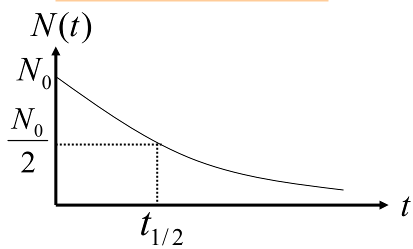
$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

ΓN : 1秒間あたりに崩壊する原子の数
単位はベクレル[Bq]

原子1個あたり、1秒間あたりの崩壊確率

初期の原子数をN_0とすると、

$$N(t) = N_0 e^{-\Gamma t}$$



半減期を $t_{1/2}$ とすると、

$$\Gamma = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{0.693}{t_{1/2}}$$

^{40}Kの場合、半減期は12.8億年＝4.04 × 10^{16}秒

$$\Gamma = \frac{0.693}{4.04 \times 10^{16}\,\mathrm{s}} = 1.72 \times 10^{-17}\,\mathrm{s}^{-1}$$

複利で借金してはいけない

単利

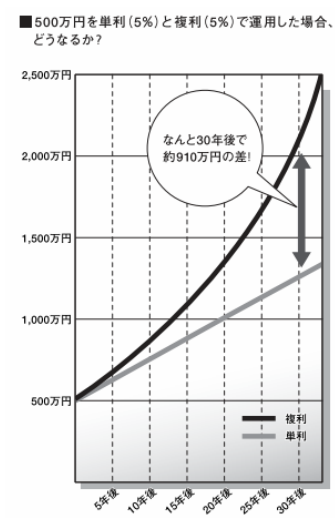
$$\frac{dN}{dt} = +\alpha N_0 \to N(t) = N_0(1 + \alpha t)$$

初期の借金額

複利

$$\frac{dN}{dt} = +\alpha N \to N(t) = N_0 e^{\alpha t}$$

その瞬間の借金額＝初期の借金額＋累積利息



http://money.monex.co.jp/archives/20070225_2.html

「数学の歴史上、最大の発見は何か？」「それは複利である」（byアインシュタイン）

eの発見、それは複利計算から

1年後に発生する利息が元本のα倍とすると $N_0 \xrightarrow{1年後} N_0(1+\alpha)$

利息は毎月発生していると考えると

$$N_0 \xrightarrow{1年後} N_0\left(1+\frac{\alpha}{12}\right)^{12}$$

利息は毎日発生していると考えると

$$N_0 \xrightarrow{1年後} N_0\left(1+\frac{\alpha}{365}\right)^{365}$$

利息は連続的に発生していると考えると

$$N_0 \xrightarrow{1年後} N_0\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^\alpha = N_0 e^\alpha$$

α	e^α	$(1+\alpha)$
0.1	1.105	1.1
0.5	1.65	1.5
1	2.7	2
2	7.4	3
3	20	4

$$e \equiv \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

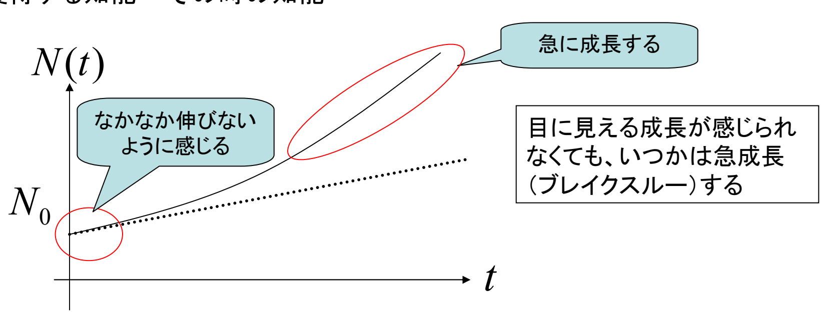
ヤコブ・ベルヌーイ(1683)

人間の知的能力の成長

学習の効率　学習時間

$$dN = \underbrace{\alpha}_{}N dt \rightarrow N(t) = N_0 e^{\alpha t}$$

獲得する知能　その時の知能



目に見える成長が感じられなくても、いつかは急成長(ブレイクスルー)する