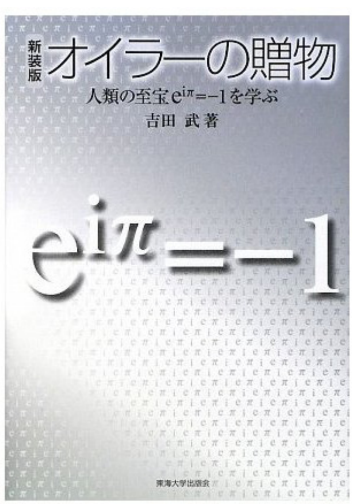
4月15日のGoogleトップページ
オイラー生誕307周年

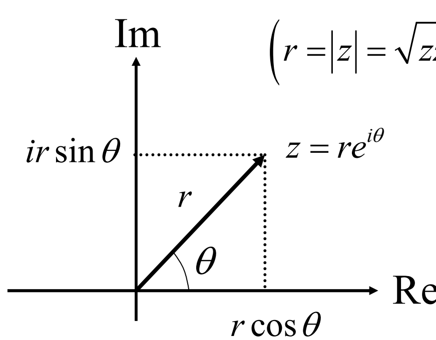
オイラーの公式（1748）



$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\left(r = |z| = \sqrt{zz^*}\right)$$



eは自然対数の底（これもオイラーの発見）

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{\Delta x \to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] \quad (n \equiv \frac{x}{\Delta x})$$

$$= \frac{1}{x}\log_a e \xrightarrow{a=e} \frac{1}{x}$$

eの発見、それは複利計算から

1年後に発生する利息が元本のα倍とすると $N_0 \xrightarrow{\text{1年後}} N_0(1+\alpha)$

利息は毎月発生していると考えると

$$N_0 \xrightarrow{\text{1年後}} N_0\left(1+\frac{\alpha}{12}\right)^{12}$$

利息は毎日発生していると考えると

$$N_0 \xrightarrow{\text{1年後}} N_0\left(1+\frac{\alpha}{365}\right)^{365}$$

利息は連続的に発生していると考えると

$$N_0 \xrightarrow{\text{1年後}} N_0\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\alpha} = N_0 e^{\alpha}$$

α	$1+\alpha$	e^{α}
0.1	1.1	1.105
0.5	1.5	1.65
1	2	2.7
2	3	7.4
3	4	20

$$e \equiv \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ヤコブ・ベルヌーイ（1683）

二項分布とポアソン分布

M回の試行で確率pの事象がN回起こる確率（二項分布）

$$P(N) = \frac{M!}{N!(M-N)!} p^N (1-p)^{(M-N)}$$

$$\xrightarrow{p \ll 1,\, M \to \infty} \frac{M^N}{N!} \left(\frac{\bar{N}}{M} \right)^N \lim_{M \to \infty} \left(1 - \frac{\bar{N}}{M} \right)^M = \boxed{e^{-\bar{N}} \frac{\bar{N}^N}{N!}}$$

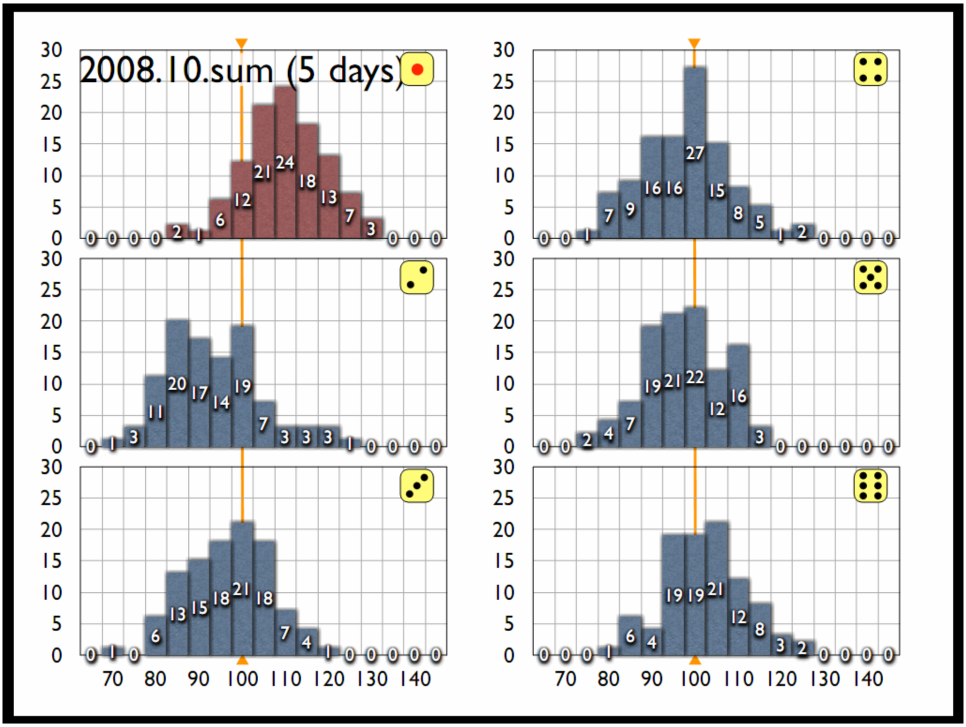
ポアソン分布

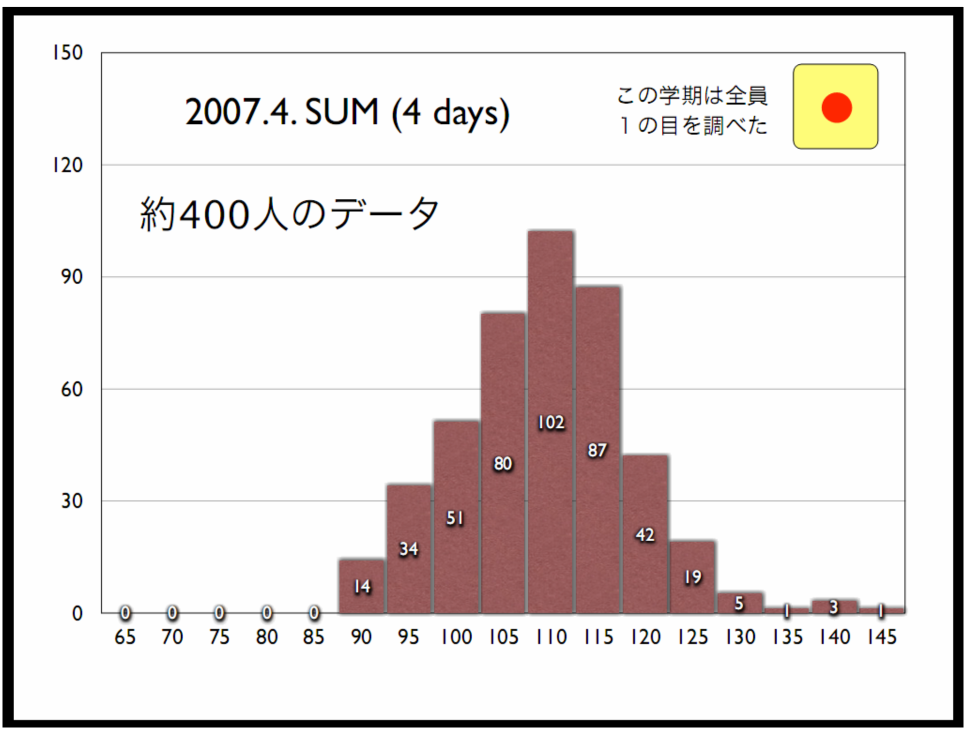
期待値（平均値）$\bar{N} = Mp$

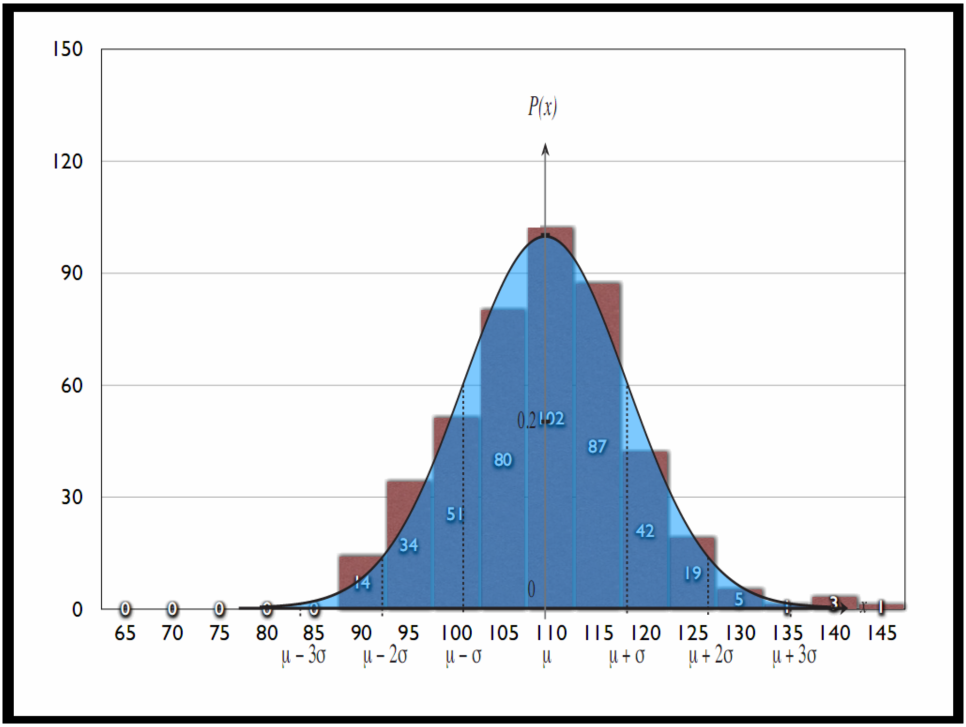
標準偏差　$\sigma = \sqrt{Mp(1-p)} \xrightarrow{p \ll 1} \sqrt{\bar{N}}$

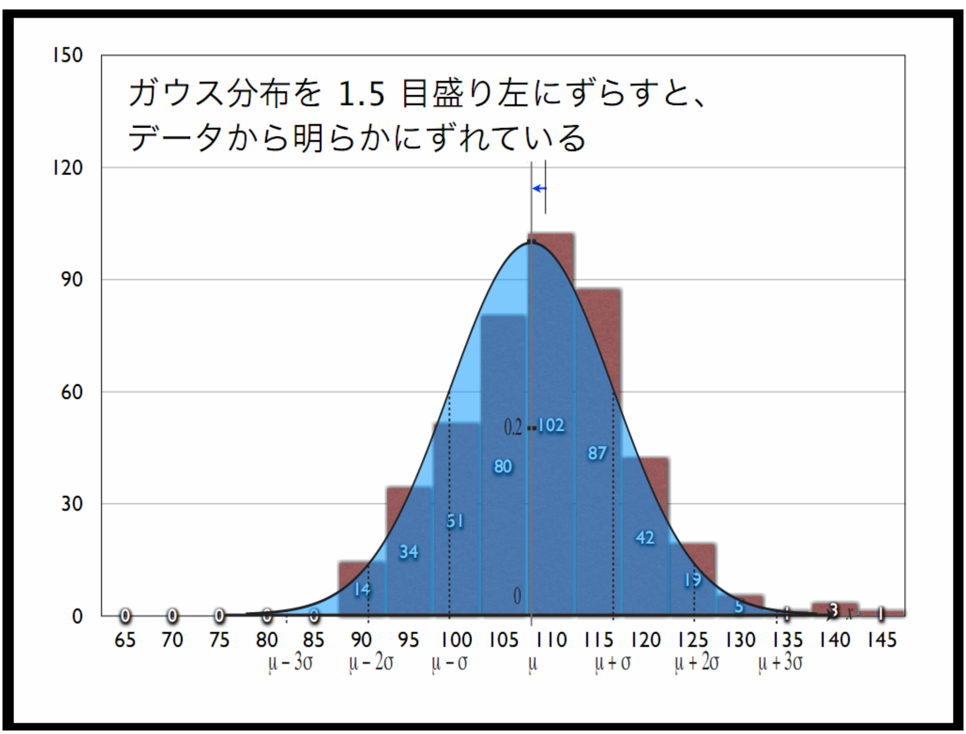
サイコロの1の目が出る確率は本当に1/6だろうか？

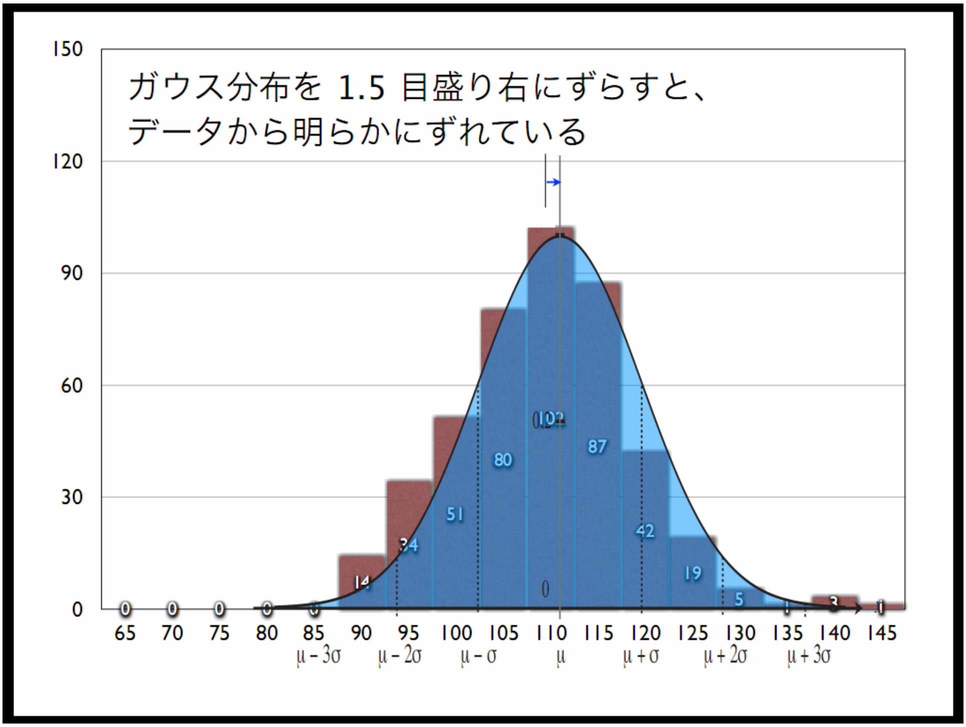
- サイコロを600回振って1の目の出た回数を数える（実際は6個のサイコロの入った容器を100回振る）
- 各目の出る確率が等しいなら、平均で100回1の目が出るだろう
- しかし、実際は正確に100回、1の目が出る訳ではない。
- どのような議論をすればサイコロの“対称性の破れ”を検証できるのだろう？

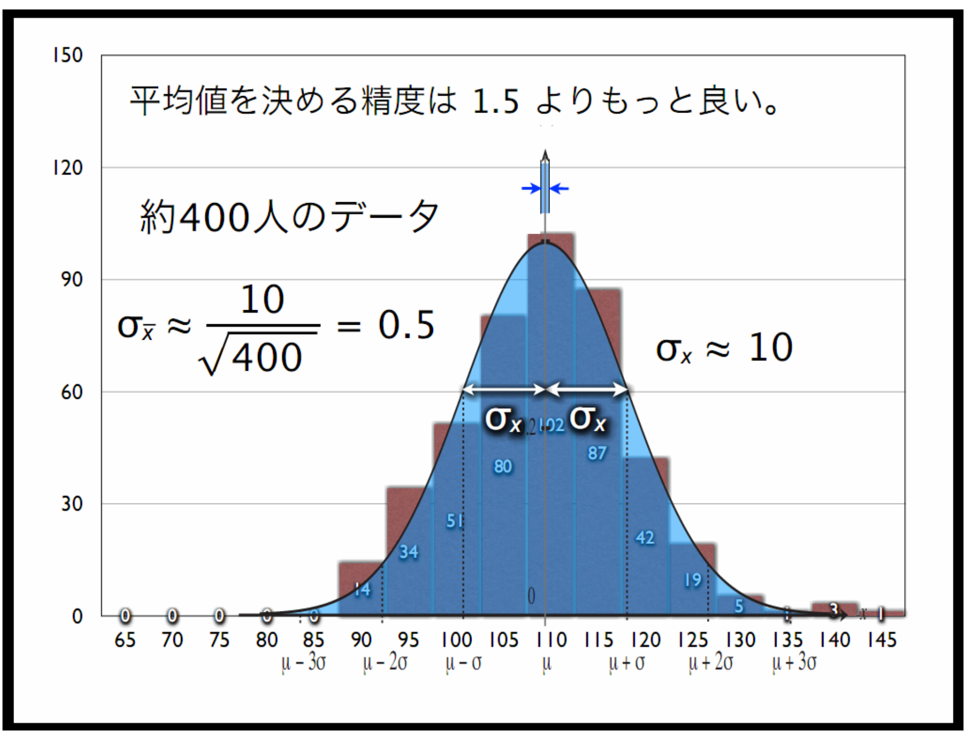

2008.10.sum (5 days)


2007.4. SUM (4 days)
この学期は全員
1 の目を調べた
約400人のデータ


150
120
90
60
30
0
P(x)
0.2
0
102
87
80
51
42
34
19
14
5
3
1
65 70 75 80 85 90 95 100 105 110 115 120 125 130 135 140 145
μ - 3σ
μ - 2σ
μ - σ
μ
μ + σ
μ + 2σ
μ + 3σ


ガウス分布を 1.5 目盛り左にずらすと、
データから明らかにずれている
150
120
90
60
30
0
0.2
0
102
87
80
51
42
34
19
14
5
3
1
65 70 75 80 85 90 95 100 105 110 115 120 125 130 135 140 145
μ - 3σ
μ - 2σ
μ - σ
μ
μ + σ
μ + 2σ
μ + 3σ


ガウス分布を 1.5 目盛り右にずらすと、
データから明らかにずれている
150
120
90
60
30
0
65 70 75 80 85 90 95 100 105 110 115 120 125 130 135 140 145
μ − 3σ μ − 2σ μ − σ μ μ + σ μ + 2σ μ + 3σ
14 34 51 80 102 87 42 19 5 3


平均値を決める精度は 1.5 よりもっと良い。
約400人のデータ
$\sigma_{\bar{x}} \approx \frac{10}{\sqrt{400}} = 0.5$
$\sigma_x \approx 10$
σ_x σ_x
150
120
90
60
30
0
65 70 75 80 85 90 95 100 105 110 115 120 125 130 135 140 145
μ − 3σ μ − 2σ μ − σ μ μ + σ μ + 2σ μ + 3σ
14 34 51 80 102 87 42 19 5 3

平均値の不確かさ

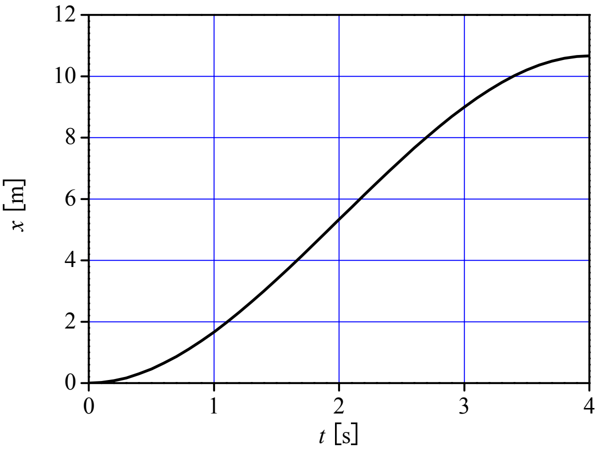
- 一回一回の測定の不確かさ（揺らぎ）が ΔXのとき、同様の測定をN回繰り返した際の平均値の不確かさは

$$\Delta \bar{X} = \frac{\Delta X}{\sqrt{N}}$$

（例題）
600世帯を対象にした世論調査では、視聴率の不確かさは1％程度である。この不確かさを1ケタ小さくしたければ、調査する世帯数を何倍にすればよいか？

第1章
位置・速度・加速度

x-tグラフより速度と加速度を求める



$y=-\frac{1}{3}x^3+2x^2$

ファインマン物理学I 力学　8章　運動

……女の人の運転する自動車が白バイにつかまった。巡査が彼女のところへやってきて、こう言う。「奥さんは時速六〇マイルで走っていましたね！」彼女は言う。「そんなはずはありませんよ。まだ七分間しか走っていないのですよ。おかしいですね――まだ一時間も走らないのに一時間六〇マイル走れるはずはないじゃありませんか？」もしも諸君が警官だったら何と答えるか？……我々はこう言う。「奥さん、我々が言うのはこういう意味なのです。あなたがいままでどおりに走りつづけていったら、次の一時間に六〇マイル行くだろうということなのです。」彼女は言う。「さあ、私はアクセルを踏んでいませんでした。車のスピードはだんだん落ちていました。ですからいままでどおりに走りつづけても、六〇マイル行くはずはありません。」……さっきの女の人はこうも言える。「いままでどおりに一時間走ったら、街のつきあたりの塀にぶつかってしまいますよ！」我々が意味するところを説明するのは、そんなにやさしいことではないのである。

（『ファインマン物理学I　力学』坪井忠二訳より）

ファインマン著「困ります、ファインマンさん」より

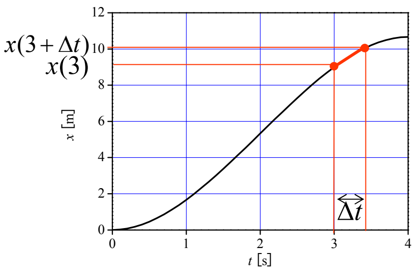
（中略）

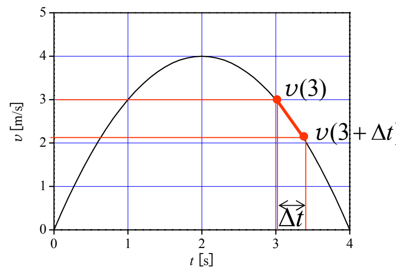
さて，我々の話は軌道に乗ったようである．話はこうである．車の女の人が $\frac{1}{1000}$ 時間走りつづければ，60 マイルの $\frac{1}{1000}$ だけ進むはずである．いいかえれば 1 時間走りつづけるということはいらない；問題は，**ある瞬間**にこのスピードで走っていたというのは，何のことかということなのである．これの意味は，彼女が時間的にもうちょっと走ったら，その間に走る距離は，1 時間に 60 マイルの**一定の**スピードで走る車の距離と同じであるということである．

（中略）

上の定義の中には，一般的の形でギリシャ人にはなかった新しい考えが入っている．それは**微小な距離**とそれに対応する**微小な時間**を考えてその比をつくり，時間を短く短く短くしたら，この比がどうなるかをみるということである．いいかえれば，進んだ距離をそれに要した時間で割って，時間が無限に短く短くなったときの極限を求めるのである．この考えは，ニュートンとライプニッツとによって独立に出されたものであって，**微分学**という数学の新分野のはじまりである．微分学は運動を記述するために発明されたものであって，その第一の応用は，“時速 60 マイル” で走るというのはどういう意味かということを定義する問題であった．

微分を用いた速度と加速度の定義（直線上の運動の場合）





$$v(3) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(3+\Delta t) - x(3)}{\Delta t} \equiv \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=3} \qquad a(3) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(3+\Delta t) - v(3)}{\Delta t} \equiv \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=3}$$

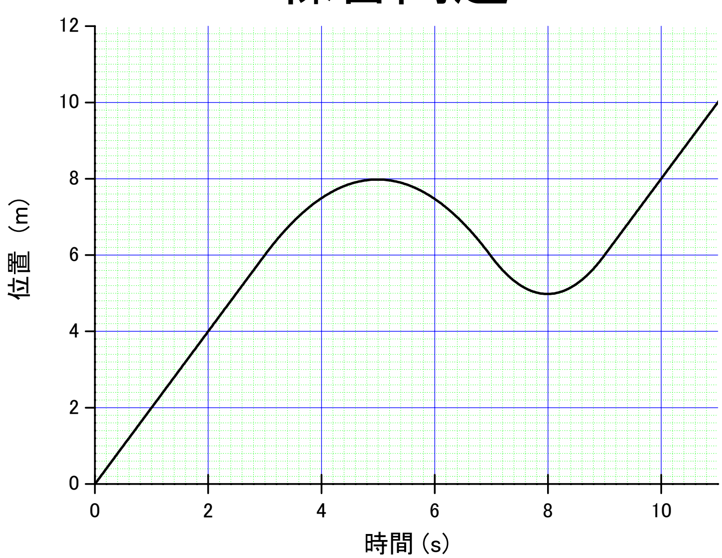
一般に

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \left(\equiv \dot{x}\right)$$

一般に

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \left(\equiv \ddot{x}\right)$$

練習問題

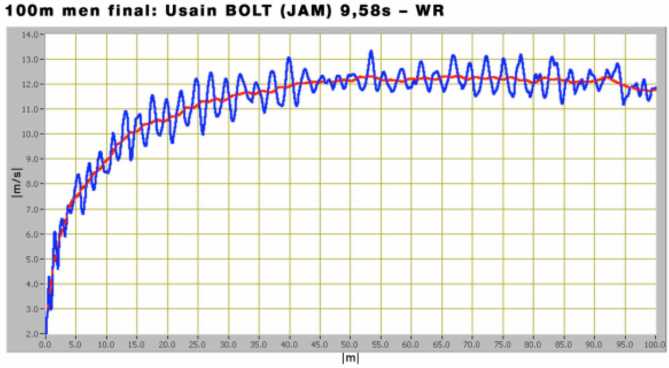


加速度の比較

- 0.006 m/s^2　人に感じられる最小の揺れ
- 0.7 m/s^2　新幹線N700系
- 1.6 m/s^2　月面の重力加速度
- 4～5 m/s^2　人間（100m走のスタート時）の加速度
- 9.8 m/s^2 =1G　地球上の重力加速度（平均値）
- 3～6G　ローラーコースターの最高加速度
- 10G　戦闘機における加速度限界
- 46.2G　人間が耐えることのできた加速度限界
- 116000G　シリウスB（白色矮星）の重力加速度

人間の最高加速度は？

Biomechanical analysis
12th IAAF World Championships in Athletics • Berlin, 15.–23.08.2009
100m men final: Usain BOLT (JAM) 9,58s – WR



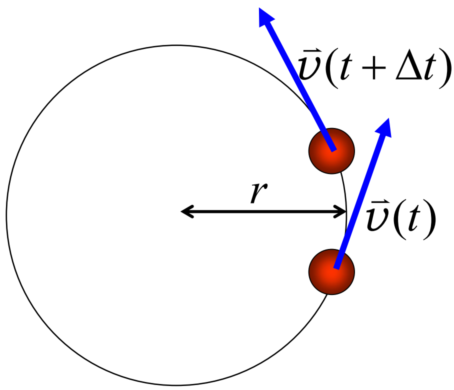
Race distribution: LAVEG measurement curve (blue) and average speed (red)

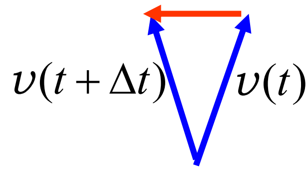
Split times [s]

	Reaction time	t10	t20	t30	t40	t50	t60	t70	t80	t90	t100
Bolt	0,146	1,89	2,88	3,78	4,64	5,47	6,29	7,10	7,92	8,75	9,58
Powell	0,134	1,87	2,90	3,82	4,70	5,55	6,39	7,23	8,08	8,94	9,84

http://berlin.iaaf.org/news/kind=101/newsid=53084.html

等速円運動における加速度





$$\vec{a}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}$$

周波数 $\nu =$

角周波数 $\omega =$

周期 $T =$

加速度の向き:

加速度の大きさ: $a =$