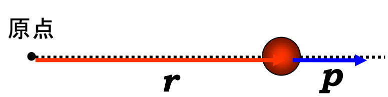
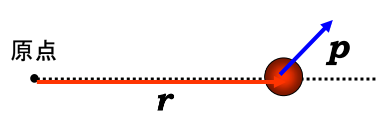
第8章
角運動量

物体の「回転」をどう表現するか？



回転してない

$$\boldsymbol{r} /\!/ \boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = 0$$



回転している（と考えられる）

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \neq 0$$

$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ は、原点まわりの物体の<u>回転の度合い</u>を表す指標になっている？

$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{L}$ と定義して、これを**角運動量**と名付けよう

角運動量と力のモーメント

角運動量の時間微分（単位時間あたりの変化）を考えよう。

これは物体に働いている力

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r} \times m\dot{\boldsymbol{r}}\right) = \dot{\boldsymbol{r}} \times m\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{r} \times m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} \times \boxed{m\ddot{\boldsymbol{r}}}$$

$$\left(\because\ \dot{\boldsymbol{r}} \times m\dot{\boldsymbol{r}} = m(\dot{\boldsymbol{r}} \times \dot{\boldsymbol{r}}) = 0\right)$$

したがって、物体に働いている力を $\boldsymbol{F}$ とすると、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

$\boldsymbol{N} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ を**力のモーメント**（もしくは**トルク**）という。

（注意）角運動量も力のモーメントも、原点の位置を変えれば、その向きも大きさも変わる

トルクレンチ

トルクの大きさの単位（SI）はNm
（kgf·mやkgf·cmも使われている）

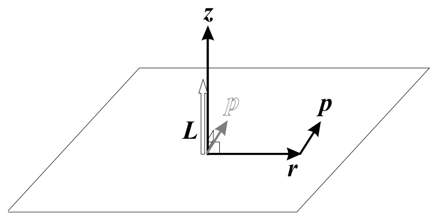
角運動量の保存

万有引力は中心力なので、太陽を原点
とすると、惑星に働く力のモーメントは

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = 0$$

したがって、

$$\boxed{\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = 0}$$ （力が中心力の場合）



これは、角運動量が時間的に変化しない（一定である）ことを意味する。
「**中心力が働く物体の（中心力を原点とする）角運動量は保存する**」
と言うことができる。

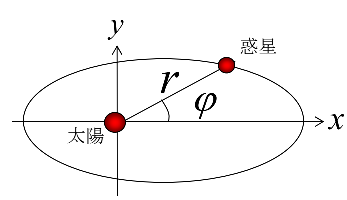
また、物体のLが変化しないということは、物体はLに垂直な一つの平面内で
運動を続ける（二次元極座標表示で運動を記述できる）。

面積速度一定の法則（ケプラーの第2法則）

2次元極座標表示

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m\dot{r}\boldsymbol{e}_r + mr\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

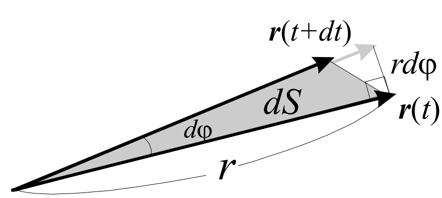


角運動量は

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = r\boldsymbol{e}_r \times \left(m\dot{r}\boldsymbol{e}_r + mr\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\right)$$

$$= mr^2\dot{\varphi}\left(\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\varphi\right)$$

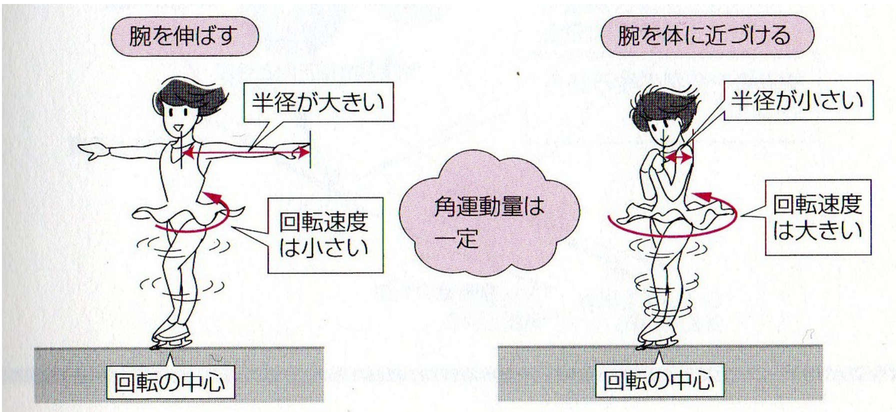
$$= mr^2\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z$$



面積速度は

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{L}{2m}$$

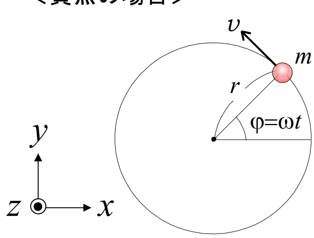
フィギュアスケートのスピン



出典:「やりなおし高校の物理」野田学(2005年、ナツメ社)

回転体の角運動量と慣性モーメント

＜質点の場合＞

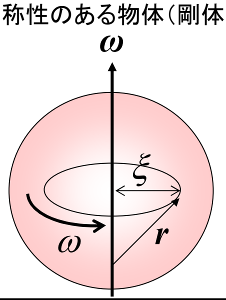


$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = mr^2\boldsymbol{\omega} = I\boldsymbol{\omega}$$

$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_z$ **角速度ベクトル**(大きさは角速度、向きは回転軸と平行(右ねじの進む向き)

$I \equiv mr^2$ **慣性モーメント**(角速度ベクトルをかけると角運動量になる量)

＜回転対称性のある物体(剛体)の場合＞



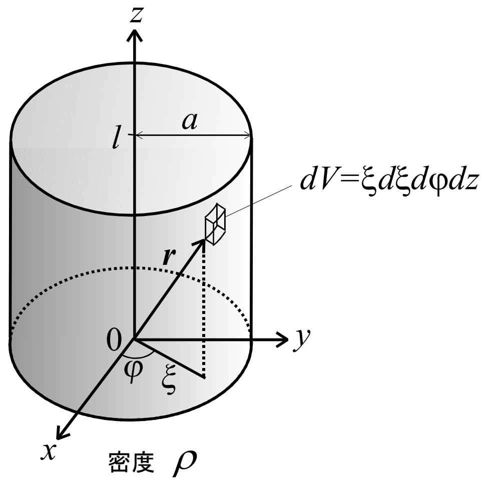
$$\boldsymbol{L} = \int \boldsymbol{r} \times \rho(\boldsymbol{r})\dot{\boldsymbol{r}}dV = I\boldsymbol{\omega}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

$$I = \int \xi^2 \rho(\boldsymbol{r})dV$$

ξ :回転軸からの距離

円柱の慣性モーメントの計算



密度 ρ

質量 $M = \pi a^2 l\rho$

$$I = \int \xi^2 \rho(\mathbf{r})dV$$

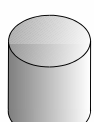
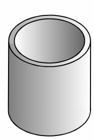
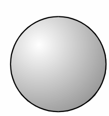
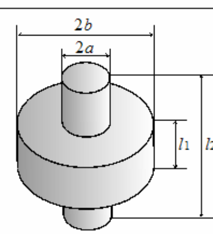
$$= \rho\iiint \xi^2 \xi \, d\xi d\varphi dz$$

$$= \rho\int_0^a \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^l dz$$

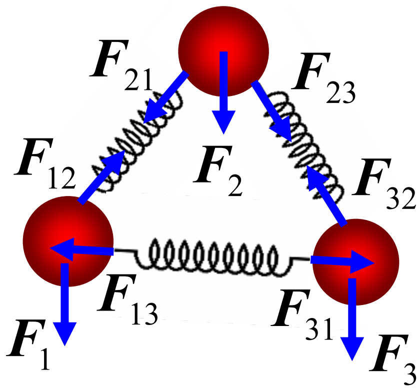
$$= 2\pi l\rho\left[\frac{1}{4}\xi^4\right]_0^a$$

$$= \ = \frac{\pi a^4 l\rho}{2} = M\frac{a^2}{2}$$

さまざまな回転体の慣性モーメント

形状	円柱（円盤）	パイプ	球	軸付き円盤
大きさの パラメタ	 直径 $2a$	 外径 $2a$ 内径 $2b$	 直径 $2a$	
慣性モーメント	$M\frac{a^2}{2}$	$M\frac{a^2+b^2}{2}$	$M\frac{2a^2}{5}$	$M\frac{b^2}{2}\frac{l_1+(l_2-l_1)\varepsilon^4}{l_1+(l_2-l_1)\varepsilon^2}\left(\varepsilon\equiv\frac{a}{b}\right)$

内力と外力



各質点に働く力の合計は

$$\sum_i \left(\boldsymbol{F}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ij} \right)$$
$$= \sum_i \boldsymbol{F}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ij}$$
$$= \sum_i \boldsymbol{F}_i$$

質点系に働く力の和は、外力のみの和（内力の和は、作用・反作用の法則より相殺）

剛体の角運動量とトルク

物体のその箇所に働いている力

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum(\boldsymbol{r}\times m\dot{\boldsymbol{r}}) = \sum(\dot{\boldsymbol{r}}\times m\dot{\boldsymbol{r}}) + \sum(\boldsymbol{r}\times m\ddot{\boldsymbol{r}}) = \sum \boldsymbol{r}\times\boxed{m\ddot{\boldsymbol{r}}}$$

計算してみると、作用反作用の法則および内力が中心力であるため、内力の効果は相殺され（兵頭「考える力学」p211参照）結果的に外力のトルクが残る、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum \boldsymbol{r}_{作用点} \times \boldsymbol{F}_{外力} = \sum \boldsymbol{N}_{外力のトルク}$$

ニュートンの運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

作用反作用の法則

内力は中心力

物体の角運動量の時間変化

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$$

*N*は外力のトルクの和

内力のトルクが無視できることの証明

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_i(\boldsymbol{r}_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)=\sum_i\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)=\sum_i(\boldsymbol{r}_i\times \boxed{m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i})$$

$$\|$$

$$\boldsymbol{F}_i+\sum_{j\neq i}\boldsymbol{F}_{ij}$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\sum_i\left[\boldsymbol{r}_i\times\left(\boldsymbol{F}_i+\sum_{j\neq i}\boldsymbol{F}_{ij}\right)\right]=\sum_i(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i)+\boxed{\sum_i\sum_{j\neq i}(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij})}=\sum_i(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i)$$

あからさまに書くと

$$\sum_i\sum_{j>i}(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)\times\boldsymbol{F}_{ij}=0$$

内力は中心力なので

$$\|$$

$$\boxed{\begin{array}{llllll}
\displaystyle\sum_i\sum_{j\neq i}(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij})= & & +\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_{12} & +\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_{13} \quad \cdots & +\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_{1,n-1} & +\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_{1n} \\
 & -\ \boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_{12} & & +\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_{23} \quad \cdots & +\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_{2,n-1} & +\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_{2n} \\
 & -\ \boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{F}_{13} & -\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{F}_{23} & \qquad\quad \cdots & +\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{F}_{2,n-1} & +\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{F}_{2n} \\
 & \vdots & & & & \\
 & -\ \boldsymbol{r}_{n-1}\times\boldsymbol{F}_{1,n-1} & -\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_{2,n-1} & \qquad\quad \cdots & & +\boldsymbol{r}_{n-1}\times\boldsymbol{F}_{n-1,n} \\
 & -\ \boldsymbol{r}_n\times\boldsymbol{F}_{1n} & -\boldsymbol{r}_n\times\boldsymbol{F}_{2n} & \qquad\quad \cdots & -\boldsymbol{r}_n\times\boldsymbol{F}_{n-1,n} &
\end{array}}$$

作用反作用の法則を適用

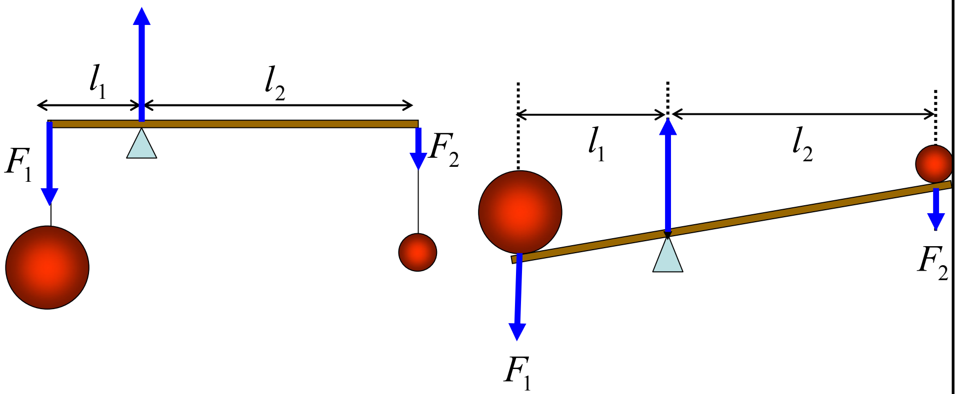
$$\boxed{\boldsymbol{F}_{ij}=-\boldsymbol{F}_{ji}}$$

運動量と角運動量のアナロジー

	運動量 (momentum)	角運動量 (angular momentum)
定義	$\boldsymbol{p}\equiv m\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{L}\equiv\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=I\boldsymbol{\omega}$
時間変化させる要因	$\boldsymbol{F}$ 力（force）	$\boldsymbol{N}\equiv\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ トルク（torque）
時間変化のしにくさを表す量（慣性）	m （慣性）質量 ((inertial) mass）	I 慣性モーメント (moment of inertia)
運動方程式	$\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt}=m\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}$	$\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt}=I\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=\boldsymbol{N}$

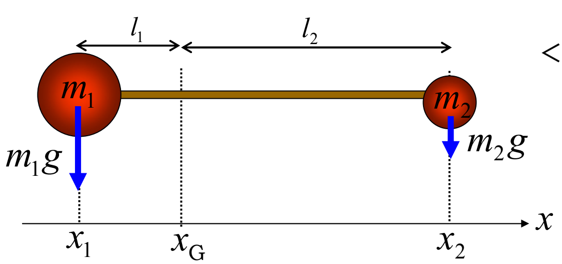
物体のつりあいと「てこの原理」

静止している物体は回転していない（角運動量がゼロのまま変化しない）
→外力のトルク（原点は任意）の和はゼロ



$$F_1 l_1 = F_2 l_2$$

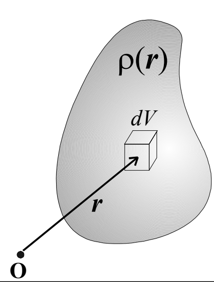
重心（質量中心）
質量の重みをつけた位置の平均



＜2質点の場合＞

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

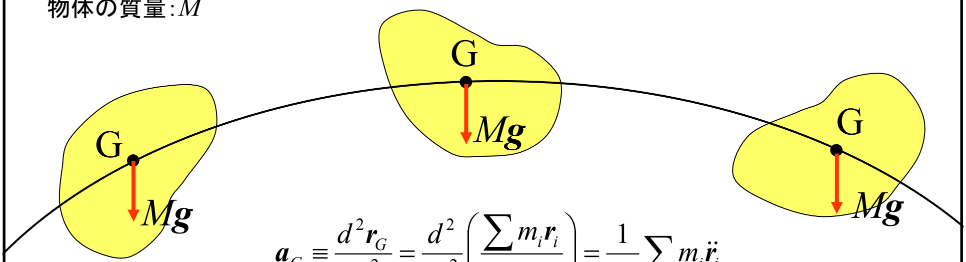
＜一般の剛体＞



$$\boldsymbol{r}_G = \frac{\sum \boldsymbol{r}_i m_i}{M} = \frac{\int \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})dV}{\int \rho(\boldsymbol{r})dV}$$

重心の運動：質点近似

物体の質量：M



$$\boldsymbol{a}_G \equiv \frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sum m_i\boldsymbol{r}_i}{M}\right) = \frac{1}{M}\sum m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$$

$$= \frac{\sum_i (\boldsymbol{F}_i + \sum_{j\neq i}\boldsymbol{F}_{ij})}{M} = \frac{\sum_i \boldsymbol{F}_i}{M}$$

重心の運動方程式

$$\boldsymbol{F}_{\text{外力の和}} = M\boldsymbol{a}_{\mathrm{G}}$$

重心の運動方程式は、質量Mの質点の運動方程式に等しい

重力のモーメント

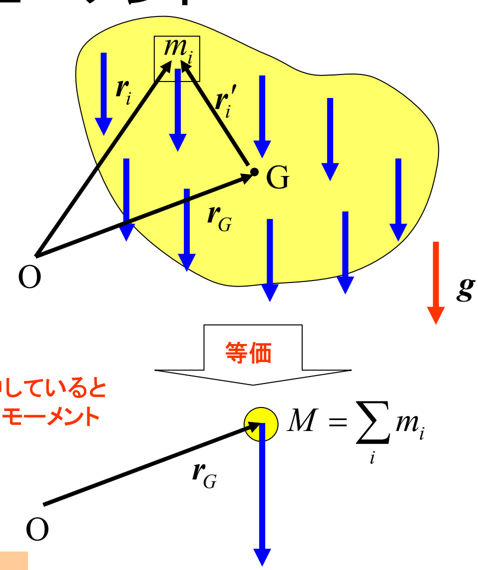
$$\boldsymbol{N} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{g}$$

$$= \left(\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i\right)\times\boldsymbol{g}$$

$$= \frac{\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i}{M}\times M\boldsymbol{g}$$

$$= \boxed{\boldsymbol{r}_G \times M\boldsymbol{g}}$$

全質量が重心に集中していると考えた場合の重力のモーメント

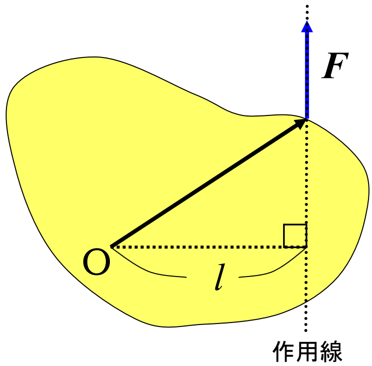


重心を原点とすれば $\boldsymbol{r}_G = 0$ であるから

$\boldsymbol{N} = 0$ （重心が原点の場合）

重心を支点とすると、物体は回転しない

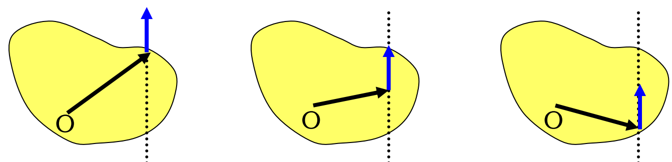
力の作用線



$$\left|\boldsymbol{N}\right| = \left|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}\right| = rF\sin\theta$$
$$= Fl$$

l :作用線から原点までの距離

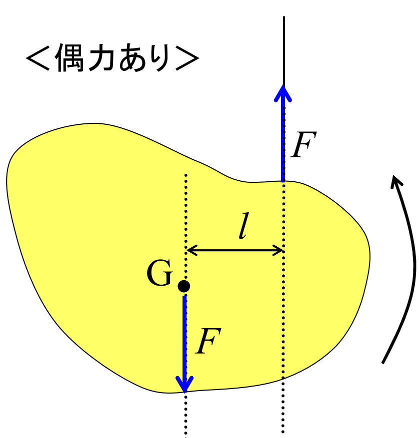
作用点を作用線上で移動しても、剛体に加わるトルクは等しい



偶力(couple):トルクの一種

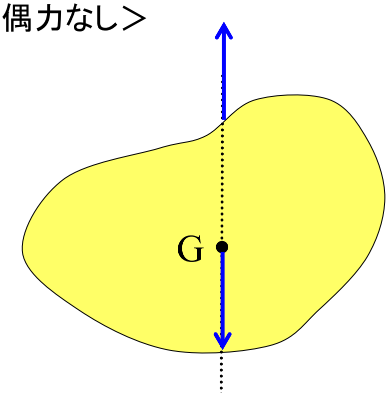
作用線の一致しない大きさの等しい二つの力

＜偶力あり＞



$$\frac{dL}{dt} = N = Fl \neq 0$$ 回転する

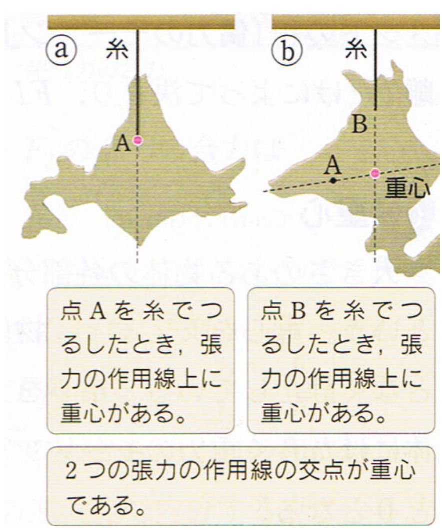
＜偶力なし＞



$$\frac{dL}{dt} = N = Fl = 0$$ 回転しない

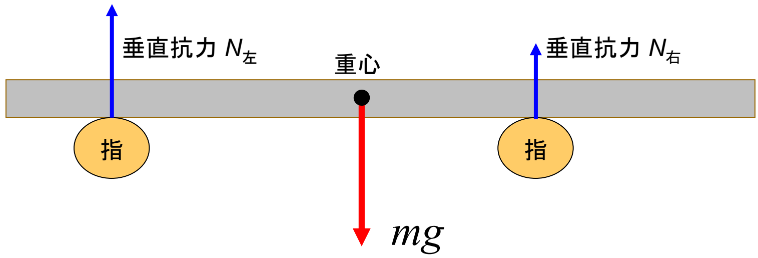
様々なワインホルダー

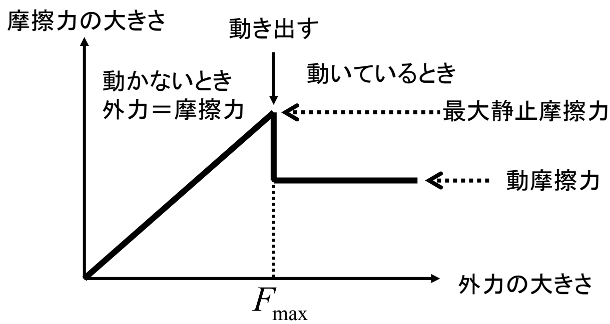
物体の重心を求める



東京書籍　高等学校教科書「物理Ⅰ」より転載

棒の重心の見つけ方





静止摩擦係数

$$F_{\max} = \mu N$$

クーロンの第1法則

$$F = \mu' N$$

クーロンの第2法則

動摩擦係数

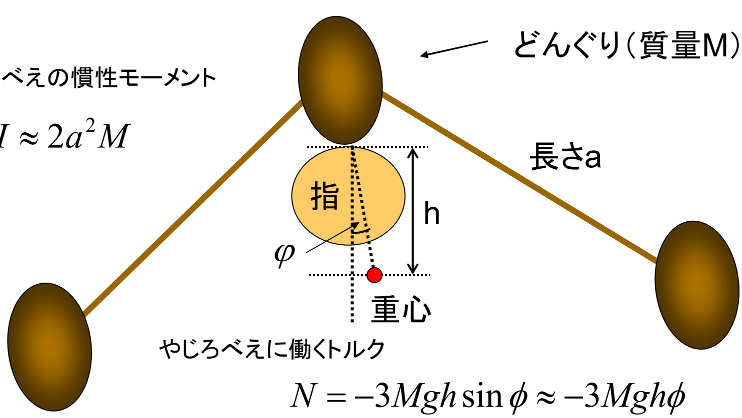
$$\mu > \mu'$$

クーロンの第3法則

やじろべえ（実体振り子）

やじろべえの慣性モーメント

$$I \approx 2a^2 M$$



やじろべえに働くトルク

$$N = -3Mgh\sin\phi \approx -3Mgh\phi$$

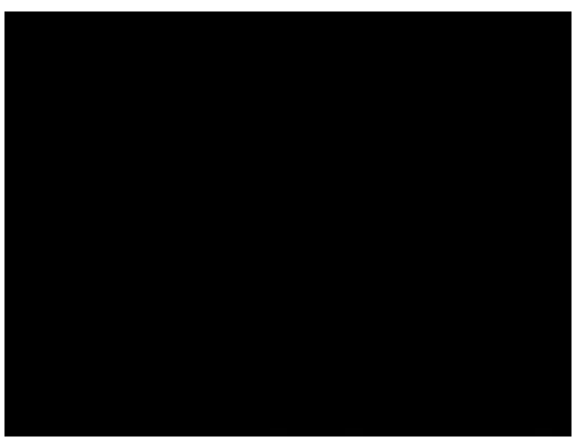
$$\frac{dL}{dt} = N, L = I\omega = 2a^2 M\dot{\varphi}$$ より、

$$2a^2 M\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = -3Mgh \rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} = -\omega^2\varphi} \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{3hg}{2a^2}}\right)$$

単振動

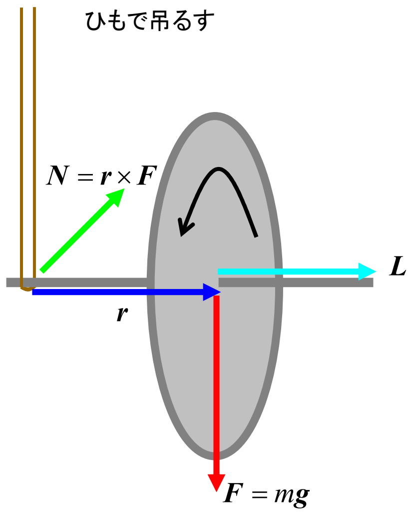
フォークで作るやじろべえ

地球ゴマ（gyroscope）



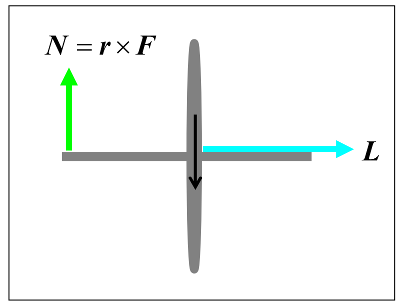
http://www.youtube.com/watch?v=V4duz17JVvY

回転する車輪の軸はどちらに回る？

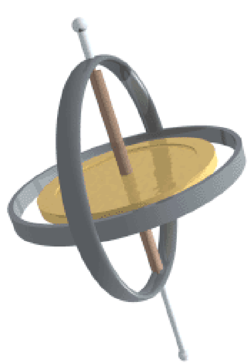


$$\frac{dL}{dt} = N$$

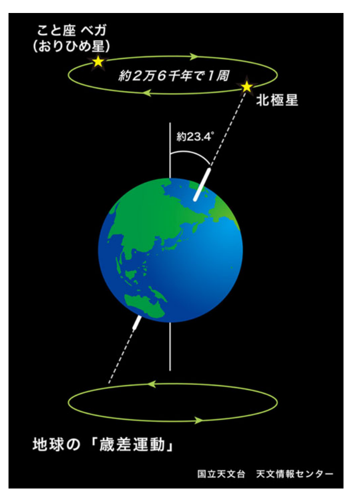
上から見た図



歳差運動（precession）



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/82/Gyroscope_precession.gif



http://www.nao.ac.jp/QA/image/img0907.jpg

斜面上を転がる回転体

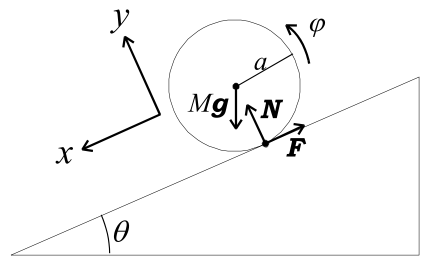
回転体の重心の運動

$$M\frac{d^2\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}}{dt^2} = M\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}$$

垂直抗力　摩擦力

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\theta - F$$

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = -Mg\cos\theta + N$$



基礎物理学実験テキスト「剛体の力学」より

回転体の回転運動

$$I\frac{d\omega}{dt} = aF$$

$$x = a\varphi$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{1+(k/a)^2}g\sin\theta$$

$I = Mk^2$　　k :回転半径