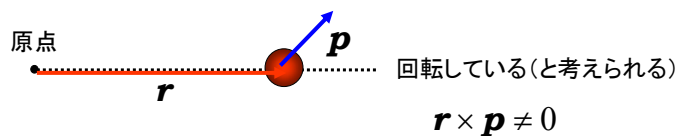
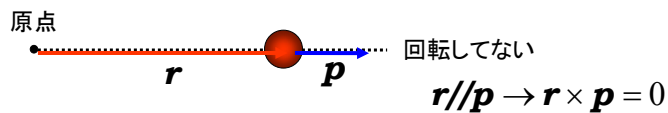


第8章

角運動量

物体の「回転」をどう表現するか？



$r \times p$ は、原点まわりの物体の回転の度合いを表す指標になっている？

$r \times p \equiv L$ と定義して、これを角運動量と名付けよう

角運動量と力のモーメント

角運動量の時間微分(単位時間あたりの変化)を考えよう。

これは物体に働いている力

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \boxed{m\ddot{\mathbf{r}}}$$

$$(\because \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}} = m(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0)$$

したがって、物体に働いている力を \mathbf{F} とすると、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$\mathbf{N} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ を力のモーメント(もしくはトルク)という。

(注意)角運動量も力のモーメントも、原点の位置を変えれば、その向きも大きさも変わる

トルクレンチ



トルクの大きさの単位(SI)はNm
(kgf·mやkgf·cmも使われている)

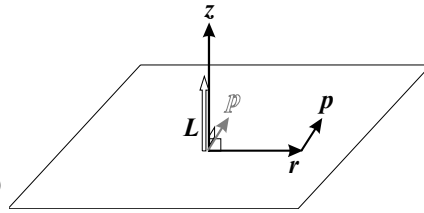
角運動量の保存

万有引力は中心力なので、太陽を原点とすると、惑星に働く力のモーメントは

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$$

したがって、

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = 0 \quad (\text{力が中心力の場合})$$



これは、角運動量が時間的に変化しない(一定である)ことを意味する。
「中心力が働く物体の(中心力を原点とする)角運動量は保存する」
 と言うことができる。

また、物体のLが変化しないということは、物体はLに垂直な一つの平面内で運動を続ける(二次元極座標表示で運動を記述できる)。

面積速度一定の法則 (ケプラーの第2法則)

2次元極座標表示

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{r}\mathbf{e}_r + mr\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$$

角運動量は

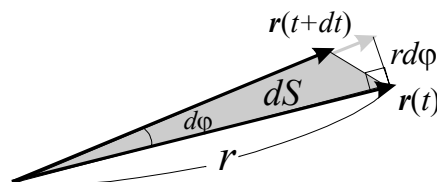
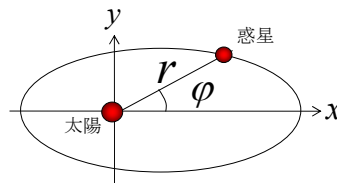
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = r\mathbf{e}_r \times (m\dot{r}\mathbf{e}_r + mr\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi)$$

$$= mr^2\dot{\phi}(\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\phi)$$

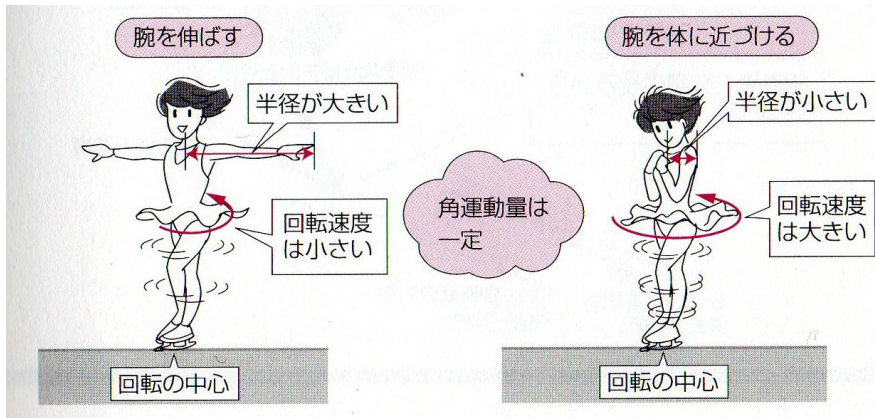
$$= mr^2\dot{\phi}\mathbf{e}_z$$

面積速度は

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi} = \frac{L}{2m}$$



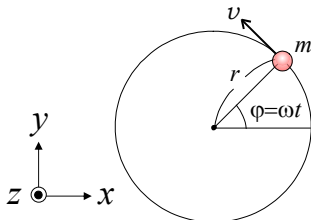
フィギュアスケートのスピン



出典:「やりなおし高校の物理」野田学(2005年、ナツメ社)

回転体の角運動量と慣性モーメント

<質点の場合>

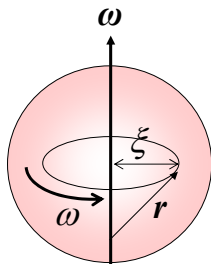


$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = mr^2\boldsymbol{\omega} = I\boldsymbol{\omega}$$

$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_z$ 角速度ベクトル(大きさは角速度、向きは回転軸と平行(右ねじの進む向き))

$I \equiv mr^2$ 慣性モーメント(角速度ベクトルをかけると角運動量になる量)

<回転対称性のある物体(剛体)の場合>

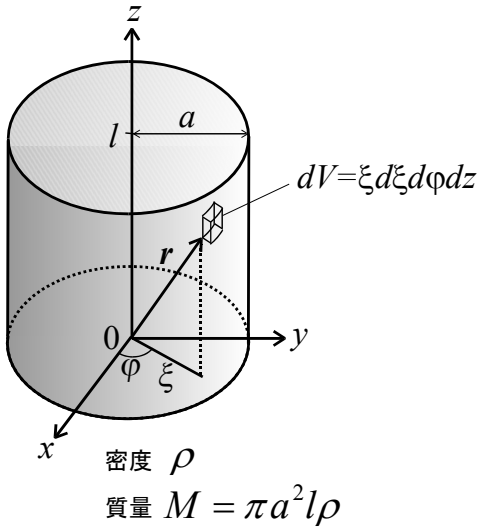


$$\mathbf{L} = \int \mathbf{r} \times \rho(\mathbf{r})\mathbf{r}dV = I\boldsymbol{\omega}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$


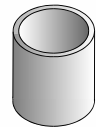
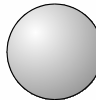
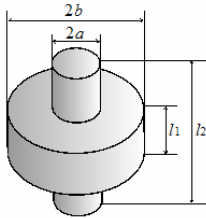
$$I = \int \xi^2 \rho(\mathbf{r})dV \quad \xi: \text{回転軸からの距離}$$

円柱の慣性モーメントの計算

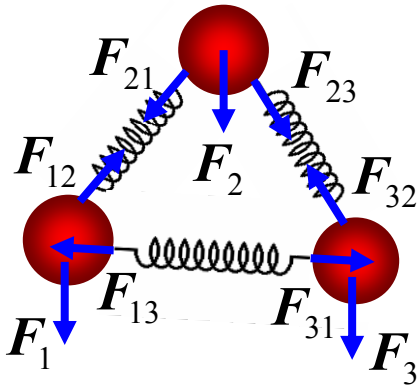


$$\begin{aligned}
 I &= \int \xi^2 \rho(\mathbf{r}) dV \\
 &= \rho \iiint \xi^2 \xi d\xi d\phi dz \\
 &= \rho \int_0^a \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^l dz \\
 &= 2\pi \rho \left[\frac{1}{4} \xi^4 \right]_0^a \\
 &= \frac{\pi a^4 l \rho}{2} = M \frac{a^2}{2}
 \end{aligned}$$

さまざまな回転体の慣性モーメント

形状	円柱 (円盤)	パイプ	球	軸付き円盤
大きさの パラメタ	 直径 $2a$	 外径 $2a$ 内径 $2b$	 直径 $2a$	
慣性モーメント	$M \frac{a^2}{2}$	$M \frac{a^2 + b^2}{2}$	$M \frac{2a^2}{5}$	$M \frac{b^2}{2} \frac{l_1 + (l_2 - l_1)\epsilon^4}{l_1 + (l_2 - l_1)\epsilon^2} \left(\epsilon \equiv \frac{a}{b} \right)$

内力と外力



各質点に働く力の合計は

$$\begin{aligned} & \sum_i \left(F_i + \sum_{j \neq i} F_{ij} \right) \\ &= \sum_i F_i + \sum_i \sum_{j \neq i} F_{ij} \\ &= \sum_i F_i \end{aligned}$$

質点系に働く力の和は、外力のみの和(内力の和は、作用・反作用の法則より相殺)

剛体の角運動量とトルク

物体のその箇所に働いている力

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \sum (\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}) = \sum (\dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}}) + \sum (\mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}}) = \sum \mathbf{r} \times \boxed{m\ddot{\mathbf{r}}}$$

計算してみると、作用反作用の法則および内力が中心力であるため、内力の効果は相殺され(兵頭「考える力学」p211参照) 結果的に外力のトルクが残る、

$$\frac{dL}{dt} = \sum \mathbf{r}_{\text{作用点}} \times \mathbf{F}_{\text{外力}} = \sum \mathbf{N}_{\text{外力のトルク}}$$

ニュートンの運動方程式

$$\frac{dp}{dt} = F$$

作用反作用の法則
内力は中心力

物体の角運動量の時間変化

$$\frac{dL}{dt} = N$$

Nは外力のトルクの和

内力のトルクが無視できることの証明

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \sum_i \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i)$$

$$\parallel$$

$$\mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \left[\mathbf{r}_i \times \left(\mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} \right) \right] = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + \sum_i \sum_{j \neq i} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}) = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)$$

あからさまに書くと

$$\sum_i \sum_{j > i} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = 0 \quad \text{内力は中心力なので}$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}) =$$

	$+ \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12}$	$+ \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{13}$	\dots	$+ \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{1,n-1}$	$+ \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{1n}$
$-$	$\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{12}$	$+ \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{23}$	\dots	$+ \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{2,n-1}$	$+ \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{2n}$
$-$	$\mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{13}$	$- \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{23}$	\dots	$+ \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{2,n-1}$	$+ \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{2n}$
\vdots					
$-$	$\mathbf{r}_{n-1} \times \mathbf{F}_{1,n-1}$	$- \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{2,n-1}$	\dots		$+ \mathbf{r}_{n-1} \times \mathbf{F}_{n-1,n}$
$-$	$\mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_{1n}$	$- \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_{2n}$	\dots	$- \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_{n-1,n}$	

作用反作用の法則を適用

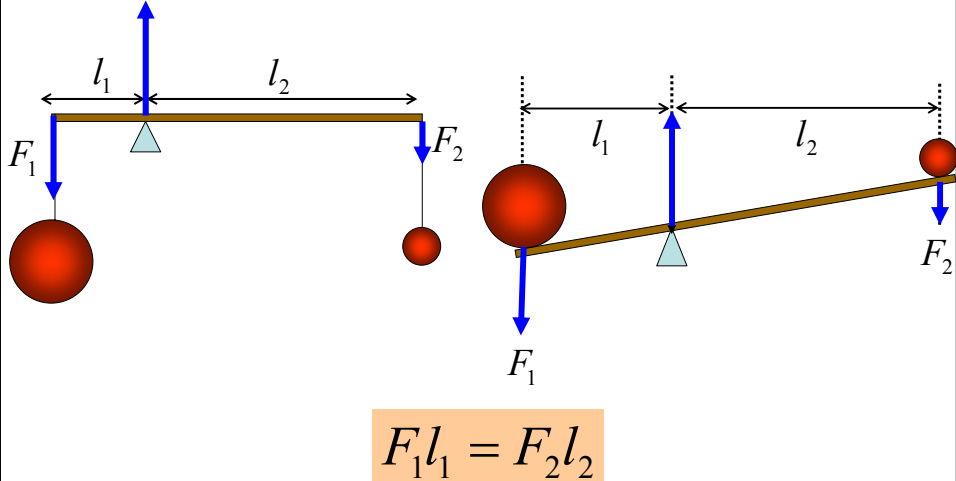
$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$$

運動量と角運動量のアナロジー

	運動量 (momentum)	角運動量 (angular momentum)
定義	$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$	$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = I\boldsymbol{\omega}$
時間変化させる要因	\mathbf{F} 力 (force)	$\mathbf{N} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ トルク (torque)
時間変化のしにくさを表す量 (慣性)	m (慣性) 質量 (inertial) mass	I 慣性モーメント (moment of inertia)
運動方程式	$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$	$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{N}$

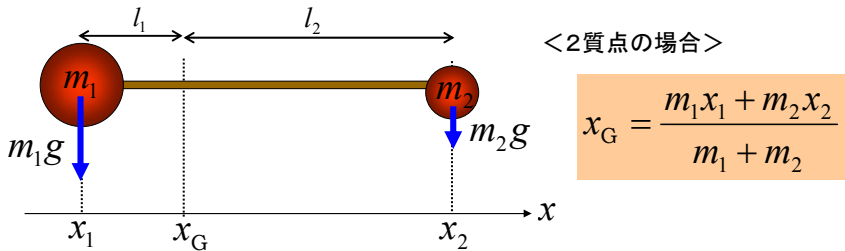
物体のつりあいと「てこの原理」

静止している物体は回転していない(角運動量がゼロのまま変化しない)
 →外力のトルク(原点は任意)の和はゼロ



$$F_1 l_1 = F_2 l_2$$

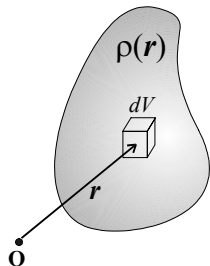
重心(質量中心) 質量の重みをつけた位置の平均



<2質点の場合>

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

<一般の剛体>



$$\mathbf{r}_G = \frac{\sum \mathbf{r}_i m_i}{M} = \frac{\int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV}{\int \rho(\mathbf{r}) dV}$$

重力のモーメント

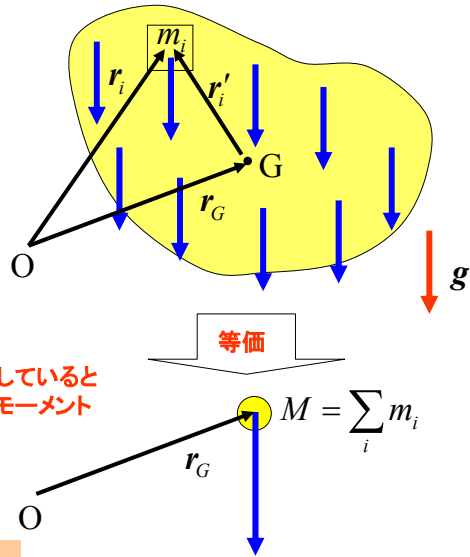
$$\begin{aligned}
 N &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g} \\
 &= \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) \times \mathbf{g} \\
 &= \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M} \times M \mathbf{g} \\
 &= \mathbf{r}_G \times M \mathbf{g}
 \end{aligned}$$

全質量が重心に集中していると
考えた場合の重力のモーメント

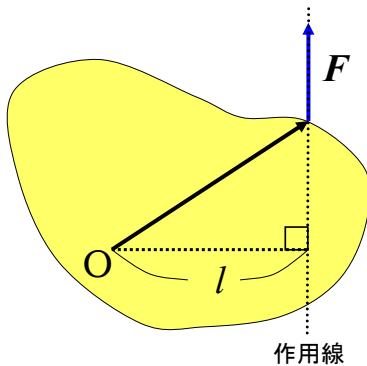
重心を原点とすれば $\mathbf{r}_G = 0$ であるから

$$N = 0 \quad (\text{重心が原点の場合})$$

重心を支点とすると、物体は回転しない



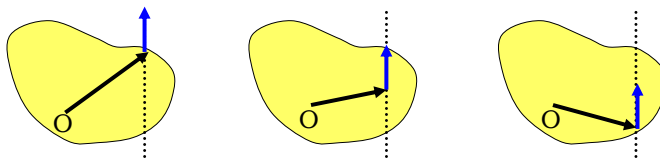
力の作用線



$$\begin{aligned}
 |N| &= |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = rF \sin \theta \\
 &= Fl
 \end{aligned}$$

l : 作用線から原点までの距離

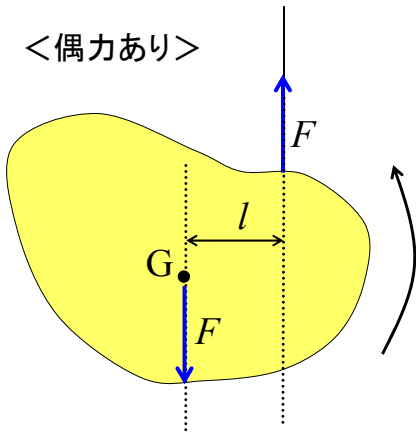
作用点を作用線上で移動しても、剛体に加わるトルクは等しい



偶力 (couple)

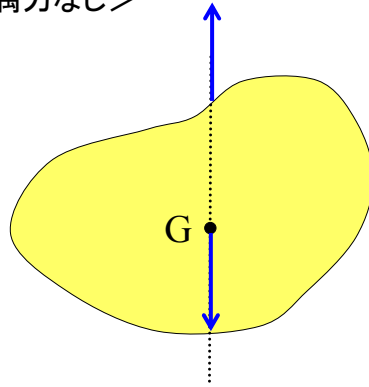
作用線の一致しない大きさの等しい二つの力

<偶力あり>



$$\frac{dL}{dt} = N = Fl \neq 0 \quad \text{回転する}$$

<偶力なし>

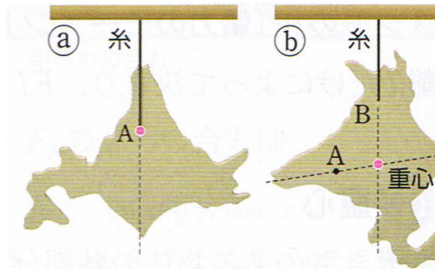


$$\frac{dL}{dt} = N = Fl = 0 \quad \text{回転しない}$$

様々なワインホルダー



物体の重心を求める



点Aを糸でつるしたとき、張力の作用線上に重心がある。

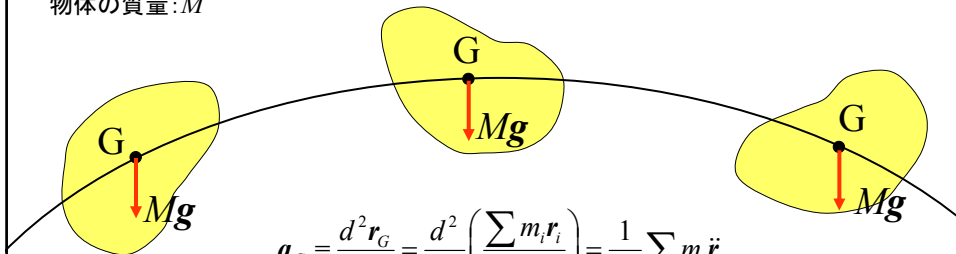
点Bを糸でつるしたとき、張力の作用線上に重心がある。

2つの張力の作用線の交点が重心である。

東京書籍 高等学校教科書「物理 I」より転載

重心の運動

物体の質量: M



$$a_G \equiv \frac{d^2 \mathbf{r}_G}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M} \right) = \frac{1}{M} \sum m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$$

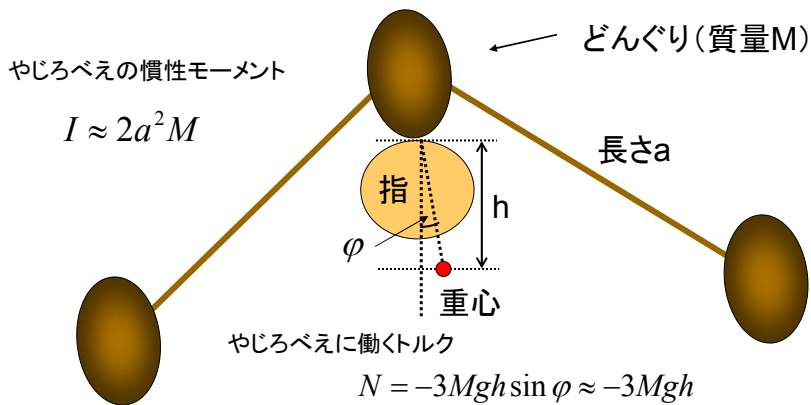
$$= \frac{\sum_i (\mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij})}{M} = \frac{\sum_i \mathbf{F}_i}{M}$$

重心の運動方程式

$$\mathbf{F}_{\text{外力の和}} = M \mathbf{a}_G$$

重心の運動方程式は、質量 M の質点の運動方程式に等しい

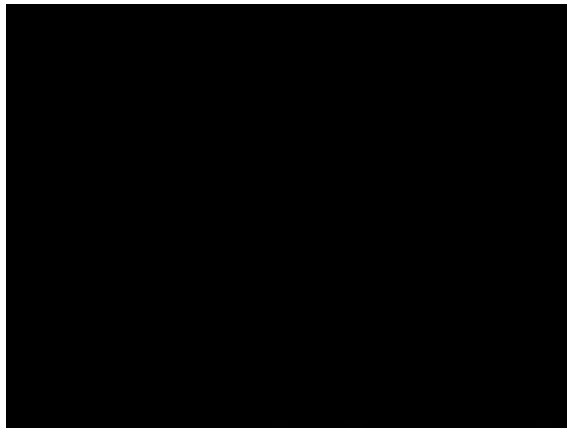
やじろべえ(実体振り子)



$$\frac{dL}{dt} = N, L = I\omega = 2a^2M\dot{\varphi} \text{ より、}$$
$$2a^2M \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = -3Mgh \rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi} \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{3hg}{2a^2}} \right)$$

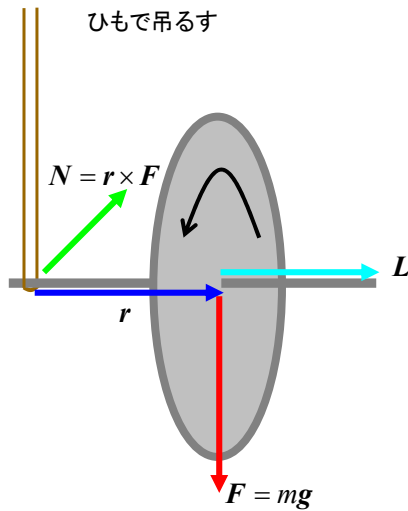
単振動

地球ゴマ(gyroscope)



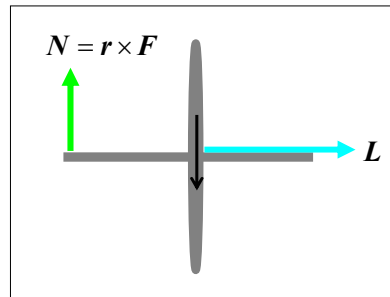
<http://www.youtube.com/watch?v=V4duz17JVvY>

回転する車輪の軸はどちらに回る？

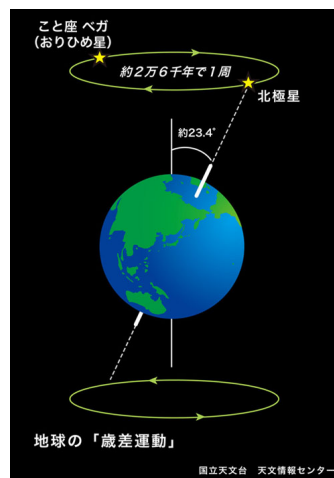
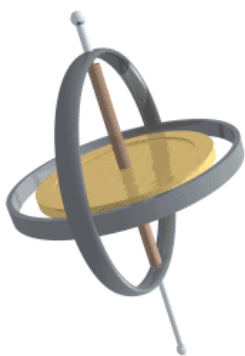


$$\frac{dL}{dt} = N$$

上から見た図



歳差運動 (precession)



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/82/Gyro_scope_precession.gif

<http://www.nao.ac.jp/QA/image/img0907.jpg>

斜面上を転がる回転体

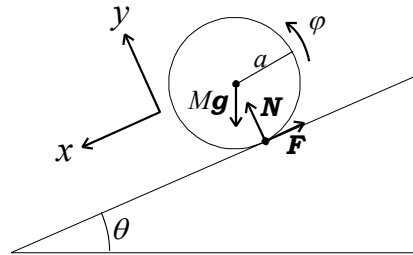
回転体の重心の運動

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}_G}{dt^2} = M \mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}$$

垂直抗力 摩擦力

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = Mg \sin \theta - F$$

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = -Mg \cos \theta + N$$



基礎物理学実験テキスト「剛体の力学」より

回転体の回転運動

$$I \frac{d\omega}{dt} = aF$$

$$x = a\varphi$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{1 + (k/a)^2} g \sin \theta$$

$$I = Mk^2 \quad k: \text{回転半径}$$