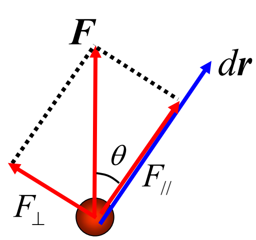
第7章
仕事とエネルギー

仕事（work）の定義

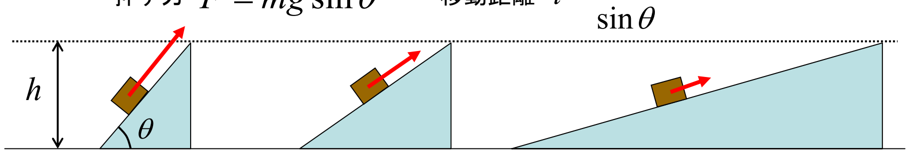


（仕事）＝（力の移動方向成分）×（移動距離）

$$dW = F_{//} dr = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

仕事の単位はN·m = kg·m²/s²＝J（ジュール）

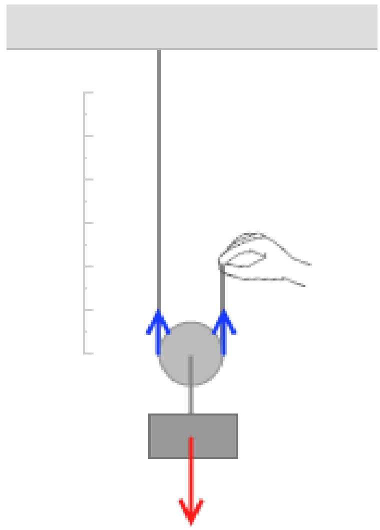
押す力 $F = mg\sin\theta$ 　　移動距離 $l = \dfrac{h}{\sin\theta}$



$$W = Fl = mgh$$

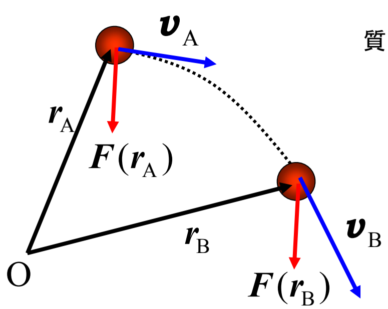
物体を高さhだけ持ち上げる仕事は、斜面の角度に依存しない（中高で習う**仕事の原理**の一例）

仕事の原理　滑車の例



http://www.wakariyasui.sakura.ne.jp/4-1-0-0/4-1-1-2sigotonogennri.html

仕事と運動エネルギー



質点が点Aから点Bへ移動する間に外力がする仕事

$$W_{\mathrm{AB}} = \int_{\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}}^{\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}}^{\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}} m\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot d\boldsymbol{r}$$

$$d\boldsymbol{r} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt = \dot{\boldsymbol{r}}dt,\ \frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}) = 2\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}$$ より、

$$W_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}m\int_{\upsilon_A}^{\upsilon_B} d(\upsilon^2) = \frac{1}{2}m\left[\upsilon^2\right]_{\upsilon_A}^{\upsilon_B} = \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_A^2$$

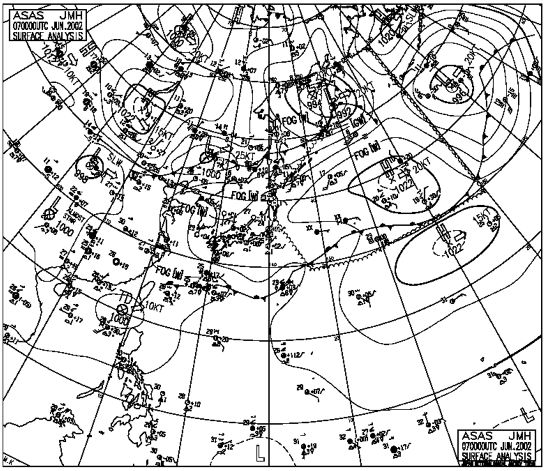
$$K \equiv \frac{1}{2}m\upsilon^2$$ 運動エネルギー（kinetic energy）

$$W_{AB} = K_B - K_A$$

運動エネルギーの変化は受けた仕事に等しい

場(field)

空間の各位置で定義(または観測)されるような物理量



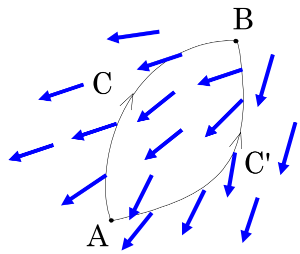
スカラー場(物理量がスカラー)
(例)
標高(2次元)
気温、気圧、
物体の密度分布
ポテンシャル(これから学ぶ)
電荷密度(冬学期に学ぶ)

ベクトル場(物理量がベクトル)
(例)
風速
重力の場(これから学ぶ)
電場、磁場、電流密度ベクトル
(冬学期に学ぶ)

保存力の場

質点が任意の位置Aから任意の位置Bへ移動する間に力Fの場のする仕事

$$W_{A \overset{C}{\to} B} = \int_{A \overset{C}{\to} B} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$$

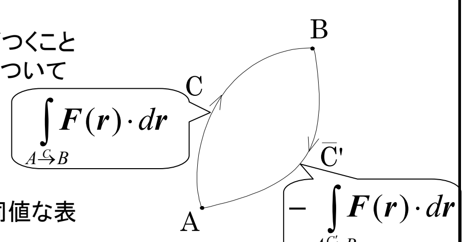


が、経路Cに依存しないとき、Fを**保存力**という。
このとき、任意に選んだ二つの経路C,C'について

$$\int_{A \overset{C}{\to} B} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{A \overset{C'}{\to} B} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$$

が、成立する。また、経路を逆にすると負号がつくことに注意すると、元の場所に戻る任意の経路について

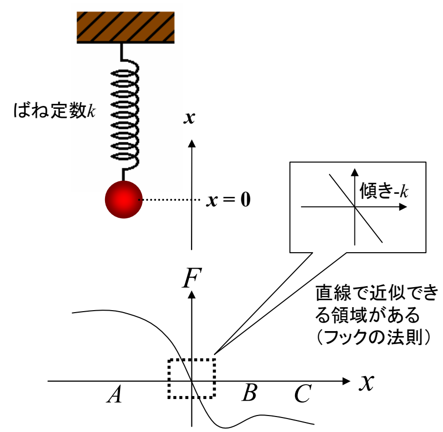
$$\oint_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$



が、成立する。これはFが保存力であることと同値な表現である。

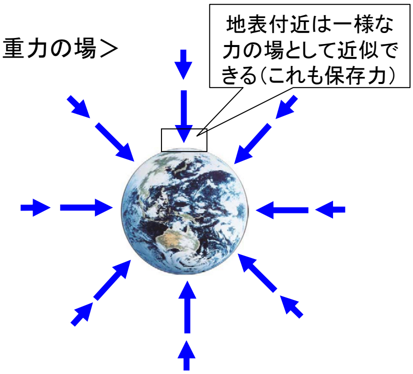
保存力の場の例

＜一次元の力＞



$$W_{A\to C\to B}=\int_A^C F(x)dx+\int_C^B F(x)dx=\int_A^B F(x)dx$$

＜重力の場＞



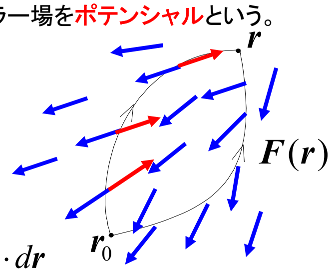
$$W_{AB}=\int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} f(r)\boldsymbol{e}_r\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{r_A}^{r_B} f(r)dr$$

一次元の力と同じ形

一般に**中心力**は**保存力**
クーロン力（静電気力）も同じ

ポテンシャルとエネルギー保存則

力Fの場が保存力の場合、**その力とつりあうような力(-F)**を加えながら、ある基準点から、別の点まで質点を移動させるために**我々がなす仕事**は、経路に依存しない。つまりこの仕事をもってスカラー場が定義できる。このスカラー場を**ポテンシャル**という。



$$U(\boldsymbol{r})\equiv-\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$$

このとき、質点が点Aから点Bへ移動する間に
外力がなす仕事は

$$W_{AB}\equiv\int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B}F(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_0}F(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}+\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_B}F(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$$

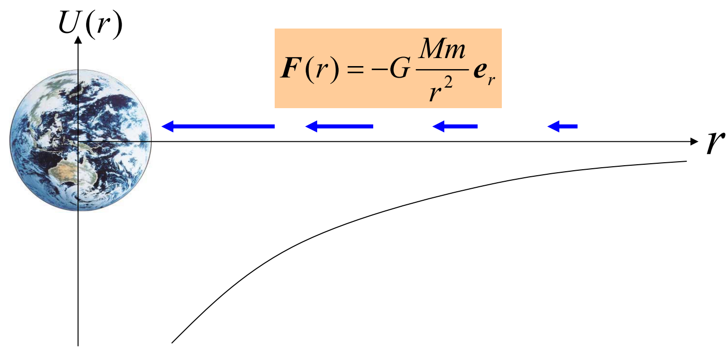
$$=-\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_A}F(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}-\left(-\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_B}F(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}\right)=U(\boldsymbol{r}_A)-U(\boldsymbol{r}_B)$$

一方、$W_{AB}=K_B-K_A$ より、

$$U(\boldsymbol{r}_A)-U(\boldsymbol{r}_B)=K_B-K_A\Leftrightarrow U(\boldsymbol{r}_A)+K_A=U(\boldsymbol{r}_B)+K_B$$

力学的エネルギーの保存則

重力のポテンシャル



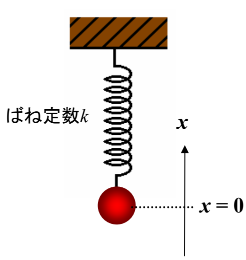
$$\boldsymbol{F}(r) = -G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

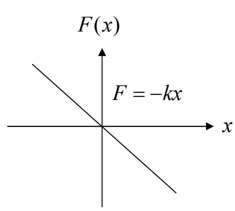
$$U(r) = -\int_{r_0}^{r}\boldsymbol{F}(r)\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{r_0}^{r}\frac{GMm}{r^2}dr = \left[-\frac{GMm}{r}\right]_{r_0}^{r} = -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{r_0}$$

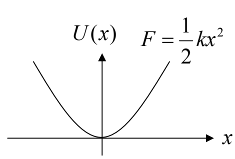
基準点を無限遠にとると（慣習）

$$U(r) = -G\frac{Mm}{r}$$

単振動の力学的エネルギー保存則







$$U + K = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

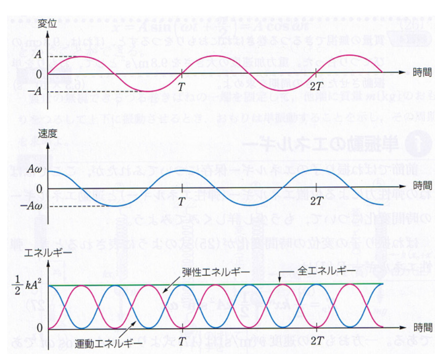


図 10　単振動する物体の変位，速度，エネルギーの時間変化

東京書籍　高等学校教科書『物理II』p.56

$$x = A\cos\omega t$$

$$\left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

$$v = \dot{x} = -A\omega\sin\omega t$$

ポテンシャルと力の微分関係

＜1次元の場合＞

$$\boxed{U(x) \equiv -\int_{x_0}^{x} F(x)dx} \quad U(x+\Delta x) - U(x) = -\int_{x}^{x+\Delta x} F(x)dx \cong -F(x)\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x) - U(x)}{\Delta x} = -F(x) \Leftrightarrow F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

＜3次元の場合＞

$$\boxed{U(\boldsymbol{r}) \equiv -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}} \quad U(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}) - U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} \cong -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \Delta\boldsymbol{r}$$

成分表示すると

$$U(x+\Delta x, z+\Delta z, z+\Delta z) - U(x,y,z) \cong -\left(F_x(\boldsymbol{r})\Delta x + F_y(\boldsymbol{r})\Delta y + F_z(\boldsymbol{r})\Delta z\right)$$

Δy=0、Δz=0とおくと、

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x, y, z) - U(x,y,z)}{\Delta x} = -F_x(\boldsymbol{r}) \Leftrightarrow F_x(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial x}$$

ポテンシャルの勾配（gradient）

$$F_x(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial x}, \quad F_y(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial y}, \quad F_z(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial z}$$

これらをまとめて表すと

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \left(F_x(\boldsymbol{r}), F_y(\boldsymbol{r})F_z(\boldsymbol{r})\right) = -\left(\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial x}, \frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial y}, \frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)U(\boldsymbol{r})$$

ここで**ナブラ演算子**を定義する

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

ナブラ演算子

すると、力は簡単に

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla U(\boldsymbol{r})$$

と表せる。∇はこの場合「gradient（クラディエント：勾配）」と読む。