第5章 極座標による運動の記述

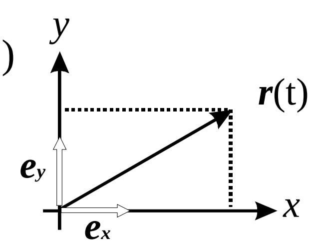
2次元極座標表示

デカルト座標表示

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{e}_x + y(t)\boldsymbol{e}_y = (x(t), y(t))$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\boldsymbol{e}_y = (\dot{x}, \dot{y})$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{x}\boldsymbol{e}_x + \ddot{y}\boldsymbol{e}_y = (\ddot{x}, \ddot{y})$$



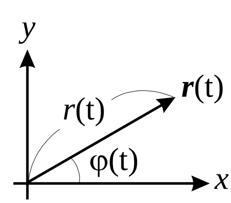
2次元極座標表示

$$\boldsymbol{r}(t) = (r(t), \varphi(t))$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = (\dot{r}, \dot{\varphi})$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r}, \ddot{\varphi})$$

間違い



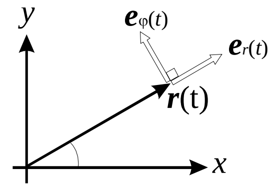
2次元極座標の基底ベクトル

$$\boldsymbol{r}(t) = r(t)\boldsymbol{e}_r(t)$$

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r(t)\boldsymbol{e}_r(t)\right)$$

$$= \frac{dr(t)}{dt}\boldsymbol{e}_r(t) + r(t)\boxed{\frac{d\boldsymbol{e}_r(t)}{dt}}$$

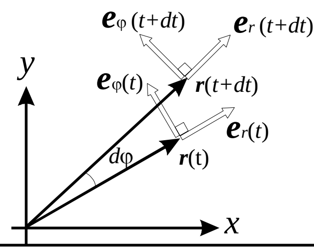
?

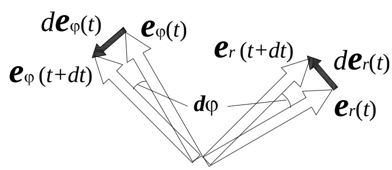


$\boldsymbol{e}_r(t) // \boldsymbol{r}(t)$

$\boldsymbol{e}_r(t) \perp \boldsymbol{e}_\varphi(t)$

$|\boldsymbol{e}_r(t)| = |\boldsymbol{e}_\varphi(t)| = 1$

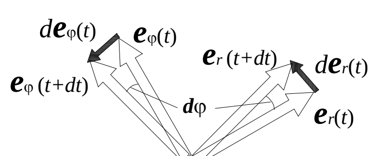




基底ベクトルの時間微分

$$d\boldsymbol{e}_r(t) = d\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi(t)$$

$$d\boldsymbol{e}_\varphi(t) = -d\varphi\,\boldsymbol{e}_r(t)$$



両辺をdtで割ると（単位時間あたりの変化にすると）

$$\frac{d\boldsymbol{e}_r(t)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{e}_\varphi(t) \qquad (\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi)$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\varphi(t)}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{e}_r(t) \qquad (\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_r)$$

したがって、

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{dr(t)}{dt}\boldsymbol{e}_r(t) + r(t)\frac{d\boldsymbol{e}_r(t)}{dt} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi = \boxed{(\dot{r}, r\dot{\varphi})}$$

$(\dot{r}, \dot{\varphi})$ ではない！

極座標表示における速度および加速度ベクトル

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=\frac{dr(t)}{dt}\boldsymbol{e}_r(t)+r(t)\frac{d\boldsymbol{e}_r(t)}{dt}=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{a}(t)=\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\right)=\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)\boldsymbol{e}_r+\left(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\varphi$$

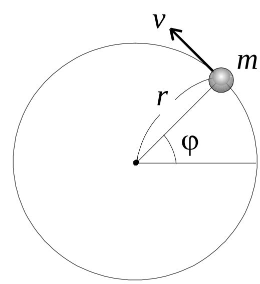
$$=\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi$$

極座標表示の運動方程式は、

$$\boldsymbol{F}=F_r\boldsymbol{e}_r+F_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi=m\boldsymbol{a}(t)\rightarrow\begin{cases}F_r=m\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)\\ F_\varphi=m\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})\end{cases}$$

等速円運動

$$\boldsymbol{r}(t)=\left(r(t),\varphi(t)\right)=\left(r,\omega t\right)$$



角速度ωで回転

***r*成分の運動方程式は、**

$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=F_r(t)$$

***r*は一定なので**

$$F_r(t)=-mr\omega^2$$

向心力 (一定)

φ成分の運動方程式は、

$$m\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})\right]=F_\varphi(t)$$

***r*もφも一定なので、**

$$F_\varphi(t)=0$$

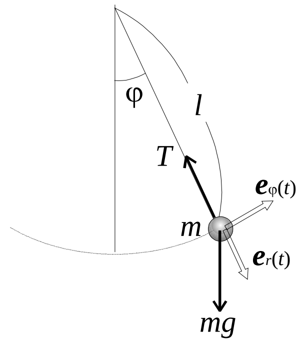
円運動している物体には進行方向の力は働いていない

単振り子

運動方程式より

$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=mg\cos\varphi-T\cdots①$$

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right)=-mg\sin\varphi\cdots②$$



$$F_r=mg\cos\varphi-T$$
$$F_\varphi=-mg\sin\varphi$$

①より

$$-ml\dot{\varphi}^2=mg\cos\varphi-T$$

$$\rightarrow T=mg\cos\varphi+ml\dot{\varphi}^2$$

②より

$$ml\ddot{\varphi}=-mg\sin\varphi$$

$$\rightarrow\ddot{\varphi}=-\frac{g}{l}\sin\varphi\cong-\frac{g}{l}\varphi\,(\varphi<<1)$$