http://maildbs.c.u-tokyo.ac.jp/~torii/lectures/MC/index.htm

平成25夏学期 力学B（524教室）

担当：鳥井　寿夫
教養学部　統合自然科学科
総合文化研究科　広域科学専攻
16号館224A（レポート返却先）
ytorii@phys.c.u-tokyo.ac.jp

H23年度のページ（参考）


平成23年度夏学期 力学B
maildbs.c.u-tokyo.ac.jp/~torii/lectures/MC/index.htm
2次元イジングモデル　ABCDEFG・創造と生…　AVRのタイマ割り込み…　AVRマイコンで学ぶコ…　Arduino + LabVIEW　Arduino風 パソコン制…　Astronomy 601

科目：平成23年度夏学期　力学B（1108教室）
担当：鳥井　寿夫（とりい　よしお）　居室：16号館224A
tel: 03-5454-6757 (内線46757)
e-mail: ytorii@phys.c.u-tokyo.ac.jp
授業日：毎週木曜2限10:40～12:10）、4月14日～7月14日（計13回）　*7月20日（水）3限（@1108）に補講を行います。
評価：毎回の授業で出されるレポート（50%）＋期末試験（50%
レポートの提出期限：次回の授業の開始前。教室にて回収。
教科書：特に指定しない。以下に参考書を挙げる
① **ファインマン物理学I「力学」**（岩波書店）
ノーベル物理学賞のファインマンが1960年代にカリフォルニア工科大学で（たった一度だけ）行った1,2年生向けの講義を録音し、それを同僚のレイトン、サンズが教科書にまとめ上げたもの。「力学」という枠にとらわれず、物理学全体または他の学問分野を常に視野に入れた説明は、他の教科書では見られない。図や具体例も豊富で、数学の説明も丁寧である。今や古典的名著である。他の巻（Ⅱ～Ⅴ）も含めて、物理に関わる学生は、できれば原書で読んでもらいたい。
② **藤原邦夫著・物理学序論としての力学**（東京大学出版会）
古典力学の歴史的背景がよくわかる。脚注や補足説明多い。実際に著者が行った実験データが多数取り入れられており、情熱が伝わってくる。実のある一冊。
③ **兵頭俊夫著・考える力学**（学術図書出版）
力学で押さえるべき内容をシンプルにまとめてある。数学の説明が丁寧である。卑近な例をふんだんに取り入れてあり、面白く読める。物理未修者にはおすすめ。
講義スライド全部（5.4MB）　レポート問題全13回分（1.3MB）　試験問題（1年生用）　試験問題（2年生用）
*6/9のスライドの「減衰振動」のページに誤りがありました（2011.8.16）。　修正後のスライドはこちら。　減衰振動の正しい解はこちら。

回	日付	内容	レポート問題	配布物	講義スライド
1	4/14	物理学とは、物理学の現在、物理量・単位・次元、次元解析	pdf	なし	pdf
2	4/21	単位の換算、微分による速度と加速度の定義、様々な加速度	pdf	x-t,v-t,a-tグラフ（pdf）	pdf
3	4/28	等速円運動、ケプラーの法則、ニュートンの運動の法則	pdf	なし	pdf
4	5/12	ニュートンの運動方程式、重力定数と重力加速度、慣性質量と重力質量、撃力近似、モンキーハンティング	pdf	なし	pdf
5	5/19	古典物理の全て、「重さ」とは何か、作用反作用の法則と力のつりあい、力積と運動量	pdf	なし	pdf
6	5/26	運動量保存則、様々な力（弾性力、束縛力、摩擦力、抵抗力）、力学で扱う微分方程式の種類	pdf	なし	pdf
7	6/2	線形常微分方程式の解法、放射性崩壊、単利と複利、マクローリン展開とテイラー展開、オイラーの公式、単振動	pdf	なし	pdf
8	6/9	抵抗力と終端速度、非斉次方程式の解法、減衰振動	pdf	なし	pdf *誤りがあります
9	6/16	強制振動、極座標を用いた運動の記述	pdf	なし	pdf
10	6/23	単振り子、角運動量、力のモーメント、慣性モーメント	pdf	なし	pdf
11	6/30	角運動量保存則、剛体のつりあい、重力のトルク、重心の運動	pdf	なし	pdf
12	7/7	やじろべえ、地球コマ、仕事の原理、運動エネルギー	pdf	なし	pdf
13	7/14	ポテンシャル、力学的エネルギー保存則	pdf	なし	pdf
14	7/20	補講（3限@1108）：相対運動と慣性力	なし	なし	pdf

参考書

- 「ファインマン物理学I　力学」（岩波書店）

  「たった一つの文章しか次の世代に伝えられないとしたら、最小の語数で最大の情報を与える言葉は『原子仮説』だろうと思う」
  （第1章　「踊るアトム」より）

- 藤原邦夫著「物理学序論としての力学」（東京大学出版会）

- 兵頭俊夫著「考える力学」（学術図書出版）

MIT Open Cource Ware
Physics I: Classica Mechanics (1999)

http://ocw.mit.edu/courses/physics/8-01-physics-i-classical-mechanics-fall-1999/

物理学とは

- 自然界に見られる現象の法則性を実験または観測で見出し、数学を用いて記述する。
- 物理法則は、その正しさが測定の「不確かさ」の範囲で検証される（証明はされない）。実験物理学者は、物理法則の適用範囲を日々実験によって拡張している。
- 既存の物理法則で説明できない実験結果、観測結果が得られた場合、それを説明する理論を理論物理学者が提唱する。

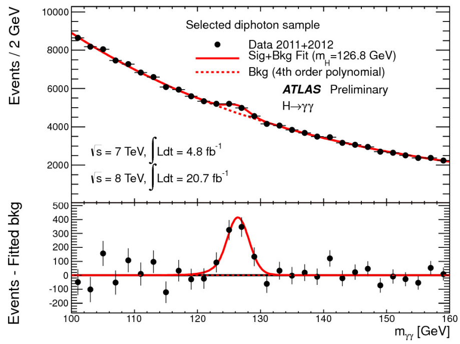
「不確かさ」の重要性

寝ているときの身長は、立っているときの身長より高いか？

http://ocw.mit.edu/courses/physics/8-01-physics-i-classical-mechanics-fall-1999/video-lectures/lecture-1/

Any measurement without the knowledge of its uncertainty is completely meaningless!
「不確かさの情報のない測定には全く意味がないのだ！」

ヒッグス粒子（？）の発見



2012年（平成24年）7月5日 木曜日 朝日新聞 1892年3月11日第3種郵便物認可

ヒッグス粒子か 発見

万物の重さの源

国際チーム発表

万物に質量（重さ）を与えると考えられてきた「ヒッグス粒子」とみられる新粒子を発見したと、スイス・ジュネーブ近郊にある欧州合同原子核研究機関（CERN）が4日、発表した。素粒子物理学の基礎となる「標準理論」の中で唯一見つかっていなかった素粒子だ。物質が質量を獲得し、宇宙がいかにして現在の姿に至ったかを解明する意味がある。

▼3面＝研究者数千人が参加

ヒッグス粒子は、137億年前の「ビッグバン」によって宇宙が誕生した直後に、光速で飛び回る素粒子に対して水あめのように作用して、動きにくくしたと考えられている。この「動きにくさ」こそ、質量を持ったことを意味する。

今回発表されたのは、東大や筑波大など日本の16研究機関が参加する「ATLAS」と、欧米を中心とした「CMS」という二つの研究チームの実験成果。ともに、2008年に稼働を開始したCERNの巨大加速器「LHC」を使って探索実験を続けていた。

ヒッグス粒子は、加速器で光速近くまで加速した陽子と陽子を衝突させることで人為的に作り出すことができる。だが、瞬時に別の粒子や光に変わり、直接観測できない。そこで、変身後の粒子や光を検出器でとらえ、データを統計的に解析することでヒッグス粒子の存在確率を割り出す。データ量が増えるほど確率は高まる。

今回の成果では、CMS、ATLAS共に、実験によって未知の新粒子が生まれた確率を99・9999％とはじきだした。この確度であれば物理的に「発見」と認定できる。だが、新粒子がヒッグス粒子であることを突き止めるには、なおデータを取る必要がある。今年中にデータを積み重ねて発見を確定する見通しだ。

CERNのロルフ・ホイヤー所長は、ヒッグス粒子とみられる粒子の発見について、「歴史的瞬間だが、これからの様々な発見のための始まりに過ぎない」という見解を発表した。

CERNの発表会場には、約四十年前にヒッグス粒子の存在を予測した英エディンバラ大のピーター・ヒッグス名誉教授(83)も招かれ、拍手で祝福された。（田中誠士）

LHCに設置されている検出装置「ATLAS」＝CERN、アトラス実験グループ提供

https://twiki.cern.ch/twiki/bin/view/AtlasPublic/HiggsPublicResults

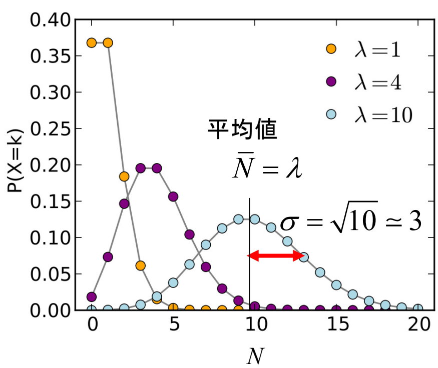
有意度：3σ（粒子がなくとも0.3%の確率で起こり得る）→兆候（evidence）
有意度：5σ（粒子がなければ0.00006%の確率でしか起こり得ない）→発見（discovery）

ポアソン分布とその幅（標準偏差）

全く予測できない事象が一定時間（区間）で起こる回数の分布

ポアソン分布　　　　正規（ガウス）分布

$$P(N) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^N}{N!} \xrightarrow{\bar{N}>10} P(N) \simeq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(N-\bar{N})^2}{2\sigma^2}\right]$$



$$\boxed{\sigma = \sqrt{\bar{N}}}$$

分布の幅（標準偏差）は平均値のルート

<ポアソン分布に従う例>
- 1時間に特定の交差点を通過する車の台数
- 単位面積あたりの雨粒の数
- 1日に受け取る電子メールの件数
- 1時間あたりの電話がかかってくる件数
- ある一定の時間内の店への来客数
- サイコロを100回振って、1の出る回数
- 600世帯のうち、つまらん番組を見ている世帯数

https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson_distribution

古典物理学の形成

- 1543　コペルニクスの地動説
- 1604　落体の法則（ガリレオ）
- 1619　ケプラーの法則
- 1620頃　慣性の法則（デカルト）
- 1687　ニュートンの運動の3法則、万有引力の法則
- 1785　クーロンの法則
- 1820　アンペールの法則
- 1831　ファラデーの電磁誘導の法則
- 1864　マクスウェル方程式
- 1897　電子の発見（トムソン）
- 1905　特殊相対性理論（アインシュタイン）

古典物理（～1905）の全て

表 18-1　古典物理

電磁気学

マクスウェル方程式

I. $\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$　(閉曲面を通る電束) = (内部の電荷)/ε_0

II. $\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$　(ループをめぐる $\boldsymbol{E}$ の線積分) = $-\frac{d}{dt}$(ループを通る $\boldsymbol{B}$ の流束)

III. $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$　(閉曲面を通る $\boldsymbol{B}$ の流束) = 0

IV. $c^2\nabla\times\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$　c^2(ループをめぐる $\boldsymbol{B}$ の積分) = (ループを通る電流)/ε_0 $+\frac{d}{dt}$(ループを通る電束)

[**電荷の保存**

$\nabla\cdot\boldsymbol{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$　(閉曲面を通る電流の流束) = $-\frac{d}{dt}$(内部の電荷)]

力の法則

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$

運動の法則

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{F},$$ ただし $\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$　(アインシュタインの修正によるニュートンの法則)

万有引力

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

力学Bはこれだけ

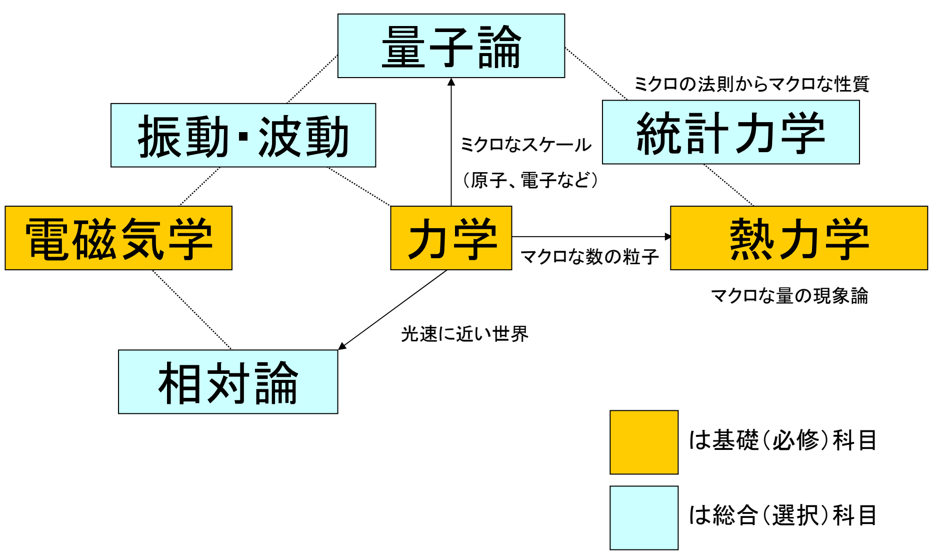
相対論

ファインマン物理学Ⅲ　電磁気学
第18章「マクスウェル方程式」p229

古典力学を勉強する理由

- 歴史の洗礼を受けている（学問のお手本）
- 微分・積分を使って自然現象を記述する練習
- 力、加速度、運動量、エネルギー、保存則、つりあい、共鳴、などの概念は、他の自然科学分野でも重要
- 日常生活に役立つ
- 面白い（？）

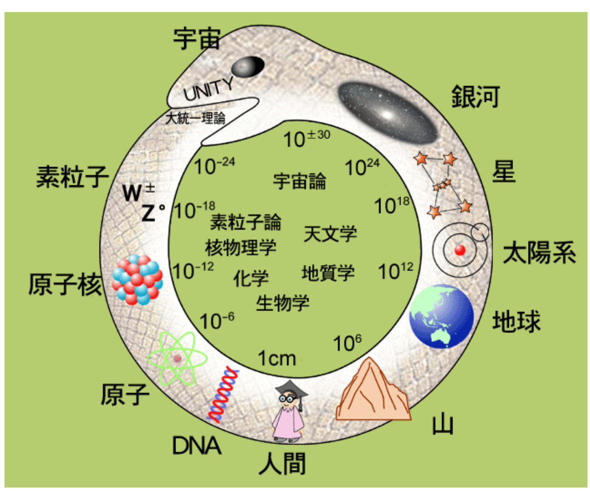
力学と他の物理科目との関係



Powers of Ten（1977）

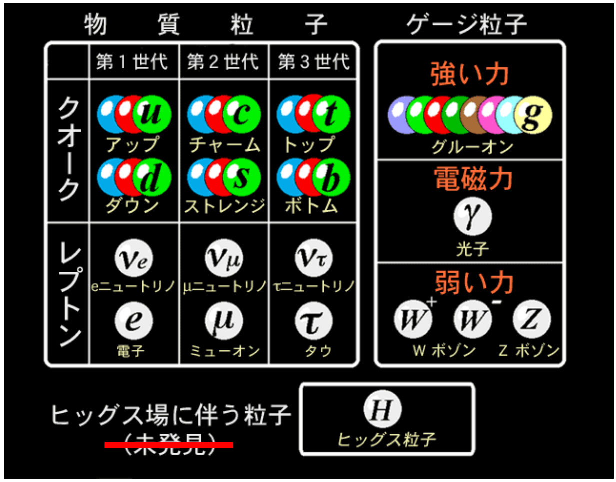
http://www.powersof10.com/film

ウロボロスの蛇



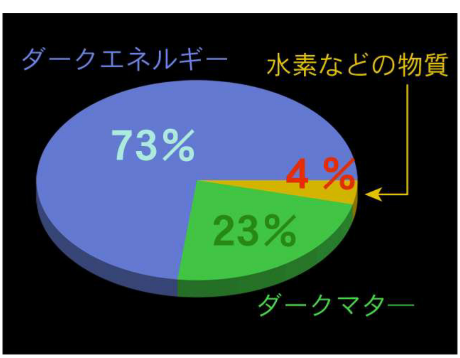
http://www.kek.jp/newskek/2006/novdec/Satointerview.html

素粒子の標準理論

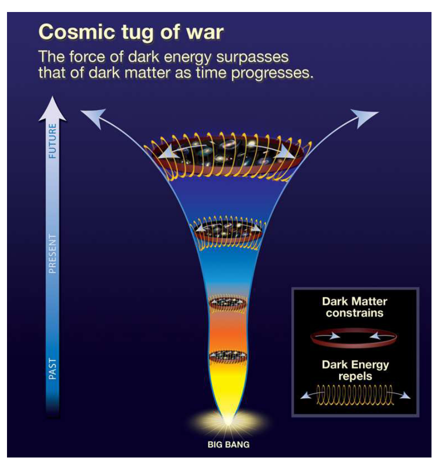


http://www.kek.jp/newskek/2003/mayjun/photo/km1.gif

ダークマター･ダークエネルギー



http://www.kek.jp/newskek/2010/mayjun/darkmatter.html



http://www.space.com/1272-greatest-mysteries-rest-universe.html

第0章
単位系

物理量の次元と単位

- 物理量（physical quantity）: 測定によって定量化される量
- 単位（unit）: 各物理量の基準となる大きさ
- 次元（dimension）: 物理量の質的違いを表す概念
  （足すことに意味がある物理量は同じ次元を持つ）
  この授業では、物理量Aの次元を[A]と表す。

（例）

エネルギーの次元を持つ物理量

熱　仕事

運動エネルギー

位置エネルギー

エネルギーの単位

カロリー（cal）

ジュール（J = N･m）

キロワット時（kWh）

国際単位系(SI)(基本単位)

	物理量	単位の名称	記号
基	長さ	メートル	m
	質量	キログラム	kg
本	時間	秒	s
	電流	アンペア	A
単	温度	ケルビン	K
	物理量	モル	mol
位	光度	カンデラ	cd
補助	平面角	ラジアン	rad
単位	立体角	ステラジアン	sr

MKSA
単位系

＊その他の単位は、上の基本単位の乗除のみで表現できる(組立単位)

国際単位系(SI)(組立単位)

	物理量	記号	単位の名称	SI基本単位による表現
組	周波数(1/ 時間)	Hz	ヘルツ	s^{-1}
	力(質量×加速度)	N	ニュートン	$m\cdot kg\cdot s^{-2}$
立	圧力(力/ 面積)	Pa	パスカル	$N/m^2 = m^{-1}\cdot kg\cdot s^{-2}$
	エネルギー(力×距離)	J	ジュール	$N\cdot m = m^2\cdot kg\cdot s^{-2}$
単	仕事率(仕事/ 時間)	W	ワット	$J/s = m^2\cdot kg\cdot s^{-3}$
	電気(電流×時間)	C	クーロン	$A\cdot s$
位	電圧(エネルギー/ 電気量)	V	ボルト	$J/C = m^2\cdot kg\cdot s^{-3}\cdot A^{-1}$
	静電容量	F	ファラッド	$C/V = m^{-2}\cdot kg^{-1}\cdot s^4\cdot A^2$

長さの単位

1mは、光が真空中を1/299792458秒間に進む距離
（1905年にアインシュタインが提唱した光速度不変の原理を信じ、光速は299792458 m/sであると定義）

真空中の光速は
c = 299,792,458 m/s（exact）

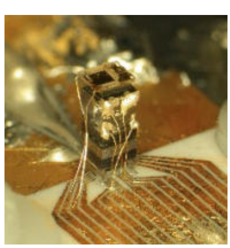
レーザー

Table 1: Fundamental Physical Constants (1998 CODATA recommended values)

Speed of Light	c	$2.997\,924\,58 \times 10^{8}$ m/s (exact)
Permeability of Vacuum	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$N/A^2 (exact)
Permittivity of Vacuum	ϵ_0	$(\mu_0 c^2)^{-1}$ (exact) $= 8.854\,187\,817\ldots \times 10^{-12}$ F/m
Planck's Constant	h	$6.626\,068\,76(52) \times 10^{-34}$ J·s $4.135\,667\,27(16) \times 10^{-15}$ eV·s
	$\hbar$	$1.054\,571\,596(82) \times 10^{-34}$ J·s $6.582\,118\,89(26) \times 10^{-16}$ eV·s
Elementary Charge	e	$1.602\,176\,462(63) \times 10^{-19}$ C
Bohr Magneton	μ_B	$9.274\,008\,99(37) \times 10^{-24}$ J/T $h \cdot 1.399\,624\,624(56)$ MHz/G
Atomic Mass Unit	u	$1.660\,538\,73(13) \times 10^{-27}$ kg
Electron Mass	m_e	$5.485\,799\,110(12) \times 10^{-4}$ u $9.109\,381\,88(72) \times 10^{-31}$ kg
Bohr Radius	a_0	$0.529\,177\,208\,3(19) \times 10^{-10}$ m
Boltzmann's Constant	k_B	$1.380\,650\,3(24) \times 10^{-23}$ J/K

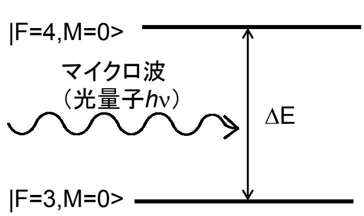
時間の単位（セシウム原子時計）

1sは、133Csの基底状態の二つの超微細構造準位（F=4, M=0およびF=3, M=0）の間のマイクロ波遷移に対応する放射の9,192,631,770周期の継続時間



米国立標準技術研究所が開発した超小型原子時計の心臓部
（2004年9月2日朝日新聞より）

＜^{133}Cs, 6S軌道のエネルギー準位＞

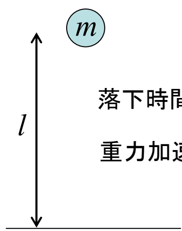


マイクロ波がCs原子と共鳴（ΔE =$h\nu$）しているときの周波数を9,192,631,770Hzと定義

質量の単位

1kgは、キログラム原器（直径、高さとも39mmの円柱形で、白金90%、イリジウム10%の合金）の質量

次元解析（dimensional analysis）



落下時間: T

重力加速度: g

$$[T]=\mathrm{T},$$
$$[m]=\mathrm{M}$$
$$[l]=\mathrm{L}$$
$$[g]=\mathrm{LT}^{-2}$$

$T=Cm^{\alpha}l^{\beta}g^{\gamma}$ と置いてみる

係数（無次元）

両辺の次元は等しいはずなので

$$[T]=[m]^{\alpha}[l]^{\beta}[g]^{\gamma}$$

故に、

$$\mathrm{T}=\mathrm{M}^{\alpha}\mathrm{L}^{\beta}\left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}\right)^{\gamma}=\mathrm{M}^{\alpha}\mathrm{L}^{\beta+\gamma}\mathrm{T}^{-2\gamma}$$

したがって、

$$\alpha=0,\beta=\frac{1}{2},\gamma=-\frac{1}{2}$$

単位の換算（unit conversion）

$$1\,\mathrm{cal} = 4.18\,\mathrm{J} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{4.18\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{cal}} = 1 & \text{（無次元）} \\[2ex] \dfrac{1\,\mathrm{cal}}{4.18\,\mathrm{J}} = 1 & \text{（無次元）} \end{cases}$$

$$100\,\mathrm{cal} = 100\,\mathrm{cal} \times 1 = 100\,\cancel{\mathrm{cal}} \times \frac{4.18\,\mathrm{J}}{1\,\cancel{\mathrm{cal}}} = 100 \times 4.18\,\mathrm{J} = 418\,\mathrm{J}$$

$$100\ \mathrm{J} = 100\,\mathrm{J} \times 1 = 100\,\cancel{\mathrm{J}} \times \frac{1\,\mathrm{cal}}{4.18\,\cancel{\mathrm{J}}} = \frac{100}{4.18}\,\mathrm{cal} = 23.9\,\mathrm{cal}$$

（例題）km/時→m/s　もしくは　m/s → km/時　の換算係数は？

グラフや表の書き方

グラフの例

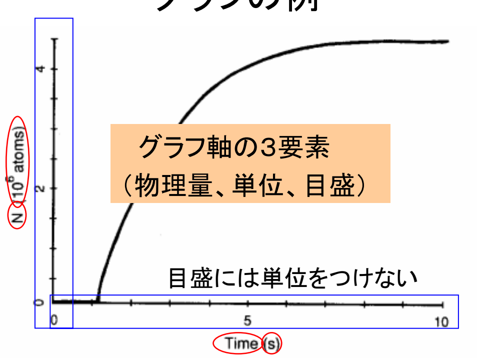


Fig. 7. Number of trapped atoms versus time after the trap is turned on at 1.2 s.

グラフのタイトル（キャプション）

表の例

表のタイトル（キャプション）

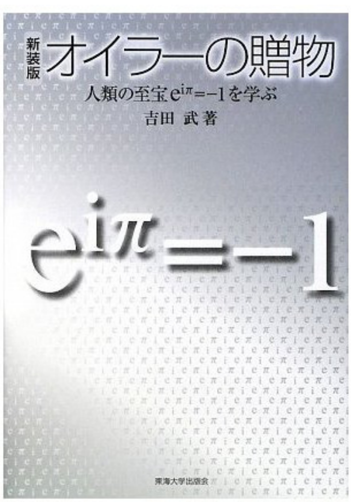
TABLE I. Systematic corrections and their associated uncertainties for the absolute frequency of the $^1S_0$-$^3P_1$ clock transition.

Contributor	Correction (Hz)	Uncertainty (Hz)
Mutual beam tilt	0	5
Position offset	0	2
Velocity	0	4
2nd order Doppler	0	2×10^{-4}
1st order Zeeman	0	0.02
2nd order Zeeman	4	0.3
Light shift	0	0.01
Blackbody shift	1	0.1
Recoil shift	−4775	$<1 \times 10^{-3}$
Stimulated-emission dip	−4	20
Probe power balance (I)	−5	15
Probe power balance (II)	0	20
Density shift	0	2.9
Maser calibration	0	1.7
Systematic totals	−4779	33

個々の数値には単位をつけない

4月15日のGoogleトップページ
オイラー生誕307周年

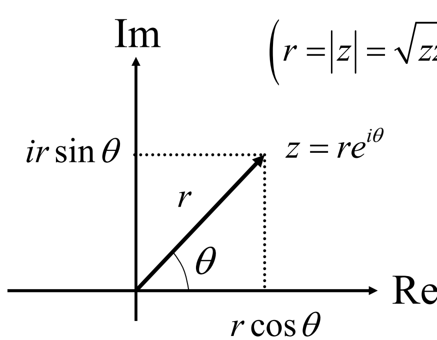
オイラーの公式(1748)



$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\left(r = |z| = \sqrt{zz^*}\right)$$



eは自然対数の底（これもオイラーの発見）

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$=\frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] \quad \left(n\equiv\frac{x}{\Delta x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\log_a e \xrightarrow{a=e} \frac{1}{x}$$

eの発見、それは複利計算から

１年後に発生する利息が元本のα倍とすると $N_0 \xrightarrow{\text{1年後}} N_0(1+\alpha)$

利息は毎月発生していると考えると

$$N_0 \xrightarrow{\text{1年後}} N_0\left(1+\frac{\alpha}{12}\right)^{12}$$

利息は毎日発生していると考えると

$$N_0 \xrightarrow{\text{1年後}} N_0\left(1+\frac{\alpha}{365}\right)^{365}$$

α	$1+\alpha$	e^α
0.1	1.1	1.105
0.5	1.5	1.65
1	2	2.7
2	3	7.4
3	4	20

利息は連続的に発生していると考えると

$$N_0 \xrightarrow{\text{1年後}} N_0\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^\alpha = N_0e^\alpha$$

$$e\equiv\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ヤコブ・ベルヌーイ（1683）

二項分布とポアソン分布

M回の試行で確率pの事象がN回起こる確率（二項分布）

$$P(N)=\frac{M!}{N!(M-N)!}p^N(1-p)^{(M-N)}$$

$$\xrightarrow{p\ll 1,\, M\to\infty}\frac{M^N}{N!}\left(\frac{\bar{N}}{M}\right)^N\lim_{M\to\infty}\left(1-\frac{\bar{N}}{M}\right)^M=\boxed{e^{-\bar{N}}\frac{\bar{N}^N}{N!}}$$

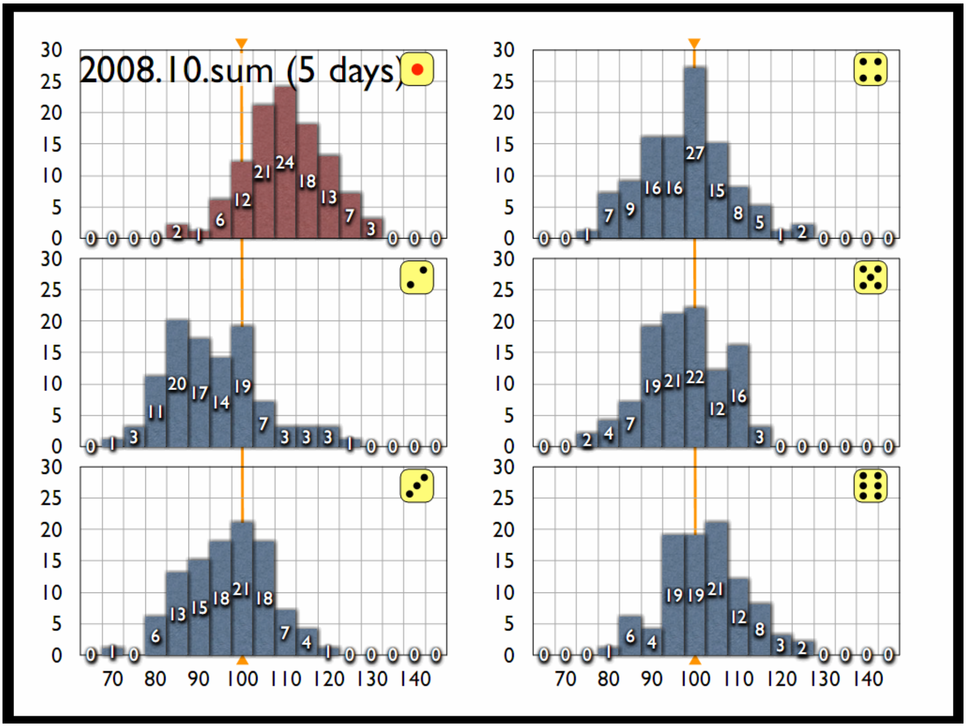
ポアソン分布

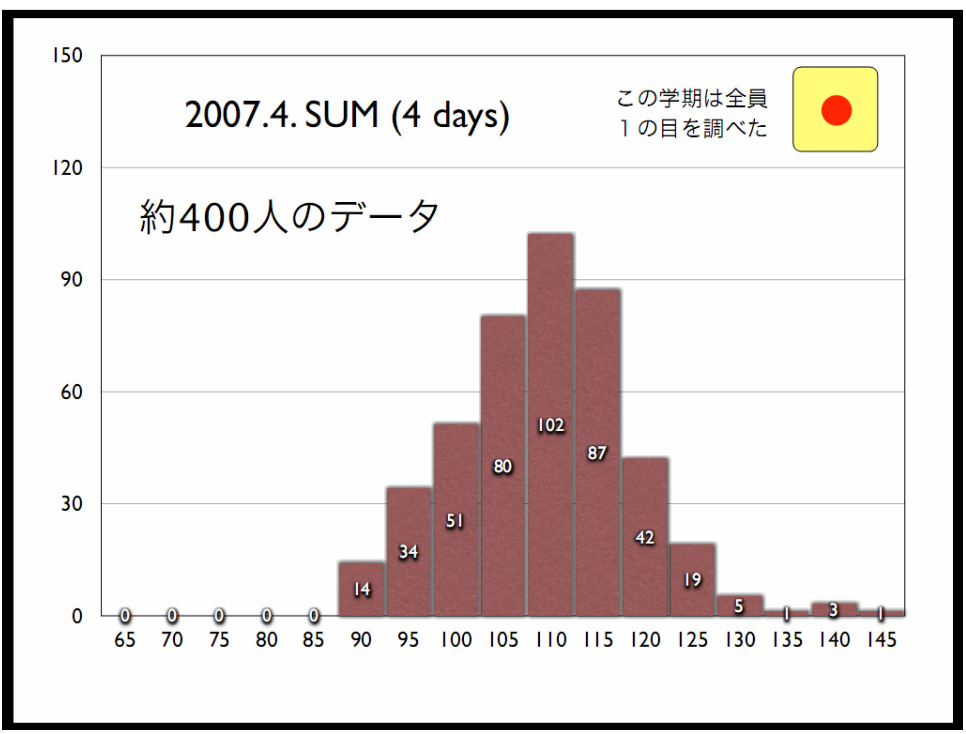
期待値（平均値）$\bar{N}=Mp$

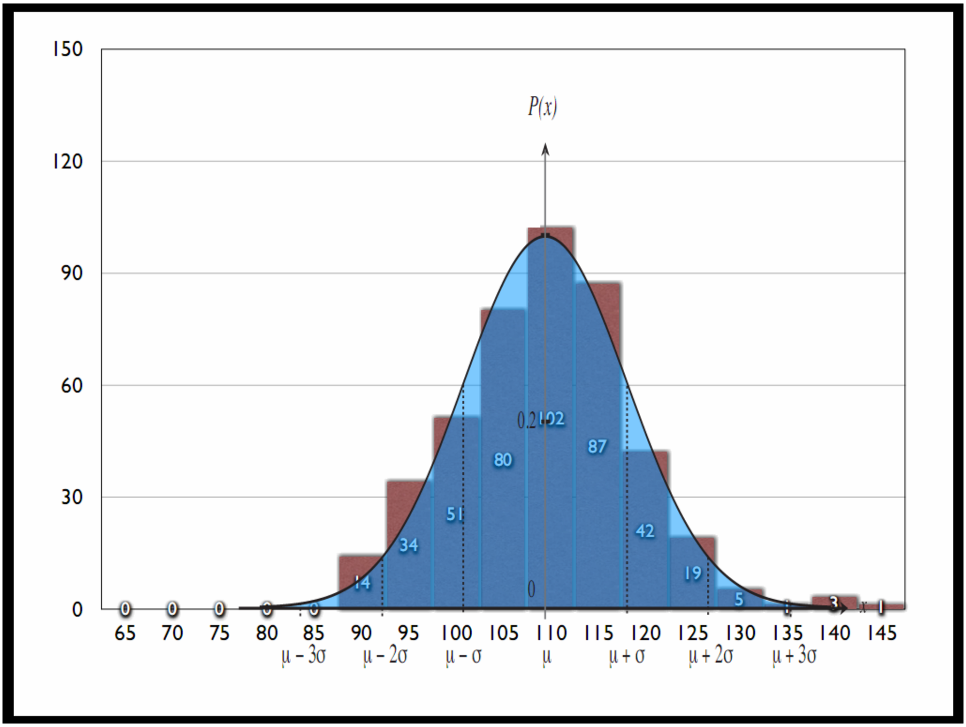
標準偏差　$\sigma=\sqrt{Mp(1-p)}\xrightarrow{p\ll 1}\sqrt{\bar{N}}$

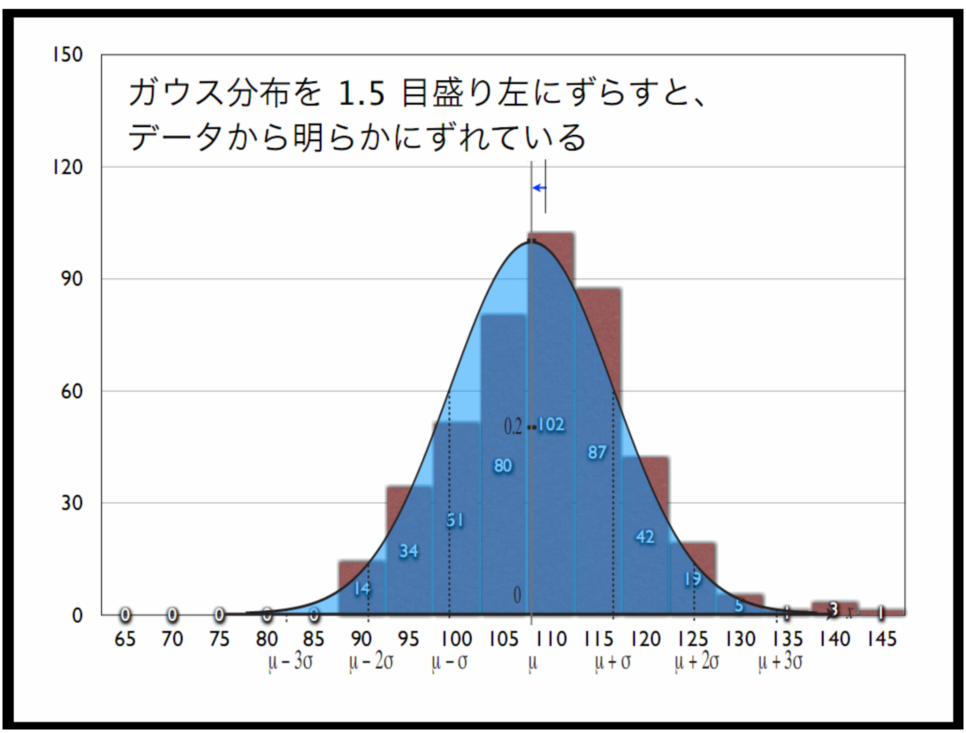
サイコロの1の目が出る確率は本当に1/6だろうか？

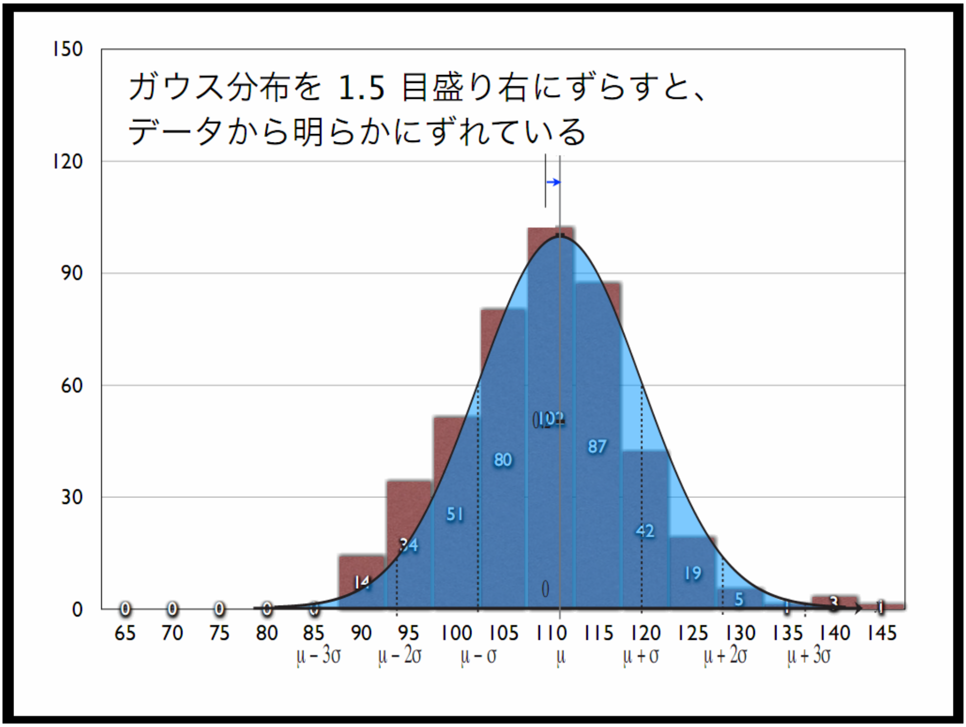
- サイコロを600回振って1の目の出た回数を数える（実際は6個のサイコロの入った容器を100回振る）
- 各目の出る確率が等しいなら、平均で100回1の目が出るだろう
- しかし、実際は正確に100回、1の目が出る訳ではない。
- どのような議論をすればサイコロの“対称性の破れ”を検証できるのだろう？

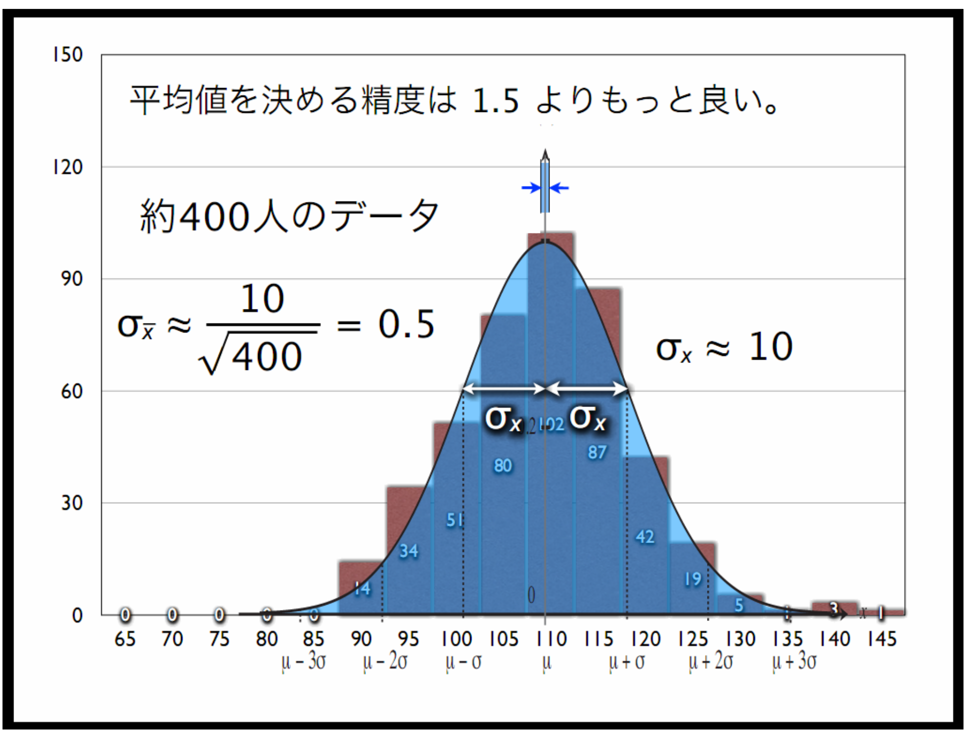

2008.10.sum (5 days)


2007.4. SUM (4 days)
この学期は全員
1の目を調べた
約400人のデータ


150
120
90
60
30
0
P(x)
0.2
102
87
80
51
42
34
19
14
5
3
1
0
65 70 75 80 85 90 95 100 105 110 115 120 125 130 135 140 145
μ - 3σ
μ - 2σ
μ - σ
μ
μ + σ
μ + 2σ
μ + 3σ
x


ガウス分布を 1.5 目盛り左にずらすと、
データから明らかにずれている
150
120
90
60
30
0
0.2
102
87
80
51
42
34
19
14
5
3
1
0
65 70 75 80 85 90 95 100 105 110 115 120 125 130 135 140 145
μ - 3σ
μ - 2σ
μ - σ
μ
μ + σ
μ + 2σ
μ + 3σ
x


ガウス分布を 1.5 目盛り右にずらすと、
データから明らかにずれている
150
120
90
60
30
0
65 70 75 80 85 90 95 100 105 110 115 120 125 130 135 140 145
μ - 3σ μ - 2σ μ - σ μ μ + σ μ + 2σ μ + 3σ
14 34 51 80 102 87 42 19 5 3 1


平均値を決める精度は 1.5 よりもっと良い。
約400人のデータ
$\sigma_{\bar{x}} \approx \frac{10}{\sqrt{400}} = 0.5$
$\sigma_x \approx 10$
σ_x σ_x
150
120
90
60
30
0
65 70 75 80 85 90 95 100 105 110 115 120 125 130 135 140 145
μ - 3σ μ - 2σ μ - σ μ μ + σ μ + 2σ μ + 3σ
14 34 51 80 102 87 42 19 5 3 1

平均値の不確かさ

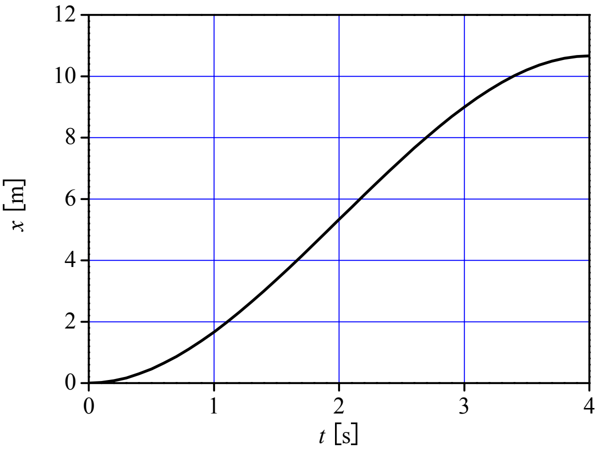
- 一回一回の測定の不確かさ（揺らぎ）がΔXのとき、同様の測定をN回繰り返した際の平均値の不確かさは

$$\Delta \bar{X} = \frac{\Delta X}{\sqrt{N}}$$

（例題）
600世帯を対象にした世論調査では、視聴率の不確かさは1％程度である。この不確かさを1ケタ小さくしたければ、調査する世帯数を何倍にすればよいか？

第1章
位置・速度・加速度

x-tグラフより速度と加速度を求める



$y=-\frac{1}{3}x^3+2x^2$

ファインマン物理学I 力学　8章　運動

……女の人の運転する自動車が白バイにつかまった。巡査が彼女のところへやってきて、こう言う。「奥さんは時速六〇マイルで走っていましたね!」彼女は言う。「そんなはずはありませんよ。まだ七分間しか走っていないのですよ。おかしいですね——まだ一時間も走らないのに一時間六〇マイル走れるはずはないじゃありませんか?」もしも諸君が警官だったら何と答えるか? ……我々はこう言う。「奥さん、我々が言うのはこういう意味なのです。あなたがいままでどおりに走りつづけていったら、次の一時間に六〇マイル行くだろうということなのです。」彼女は言う。「さあ、私はアクセルを踏んでいませんでした。車のスピードはだんだん落ちていました。ですからいままでどおりに走りつづけても、六〇マイル行くはずはありません。」……さっきの女の人はこうも言える。「いままでどおりに一時間走ったら、街のつきあたりの塀にぶつかってしまいますよ!」我々が意味するところを説明するのは、そんなにやさしいことではないのである。

(『ファインマン物理学I　力学』坪井忠二訳より)

ファインマン著「困ります、ファインマンさん」より

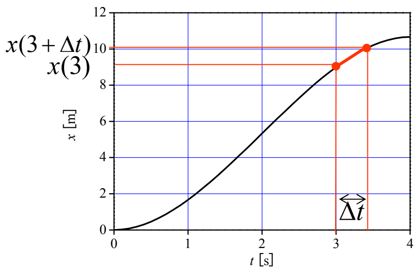
（中略）

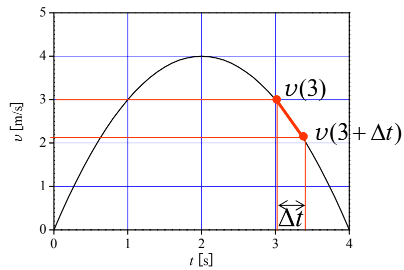
さて，我々の話は軌道に乗ったようである．話はこうである．車の女の人が $\frac{1}{1000}$ 時間走りつづければ，60 マイルの $\frac{1}{1000}$ だけ進むはずである．いいかえれば 1 時間走りつづけるということはいらない；問題は，**ある瞬間**にこのスピードで走っていたというのは，何のことかということなのである．これの意味は，彼女が時間的にもうちょっと走ったら，その間に走る距離は，1 時間に 60 マイルの**一定の**スピードで走る車の距離と同じであるということである．

（中略）

上の定義の中には，一般的の形でギリシャ人にはなかった新しい考えが入っている．それは**微小な距離**とそれに対応する**微小な時間**を考えてその比をつくり，時間を短く短く短くしたら，この比がどうなるかをみるということである．いいかえれば，進んだ距離をそれに要した時間で割って，時間が無限に短く短くなったときの極限を求めるのである．この考えは，ニュートンとライプニッツとによって独立に出されたものであって，**微分学**という数学の新分野のはじまりである．微分学は運動を記述するために発明されたものであって，その第一の応用は，"時速 60 マイル" で走るというのはどういう意味かということを定義する問題であった．

微分を用いた速度と加速度の定義（直線上の運動の場合）





$$v(3) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(3+\Delta t)-x(3)}{\Delta t} \equiv \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=3}$$

$$a(3) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(3+\Delta t)-v(3)}{\Delta t} \equiv \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=3}$$

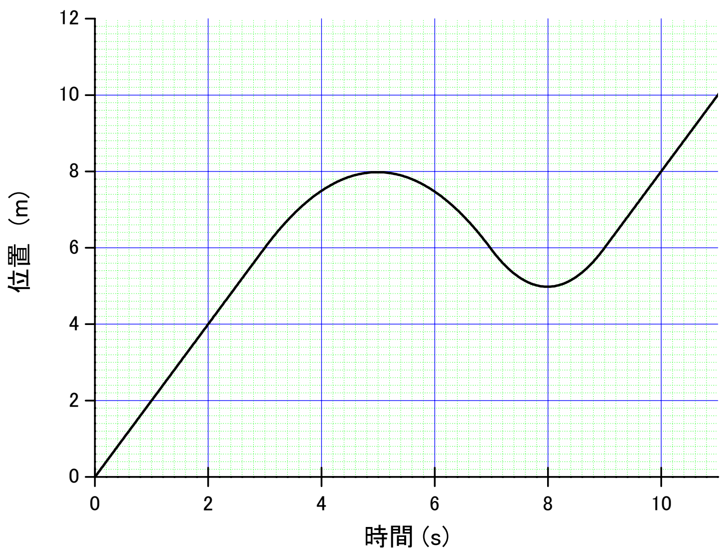
一般に

$$v(t) = \frac{dx}{dt} (\equiv \dot{x})$$

一般に

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} (\equiv \ddot{x})$$

練習問題

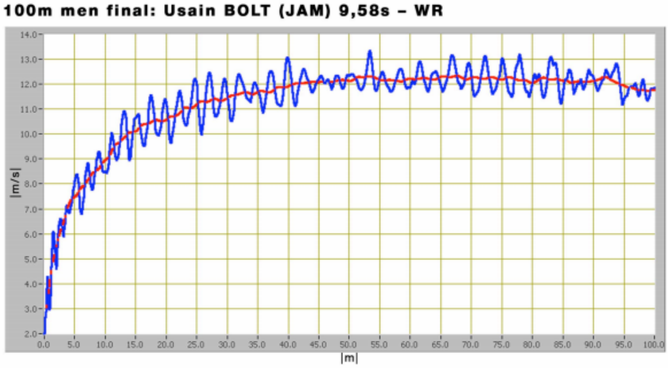


加速度の比較

- 0.006 m/s^2　人に感じられる最小の揺れ
- 0.7 m/s^2　新幹線N700系
- 1.6 m/s^2　月面の重力加速度
- 2 m/s^2　ジェット機の離陸
- 4〜5 m/s^2　人間（100m走のスタート時）の加速度
- 9.8 m/s^2 =1G　地球上の重力加速度（平均値）
- 3〜6G　ローラーコースターの最高加速度
- 10G　戦闘機における加速度限界
- 46.2G　人間が耐えることのできた加速度限界
- 116000G　シリウスB（白色矮星）の重力加速度

人間の最高加速度は？

Biomechanical analysis
12th IAAF World Championships in Athletics • Berlin, 15.–23.08.2009
100m men final: Usain BOLT (JAM) 9,58s – WR



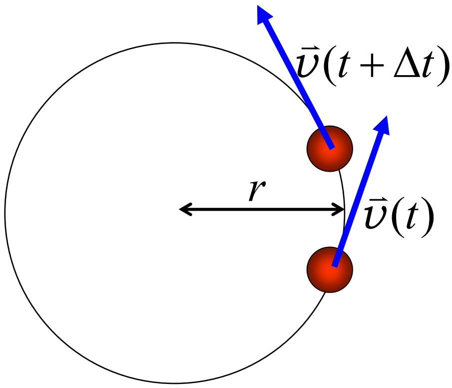
Race distribution: LAVEG measurement curve (blue) and average speed (red)

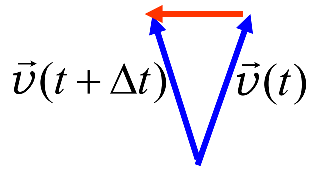
Split times [s]

	Reaction time	t10	t20	t30	t40	t50	t60	t70	t80	t90	t100
Bolt	0,146	1,89	2,88	3,78	4,64	5,47	6,29	7,10	7,92	8,75	9,58
Powell	0,134	1,87	2,90	3,82	4,70	5,55	6,39	7,23	8,08	8,94	9,84

http://berlin.iaaf.org/news/kind=101/newsid=53084.html

等速円運動における加速度





$$\vec{a}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

周波数 $\nu =$

角周波数 $\omega =$

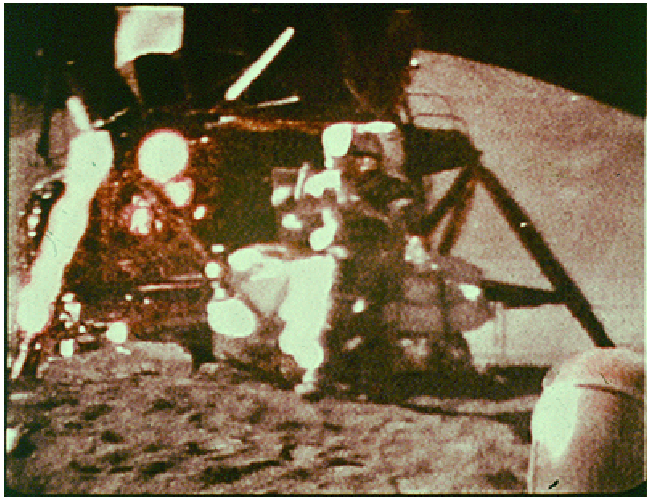
周期 $T =$

加速度の向き:

加速度の大きさ: $a =$

目次

月面での羽とハンマーの落下



http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/lunar/apollo_15_feather_drop.html

スコット船長の台詞

“Well, in my left hand I have a feather; in my right hand a hammer. I guess one of the reasons we got here today was because of the gentleman named Galileo long time ago, who made a rather significant discovery about falling objects in gravity fields; and we thought that where would be a better place to confirm his findings than on the Moon. And, so, we thought we'd try it here for you. The feather happens to be, appropriately, a falcon’s feather, for our Falcon, and I'll drop the two from here, and hopefully they'll hit the ground at the same time."

（ここで落下実験）

"How about that! This proves that Galileo was correct in his findings."

“さて、私の左手に羽、右手にハンマーを持っています。我々が今日ここにおりますのも、その昔、ガリレオという名の紳士が重力場における落体についての非常に重要な発見をしたことも理由の一つでしょう。だから我々は彼の発見を確かめるのに月より最適な場所はないと考え,ここで皆さんのために試してみたいと思います。羽は偶然にも我々のファルコン（宇宙船の名）にちなんだ「はやぶさ（ファルコン）」の羽です。二つをここから落とせば、うまくいけば同時に地面に落ちることでしょう。

（ここで落下実験）

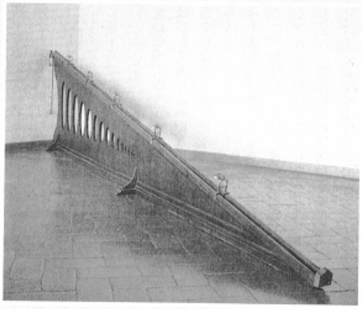
“どうです！　これでガリレオの発見が正しかったことが証明されました”

第3章

アルファ実験
——ガリレオと斜面

理科の教師たちはそれを、もっとも重要な実験という意味で「アルファ実験」と呼ぶ。物理学の授業で生徒たちがはじめて学ぶ実験はこれであることが多い。この実験はさまざまな意味において、最初の近代的科学実験だった——一人の研究者が数学的法則を見出すために一連の行動を系統的に計画し、舞台にかけ、観察したのである。

ガリレオが一六〇四年に成功させたこの実験により、加速度、つまり時間に対する速度の変化率という概念が創案された。斜塔の実験が、自由落下に関するガリレオの研究から生まれたデモンストレーションであり、抵抗が無視できるほど小さいとき、重さの異なる物体は一緒に落下することをわかりやすく示すものだったとすれば、斜面の実験は、やはり自由落下に関する彼の研究から生まれたデモンストレーションであり、その数学法則を具体例で示すためのものだった。斜面の実験もまた大き



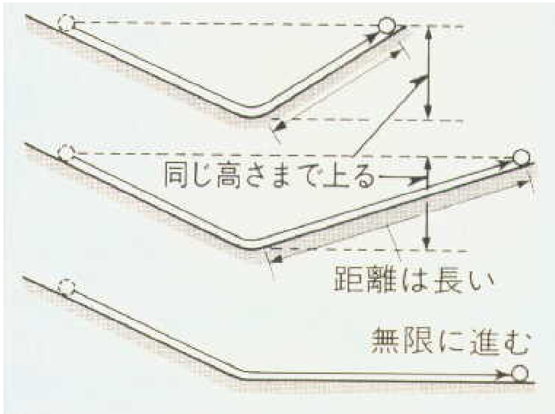
鈴を取り付けた斜面。イタリアのフィレンツェ科学史博物館所蔵。18世紀末に講義のデモンストレーションで使われたもの。斜面の上端から下がっている振り子は、振れるたびに小さな鈴を鳴らし、時間の経過を等間隔で告げる。斜面に鈴を取り付れば、玉が転がり落ちるにつれて鈴が鳴るようにできる。試演者は試行錯誤によって、斜面に取り付けた鈴の音と、振り子が鳴らす鈴の音のタイミングが合うように、斜面の鈴の位置を調節する。斜面の上端からそれぞれの鈴までの距離を測れば、試演者（と聴衆）は、一定時間内に玉が転がり落ちる距離は、1で始まる奇数の数列をなすという結果を得るだろう。つまり、ある時刻までに玉が転がった距離は、それまでに経過した時間の2乗に比例するのである。これはガリレオの法則が成り立つことを示す一例だが、ガリレオによる斜面実験がこれとまったく同じだったという証拠はない。

斜面の実験に驚く人々

Galileo Galilei is the tallest figure to the left of center in this 1841 Giuseppe Bezzuoli (1784 - 1855) alfresco painting “The Trial of Galileo (1564 - 1642) Detail of Galileo in Pisa” in the Tribuna di Galileo in Florence, Museo Zoologico La Specola, depicting Galileo explaining his “Law of Falling Bodies” during his Inquisition trial as his rolling ball experiment was being conducted. To the left are some of Galileo’s main university critics reading from one of Aristotle’s books proclaiming that heavier objects fall faster than lighter ones which by Galileo’s “Law of Falling Bodies” is indisputably disproved for falling bodies in a vacuum. Immediately surrounding Galileo are his students and followers while to the right of him in the painting are also some of his religious and scientific enemies who in 1633 by the Tribune of the Inquisition helped convict Galileo for his scientific and religious heresies against Roman Catholic dogmas. Source: Institute and Museum of History of Science, Florence, Italy.

http://www.relativitycalculator.com/Galileo.shtml

ガリレオの思考実験:
水平方向の慣性の法則



http://www.nararika.com/butsuri/kagakushi/riki/riki.htm

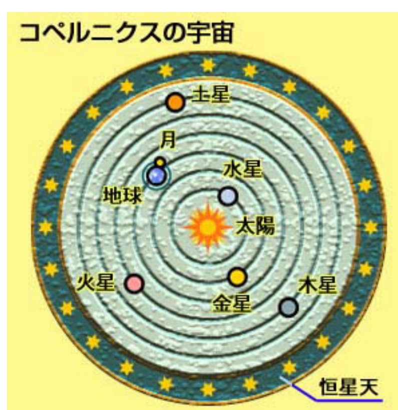
（注）慣性の法則を3次元に拡張したのはデカルト（1620年頃）

古典物理学の形成

- 1543　コペルニクスの地動説
- 1604　落体の法則（ガリレオ）
- 1619　ケプラーの法則
- 1620頃　慣性の法則（デカルト）
- 1687　ニュートンの運動の3法則、万有引力の法則
- 1785　クーロンの法則
- 1820　アンペールの法則
- 1831　ファラデーの電磁誘導の法則
- 1864　マクスウェル方程式
- 1897　電子の発見（トムソン）
- 1905　特殊相対性理論（アインシュタイン）

第2章
運動の法則と
万有引力

天動説と地動説



http://spaceinfo.jaxa.jp/ja/universe_ancient.html　http://spaceinfo.jaxa.jp/ja/movingheavens_movingearth.html

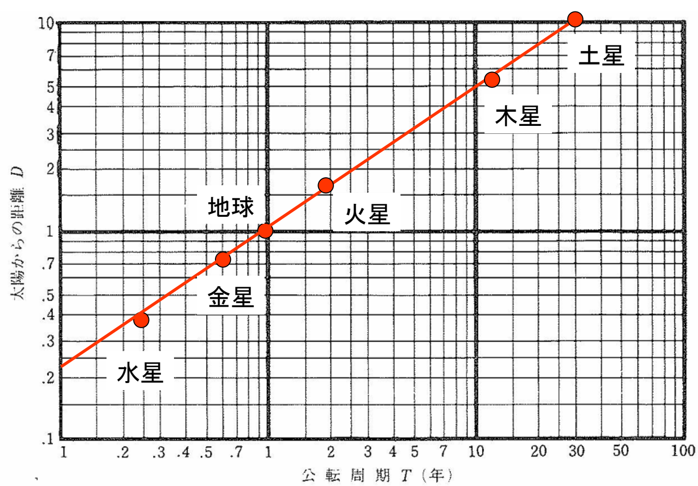
コペルニクス（1473-1543）の求めた惑星の公転周期と太陽からの平均距離

表 1.2　コペルニクスの求めた太陽系に関する諸数値と現在の数値との比較

	公転周期 T		太陽からの平均距離 D（地球のそれを単位とする）	
	コペルニクス	現在	コペルニクス	現在
水星	88 日	88.01 日	0.36	0.387
金星	225 日	224.60 日	0.72	0.723
地球	$365\frac{1}{4}$ 日	365.24 日	1.0	1.000
火星	687 日	686.94 日	1.5	1.524
木星	12 年	11.86 年	5	5.203
土星	30 年	29.46 年	9	9.539

藤原邦男「物理学序論としての力学」p.9より

公転周期Tと太陽からの距離Dの関係



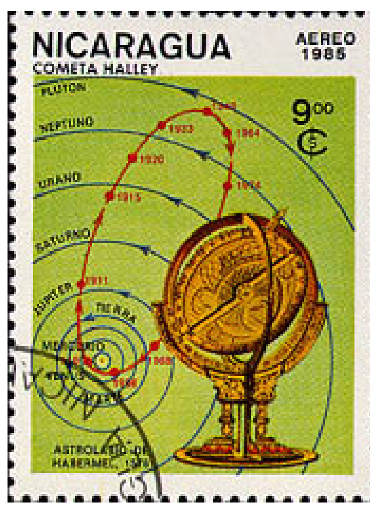
ケプラーの法則
（ケプラー「宇宙の調和」（1619））

- 第1法則（楕円軌道の法則）
  - 惑星は、太陽をひとつの焦点とする楕円軌道上を動く。
- 第2法則（面積速度一定の法則）
  - 惑星と太陽とを結ぶ線分が単位時間に描く面積は、一定である。
- 第3法則（調和の法則）
  - 惑星の公転周期の2乗は、軌道の平均距離の3乗に比例する。

ハレー彗星（76年周期）

前回の回帰は1986年。次回は2061年（50年後）

http://www.astroarts.jp/hoshinavi/magazine/mcnaught_memorial/image/1986.jpg



http://www.ne.jp/asahi/nakaegaw/piz/kit/kt007.html

ケプラーの第2法則と中心力

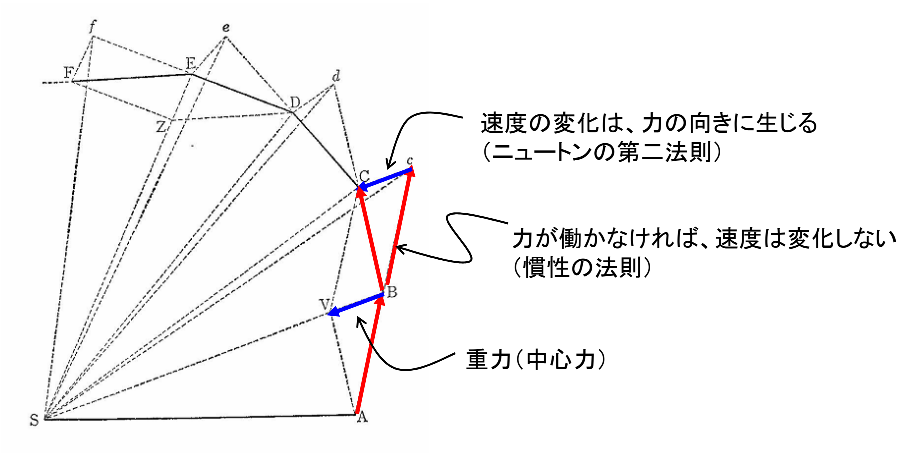


図 12

「プリンシピア」（中野猿人訳）第I編「物体の運動」第II章「求心力の決定」p.63

ケプラーの第3法則と逆2乗則

惑星の円運動の加速度

$$a = \omega^2 D = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 D \propto \frac{D}{T^2}$$

ケプラーの第3法則

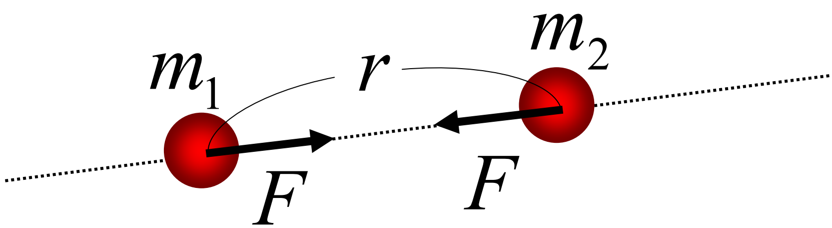
$$T^2 \propto D^3$$

以上より

$$a \propto \frac{D}{T^2} \propto \frac{1}{D^2}$$

惑星の円運動の加速度は、惑星の太陽からの距離の自乗に反比例している（ケプラーの第3法則の言い換え）

万有引力の法則
（ニュートン「プリンキピア」（1687））



$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

物体間に働く引力は、互いを結んだ線に平行で、その大きさは互いの距離の2乗に反比例し、それぞれの質量の積に比例する。

運動の3法則
（ニュートン「プリンキピア」（1687））

- **第1法則（慣性の法則）**
  すべての質点は、それに加えられた力によってその状態が変化させられない限り、静止または一直線上の等速運動の状態を続ける
- **第2法則（運動の法則）**
  質点の運動量（＝質量×速度）の変化は、加えられた力の方向に沿って起り、かつ、微小時間内における運動量の単位時間あたりの変化は、加えられた力に等しい
- **第3法則（作用・反作用の法則）**
  すべての作用に対して、等しく、かつ反対向きの反作用が常に存在する。すなわち、互いに働きあう質点の相互作用は常に相等しく、かつ反対方向へと向かう。

ニュートンの運動方程式（第2法則）

運動量（質量×速度）の単位時間あたりの変化とは

$$\frac{d(m\upsilon)}{dt} = m\frac{d\upsilon}{dt} = ma \quad \left(a \equiv \frac{d\upsilon}{dt} \right)$$

これが、物体に加えられている力に等しいとするのが第二法則

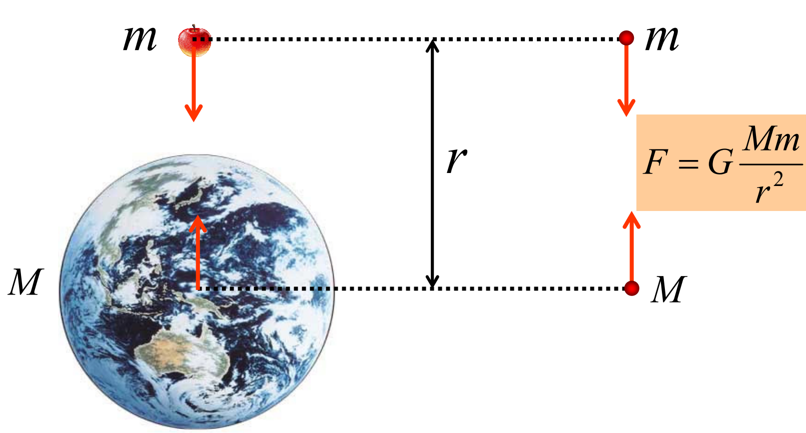
$$\boxed{F = ma}$$

この式は、力の単位を定義していると考えることができる。
1kgの物体に1m/s^{2}の加速度を生じさせる力を1N（ニュートン）と定義する。1N＝1kg m/s^2

（例題）質量が1kgの物体に働く重力は何N（ニュートン）か？
（答え）手を離すと9.8m/s^{2}で落下するので、F = 1 kg × 9.8m/s^2 = 9.8 N = 1kgf(kgw)

大きさのある物体からの重力

りんごと地球（大きさあり）　　　　質点（大きさなし）



（定理）大きさのある物体間に働く重力は、物体の密度分布が球対称ならば全質量が中心に集まった仮想的な**質点**の間に働く重力に等しい

地球上の物体に働く重力

$$F = G\frac{M_{\oplus} m}{R_{\oplus}^2} = mg \left(g = G\frac{M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \approx 9.8\,\mathrm{m/s^2} \right)$$

m_1

$$F_1 = m_1 g$$

$$a_1 = \frac{F_1}{m_1} = g$$

m_2

$$F_2 = m_2 g$$

$$a_2 = \frac{F_2}{m_2} = g$$

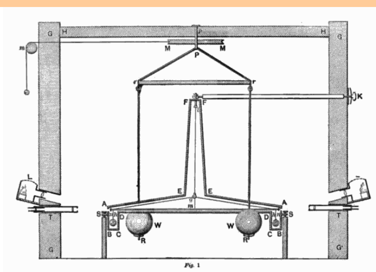
地球

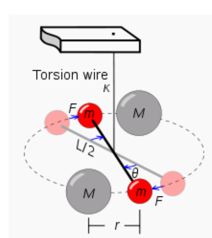
加速度が質量に依らない！

キャベンディッシュの実験(1797) 地球の質量を量る

$$F = G\frac{M_{\oplus} m}{R_{\oplus}^2} = mg \left(g = G\frac{M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \approx 9.8\,\mathrm{m/s^2} \right)$$

地球の半径Rと重力加速度はわかっているので、万有引力定数Gがわかれば、地球の質量Mが求められる。





Wikipediaより

キャベンディッシュの実験結果

地球の比重 = 5.448 ± 0.033

$(G = 6.74 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-1}})$

現在知られているデータ

$$G = (6.67428 \pm 0.00067) \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-1}}$$

$$M_{\oplus} = (5.97219 \pm 0.00060) \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

「慣性質量」と「重力質量」

物体の質量には色々ある（かもしれない）

- 慣性質量：物体の「動かしにくさ（慣性）」を表す量。加速度は質量に反比例する。

$$F = m_{\mathrm{I}} a \to a = \frac{F}{m_{\mathrm{I}}}$$

- 重力質量：他の物体から、その物体に加わる「重力の大きさ」を表す量。重力は質量に比例する

$$F = G\frac{Mm_{\mathrm{g}}}{R^2} = m_{\mathrm{g}} g$$

実験事実：観測される重力加速度は、物質の種類や体積に依存しない→慣性質量と重力質量は比例する

実験結果

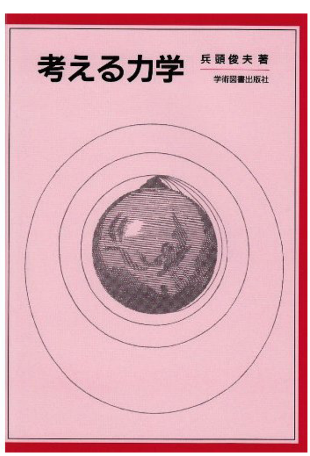
$$a = \frac{F}{m_{\mathrm{I}}} = \frac{m_{\mathrm{g}}}{m_{\mathrm{I}}} g = g\,?$$

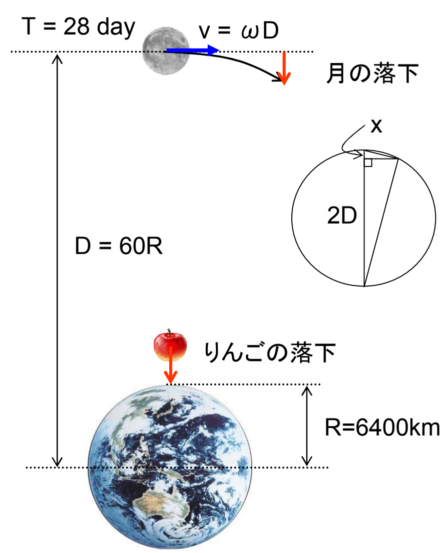
アインシュタインの一般相対性理論では、両者は同一のものとみなす（等価原理）

$$m_{\mathrm{g}} = m_{\mathrm{I}} = m$$

今後、この授業でも両者を区別せずにmと表す。

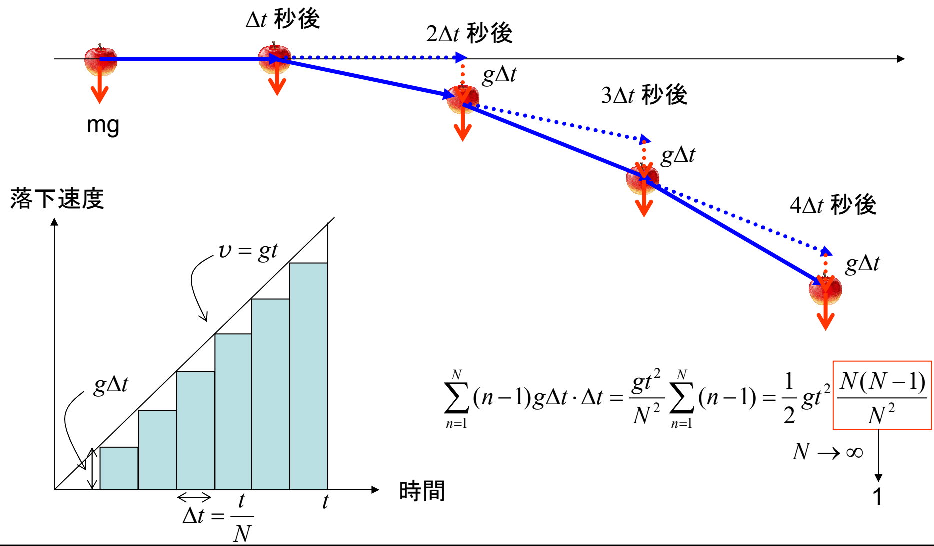
地上のリンゴと月の落下





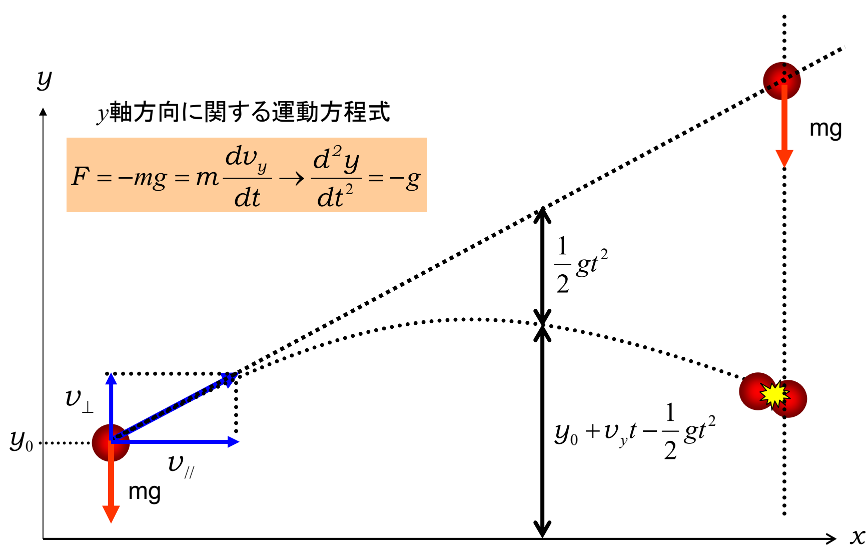
Not to scale(縮尺は合ってない)

撃力近似と積分

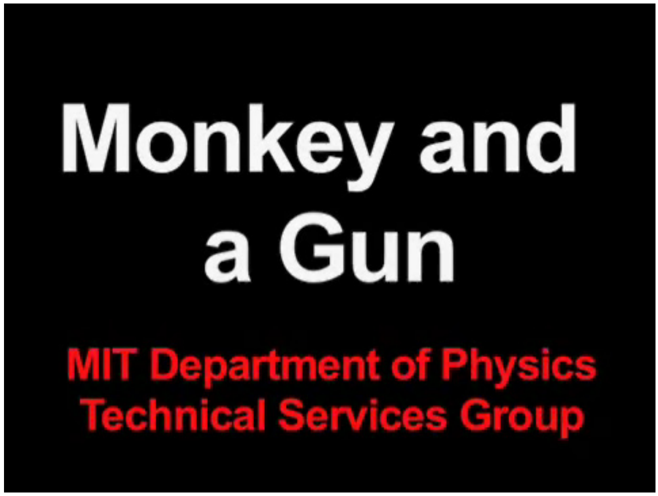


$$\sum_{n=1}^{N}(n-1)g\Delta t\cdot\Delta t = \frac{gt^2}{N^2}\sum_{n=1}^{N}(n-1) = \frac{1}{2}gt^2\boxed{\frac{N(N-1)}{N^2}}$$

Monkey Hunting



MIT Physics Demo



http://techtv.mit.edu/videos/735-monkey-and-a-gun

古典物理(～1905)の全て

表 18-1　古典物理

マクスウェル方程式

I. $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	(閉曲面を通る電束) = (内部の電荷)/ε_0
II. $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$	(ループをめぐる $\boldsymbol{E}$ の線積分) = $-\dfrac{d}{dt}$(ループを通る $\boldsymbol{B}$ の流束)
III. $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$	(閉曲面を通る $\boldsymbol{B}$ の流束) = 0
IV. $c^2\nabla\times\boldsymbol{B}=\dfrac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0}+\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$	c^2(ループをめぐる $\boldsymbol{B}$ の積分) = (ループを通る電流)/ε_0 $+\dfrac{d}{dt}$(ループを通る電束)

[**電荷の保存**

$\nabla\cdot\boldsymbol{j}=-\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$　　(閉曲面を通る電流の流束) = $-\dfrac{d}{dt}$(内部の電荷)]

力の法則

$\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$

運動の法則

$\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{F}$,　ただし　$\boldsymbol{p}=\dfrac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$　(アインシュタインの修正によるニュートンの法則)

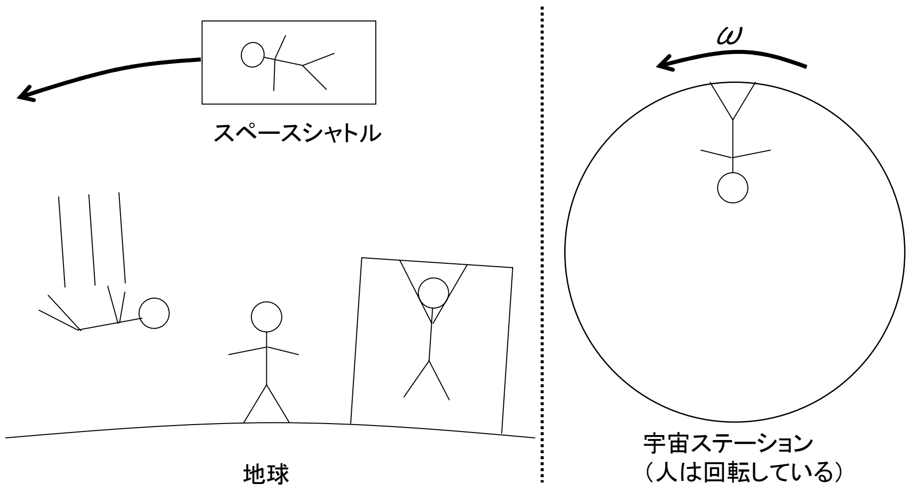
万有引力

$\boldsymbol{F}=-G\dfrac{m_1m_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r$

もう勉強した。力学Bはこれでおしまい?

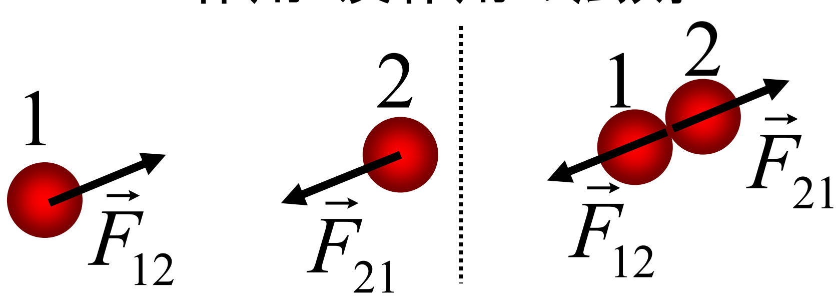
ファインマン物理学III　電磁気学
第18章「マクスウェル方程式」p229

「重さ(weight)」＝「重力(gravity)」？
「無重量」=「無重力」？



Keywords: 力、質量、重力、重さ、慣性力（遠心力）

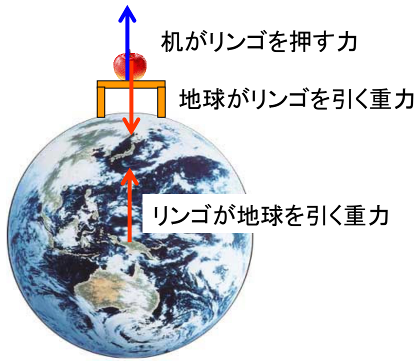
作用・反作用の法則

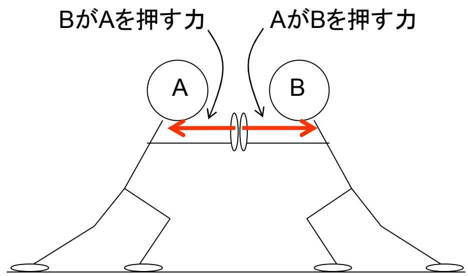


力の大きさは等しく、向きは反対 $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

接触しているか否かにかかわらず成立！

作用・反作用の法則≠力のつりあい





運動量と力積

重たいモノ、速いモノほど止めにくい

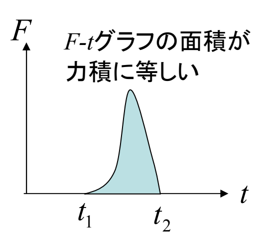
ニュートンの運動方程式

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{p}(t)}{\Delta t} = \mathbf{F}(t) \Rightarrow d\mathbf{p}(t) = \mathbf{F}(t)dt$$

両辺を積分して

$$\mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1) = \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)dt}$$

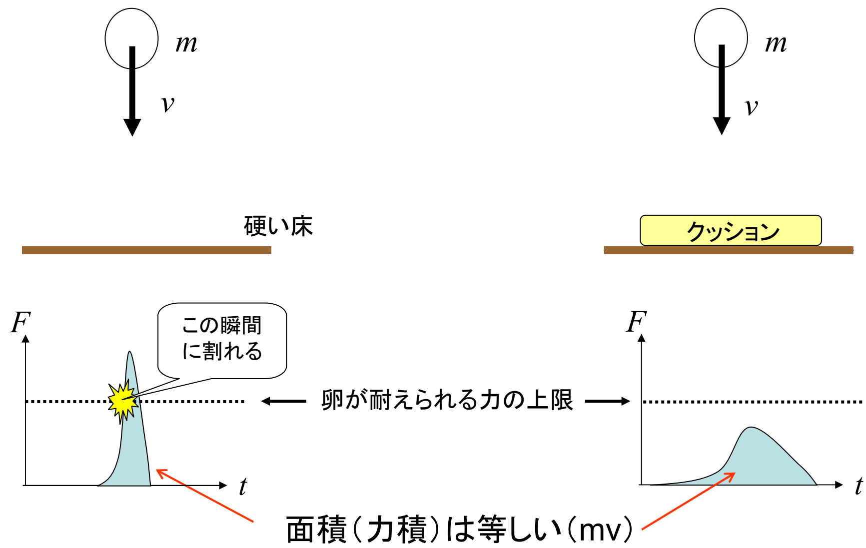
「力積」



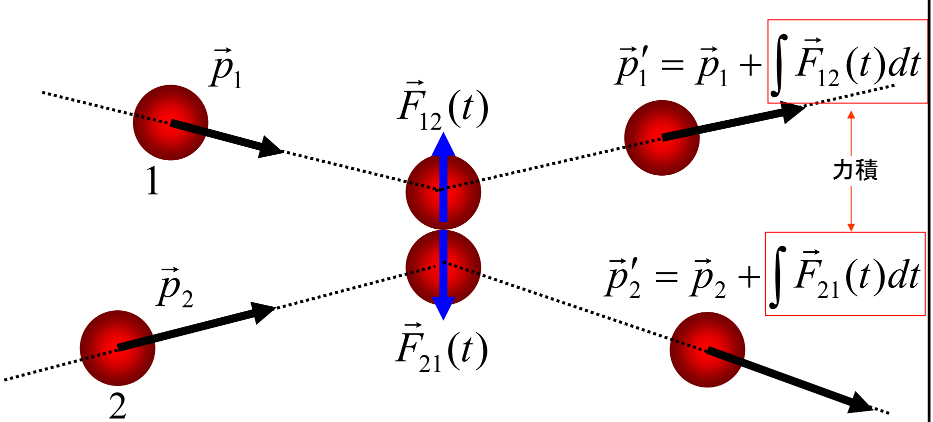
物体の運動量変化は、その物体に与えられた力積に等しい

（運動の第2法則の別表現）

生卵を割らずに受け止めるには



運動量保存則
（運動の第2、第3法則からの帰結）



$\vec{F}_{21}(t) = -\vec{F}_{21}(t)$ より $\boxed{\vec{p}_1' + \vec{p}' = \vec{p}_1 + \vec{p}_2}$

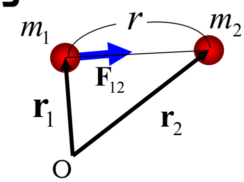
相互作用の前後で、運動量の和は保存する！

Newton’s Cradle

第3章
様々な力

種々の力

万有引力 $\mathbf{F}_{12} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\mathbf{e}_{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}$



電磁気力

$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$

$\varepsilon_0 \nabla\cdot\mathbf{E} = \rho \qquad \nabla\times\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad \nabla\times\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j} + \varepsilon_0\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t})$

静電気力、磁力　　原子間力、分子間力

弾性力　　**これらの区別はあいまい（起源はみな同じ電磁気力）**　　束縛力（垂直抗力、張力）

摩擦力　　抵抗力（粘性抵抗、慣性抵抗）

弾性力
（物体がその形を維持しようとする力）

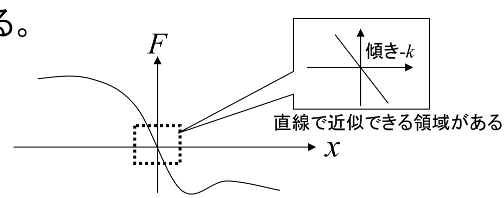
ばねはかりは、フックの法則が成り立つ力の範囲が広いばねを利用して重さを測る道具

自然長（力が働いてないときの長さ）からの「ずれ」をxとする。この「ずれ」を元に戻そうとする力Fは、xが十分小さいならば、近似的にxに比例する。

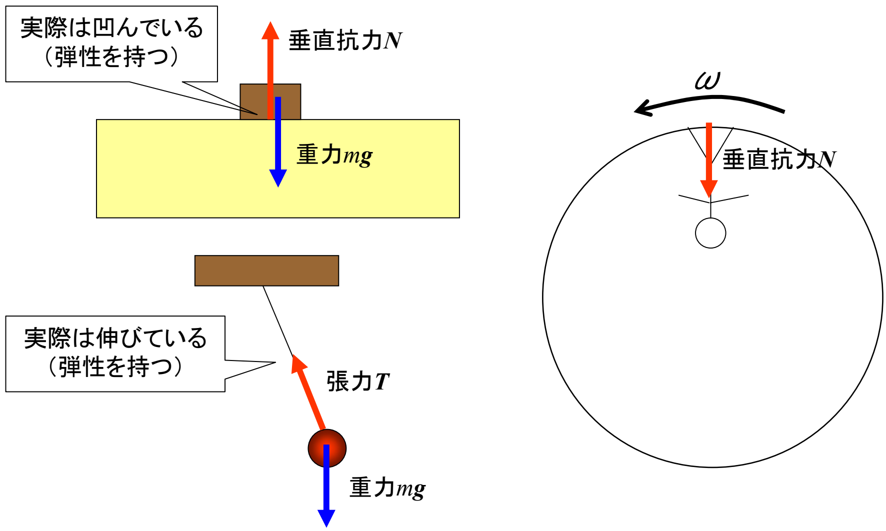
$$F = -kx$$

k：ばね定数 (spring constant)

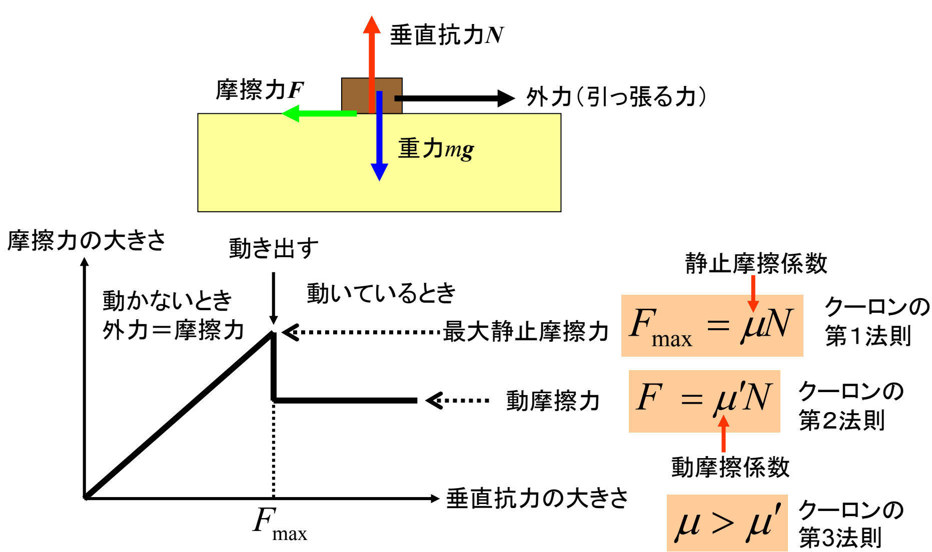
これを**フックの法則**という（あくまで近似法則）。負号は物質の変位を戻す方向に力が働くことを表現する。



束縛力（張力・垂直抗力）
（物体の位置を束縛する弾性力）

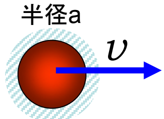


摩擦力
物質の移動を妨げる分子・原子間力？



抵抗力（粘性抵抗、慣性抵抗）

粘性抵抗：物体が近傍の流体を引きずることによって受ける反作用



ストークスの法則

$$F_V = 6\pi a \eta v$$

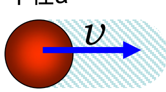
η ：流体の粘性係数

表 3.1　流体の粘性係数と密度（巻末文献 38 による）

物　質	粘性係数 (kg·m^{-1}·s^{-1})	密度 (kg/m^3)
空気（20°C，1気圧）	1.809×10^{-5}	1.205
空気（30°C，1気圧）	1.857×10^{-5}	1.165
水（20°C）	1.002×10^{-3}	9.982×10^{2}
グリセリン（20°C）	1.495	1.264×10^{3}
グリセリン（30°C）	6.22×10^{-1}	——

藤原「物理学序論としての力学」p.49

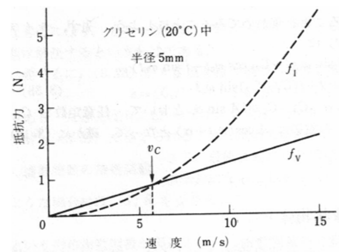
慣性抵抗：物体が通過する空間にある流体との衝突によって受ける反作用



ニュートンによる経験則

$$F_I = \frac{1}{4}\pi\rho a^2 v^2$$

ρ ：流体の密度



藤原「物理学序論としての力学」p.50

第4章
運動方程式の解法

定数係数の線形常微分方程式

2階　1階

$$\boxed{a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)}$$

$$f(t)\begin{cases} = 0 & \text{斉次(同次)} \\ \neq 0 & \text{非斉次(非同次)} \end{cases}$$

せいじ　ひせいじ

1階斉次方程式
(例)放射性崩壊、複利の借金(預金)額

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N \qquad \frac{dN}{dt} = +\alpha N$$

Γ :1秒間に崩壊する確率　α :金利　N :借金(預金)

2階斉次方程式
(例)単振動、減衰振動

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \boxed{-kx} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = \boxed{-b\frac{dx}{dt}} - kx$$

復元力　粘性抵抗　k :ばね定数

2階非斉次方程式
(例)自由落下、強制振動

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx + \boxed{F_0 \cos\omega t}$$

周期的な外力

1階線形常微分方程式

常微分方程式の解法:2つの方針

＜解の形を予測して代入(発見的手法)＞

$$a_2\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=f(t)$$

解は微分して同じ関数形になる指数関数で表現されるのではないか？

$$x(t)=Ae^{\alpha t}$$

うまくいかなければ、定数部分Aも時間の関数とおいてみよう(定数変化法)

$$x(t)=A(t)e^{\alpha t}$$

力学B(運動方程式)では、こちらの手法でOK

＜変数分離して両辺を積分(解析的手法)＞

$$a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=f(t)$$

$f(t)=0$ のとき

$$\frac{dx}{dt}=\alpha x\quad\left(\alpha\equiv\frac{a_1}{a_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x}dx=\alpha dt$$

両辺を積分して

$$\log x=\alpha t+C$$

$$\therefore x=Ae^{\alpha t}\ (A=e^C)$$

$a_0=0$ のとき

$$\frac{dx}{dt}=g(t)\quad\left(g(t)\equiv\frac{f(t)}{a_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow dx=g(t)dt$$

両辺を積分して

$$x=\int g(t)dt+C$$

解ける方程式の形が限られている

放射性元素の崩壊

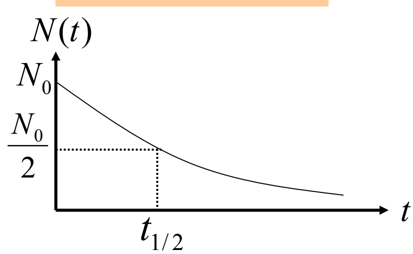
$$\frac{dN}{dt}=-\Gamma N$$

原子1個あたり、1秒間あたりの崩壊確率

ΓN :1秒間あたりに崩壊する原子の数
単位はベクレル[Bq]

初期の原子数をN_0とすると、

$$N(t)=N_0e^{-\Gamma t}$$



半減期を $t_{1/2}$ とすると、

$$\Gamma=\frac{\ln 2}{t_{1/2}}=\frac{0.693}{t_{1/2}}$$

^{40}Kの場合、半減期は12.8億年＝4.04×10^{16}秒

$$\Gamma=\frac{0.693}{4.04\times10^{16}\,\mathrm{s}}=1.72\times10^{-17}\,\mathrm{s}^{-1}$$

複利で借金してはいけない

単利

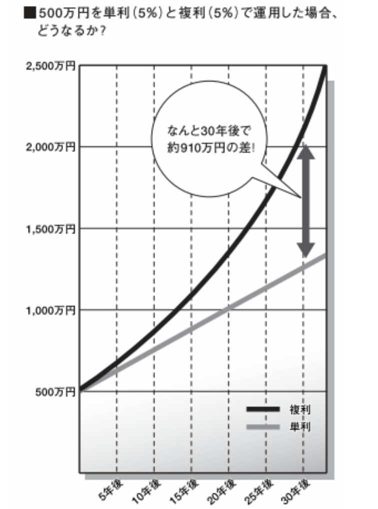
$$\frac{dN}{dt} = +\alpha N_0 \rightarrow N(t) = N_0(1+\alpha t)$$

初期の借金額

複利

$$\frac{dN}{dt} = +\alpha N \rightarrow N(t) = N_0 e^{\alpha t}$$

その瞬間の借金額＝初期の借金額＋累積利息



http://money.monex.co.jp/archives/20070225_2.html

「数学の歴史上、最大の発見は何か？」「それは複利である」（byアインシュタイン）

eの発見、それは複利計算から

１年後に発生する利息が元本のα倍とすると $N_0 \xrightarrow{\text{1年後}} N_0(1+\alpha)$

利息は毎月発生していると考えると

$$N_0 \xrightarrow{\text{1年後}} N_0\left(1+\frac{\alpha}{12}\right)^{12}$$

利息は毎日発生していると考えると

$$N_0 \xrightarrow{\text{1年後}} N_0\left(1+\frac{\alpha}{365}\right)^{365}$$

利息は連続的に発生していると考えると

$$N_0 \xrightarrow{\text{1年後}} N_0\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\alpha} = N_0 e^{\alpha}$$

α	e^{α}	$(1+\alpha)$
0.1	1.105	1.1
0.5	1.65	1.5
1	2.7	2
2	7.4	3
3	20	4

$$e \equiv \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

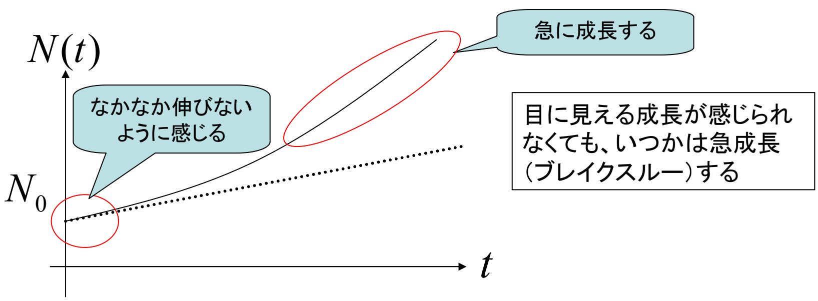
ヤコブ・ベルヌーイ（1683）

人間の知的能力の成長

学習の効率　学習時間

$$\overbrace{\alpha N}^{\text{学習の効率}} \quad dN = \alpha N dt \rightarrow N(t) = N_0 e^{\alpha t}$$

獲得する知能　その時の知能



2階線形常微分方程式

数学的準備① マクローリン展開

無限回微分可能な関数$f(x)$が、以下のようにべき級数展開できるとする:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

係数a_nを求めるには、上式の両辺をn回微分して、x=0を代入すればよい

$$\left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^n}{dx^n}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots) \right|_{x=0} = n! a_n$$

よって、

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \left(f^{(n)}(x) \equiv \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right)$$

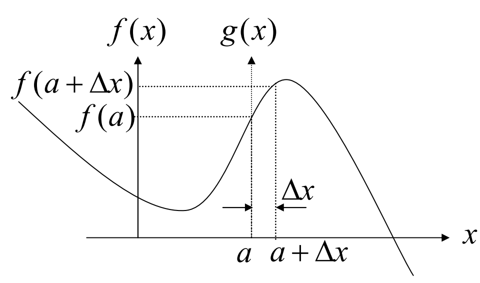
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots$$

テイラー展開と近似

$x = a$ を新しい原点とする関数

$$g(x) = f(a + x)$$

を考えて$g(x)$ をマクローリン展開すると



$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2!} g''(0)x^2 + \cdots\cdots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!} x^n + \cdots$$

xは「原点からの差異」を表すので、これをΔxと書き換えて、g を f で表すと

$$f(a + \Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x + \frac{1}{2!} f''(a)(\Delta x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (\Delta x)^n + \cdots$$

0次近似　1次近似　2次近似　n次近似

指数関数・三角関数のべき級数展開

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

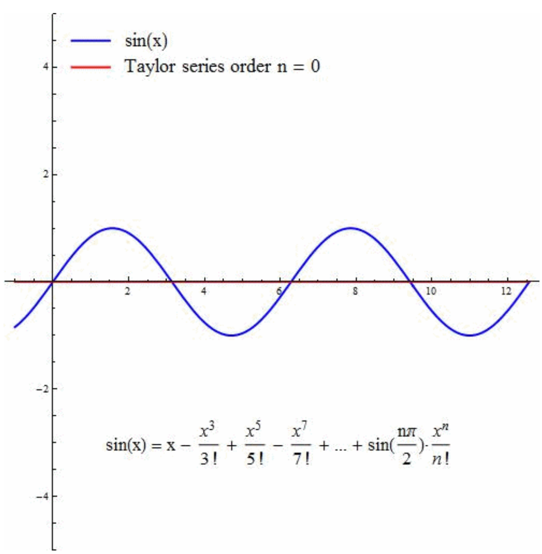
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(ix)^n$$

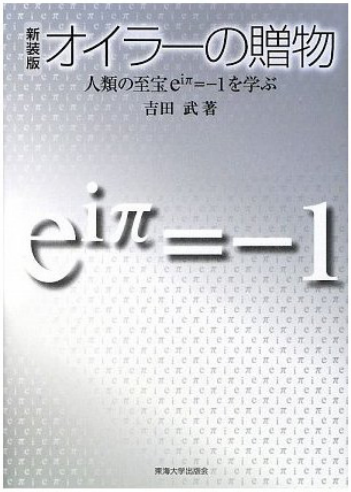
$$= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots\right) + i\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right) = \boxed{\cos x + i\sin x}$$

Sin(x)のテイラー展開の収束



http://mathforum.org/mathimages/index.php/Taylor_Series

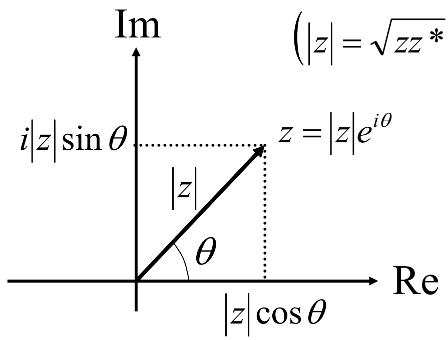
数学的準備② オイラーの公式



$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta$$

$$\left(|z| = \sqrt{zz^*}\right)$$



指数関数の性質

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$$

$$\frac{d}{d\theta}e^{i\theta} = ie^{i\theta}$$

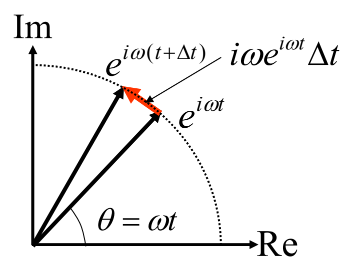
cf. 三角関数の加法定理

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

特に $\theta = \omega t$ と表されるとき

$$\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = \frac{de^{i\theta}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = i\omega e^{i\omega t}$$



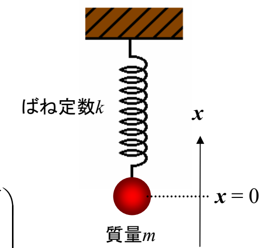
（注意）指数関数の微分では、実部と虚部は混じらない

$$\mathrm{Re}\left[\frac{de^{i\omega t}}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left[e^{i\omega t}\right] \quad \mathrm{Im}\left[\frac{de^{i\omega t}}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\mathrm{Im}\left[e^{i\omega t}\right]$$

単振動

ばね定数kのばねに質量mのおもりがついているとする。自然長からの伸びをxとすると、運動方程式は

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$



解の形として、指数関数　$x = e^{\alpha t}$　を仮定して代入すると

$$\left(\alpha^2 + \frac{k}{m}\right)e^{\alpha t} = 0 \rightarrow \alpha = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega_0 \quad \left(\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

よって、一般解は

$$x(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}$$

初期条件として、t=0 のとき $x = x_0, \dot{x} = 0$ の場合、

$$A = B = \frac{x_0}{2} \rightarrow x(t) = \frac{x_0}{2}e^{i\omega_0 t} + \frac{x_0}{2}e^{-i\omega_0 t} = x_0 \cos\omega_0 t$$

空気抵抗は ∝速度、それとも ∝速度^2

粘性抵抗ならば

$$F_V = -bv \rightarrow m\frac{dv}{dt} = -bv + mg \xrightarrow{\text{無限の時間}} v_t = \frac{mg}{b}$$

終端速度

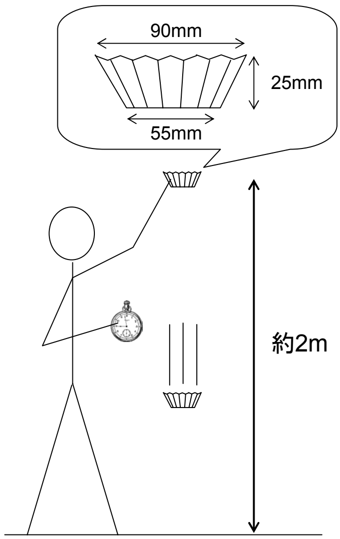
慣性抵抗ならば

$$F_I = -bv^2 \rightarrow m\frac{dv}{dt} = -bv^2 + mg \xrightarrow{\text{無限の時間}} v_t = \sqrt{\frac{mg}{b}}$$

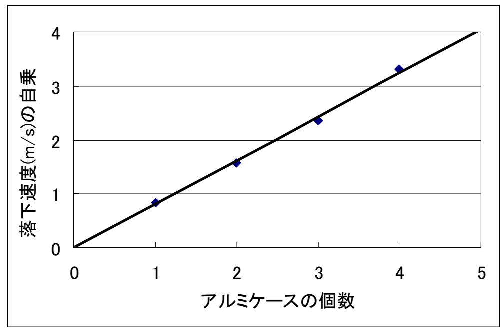
終端速度

同じ形状で、質量の異なる物体を落下させたとき、終端速度が質量に比例すれば粘性抵抗、質量の平方根に比例すれば慣性抵抗

実験：アルミカップの終端速度

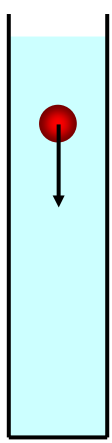


アルミカップの個数	1個	2個	3個	4個
2mの落下時間(s)	2.2	1.6	1.3	1.1
落下速度(m/s)	0.91	1.3	1.5	1.8
落下速度の自乗(m^2/s^2)	0.83	1.6	2.4	3.3



終端速度の自乗は質量に比例→慣性抵抗

粘性抵抗が働く物体の速度変化



$$m\frac{dv}{dt} = -bv + mg \rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{b}{m}v = g$$

非斉次

＜非斉次方程式の一般的解法＞

①まず特殊解を求める（探す）

今の場合、終端速度 $v_t = \dfrac{mg}{b}$ が特殊解。

②右辺=0とおいて（斉次方程式にして）一般解を求める

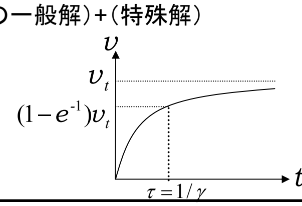
$$\frac{dv}{dt} + \frac{b}{m}v = 0 \rightarrow v = Ae^{-\gamma t} \left(\gamma \equiv \frac{b}{m}\right)$$

③（本当の一般解）＝（斉次方程式の一般解）＋（特殊解）

$$v = Ae^{-\gamma t} + v_t$$

初速度をゼロとすると、$A = -v_t$

$$v = (1 - e^{-\gamma t})v_t$$

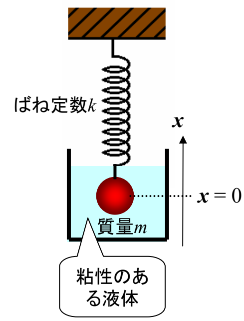


減衰振動

速度に比例する抵抗力（粘性抵抗）が働くの単振動の運動方程式は

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx \rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

ただし、$\gamma \equiv b/2m, \omega_0 = \sqrt{k/m}$ とおいた。



解の形として、指数関数 $x = e^{\alpha t}$ を仮定して代入すると

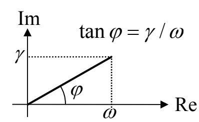
$$\left(\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2\right)e^{\alpha t} = 0 \rightarrow \alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$\gamma < \omega_0$ の場合、$\alpha_\pm = -\gamma \pm i\omega \left(\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0\right)$

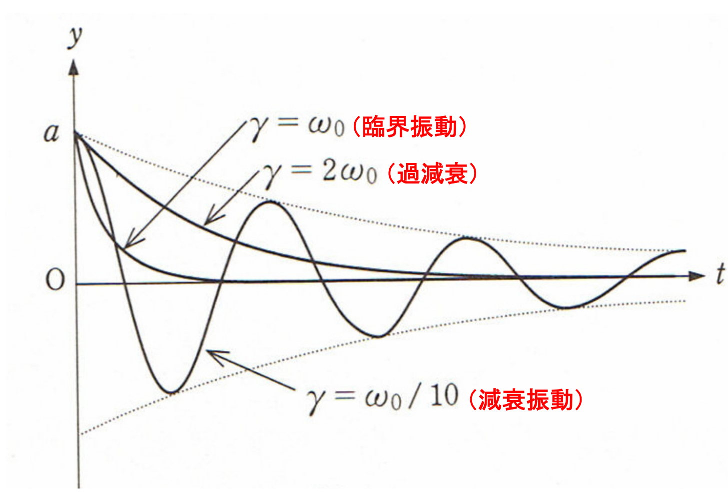
一般解は $x(t) = Ae^{\alpha_+ t} + Be^{\alpha_- t} = e^{-\gamma t}\left(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}\right)$

初期条件として、t=0 のとき $x = x_0, \dot{x} = 0$ の場合、

$$A = \frac{\omega - i\gamma}{2\omega}x_0, B = \frac{\omega + i\gamma}{2\omega}x_0 \rightarrow x(t) = x_0\frac{\sqrt{\omega^2+\gamma^2}}{\omega}e^{-\gamma t}\cos(\omega t - \varphi)$$

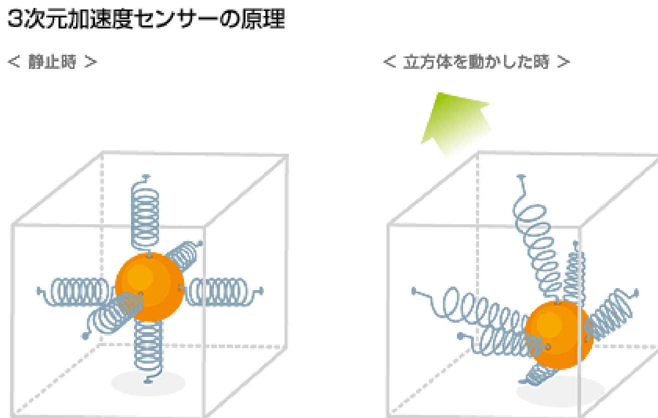


臨界減衰と過減衰



兵頭俊夫「考える力学」p77

加速度センサーの原理

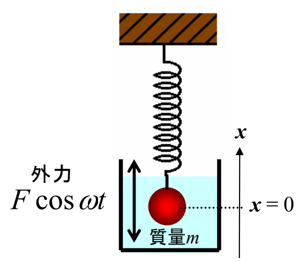


http://www.tdk.co.jp/techmag/knowledge/200612/

強制振動

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx + F\cos\omega t$$

$$\to \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \boxed{\frac{F}{m}\cos\omega t} \leftarrow \text{非斉次}$$



非斉次方程式の一般的解法（斉次方程式の一般解+特殊解）でも解ける。
その方法は教科書に譲り、ここでは定常解（十分時間が経った後の解）を求めよう。

＜解法のテクニック＞

① 実部にのみ意味があると約束して、周期関数を複素表示する

$$\frac{F}{m}\cos\omega t = \frac{F}{m}\mathrm{Re}\left[e^{i\omega t}\right] \to \frac{F}{m}e^{i\omega t}$$

② $x(t)$は（定常状態では）外力と同じ角周波数ωで振動する周期関数と仮定する。

$$x(t) = x(\omega)e^{i\omega t}$$

共鳴・共振（Resonance）

運動方程式に代入して、$x(\omega)$について解くと

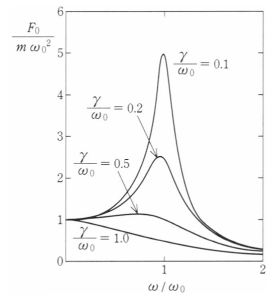
$$x(\omega)=\frac{F}{m}\cdot\frac{1}{-\omega^2+2i\gamma\omega+\omega_0^2}$$

振動の振幅の大きさは、

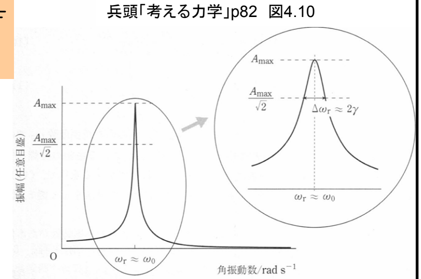
$$|x(\omega)|=\frac{F}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$

特に、$\gamma<<\omega_0$の場合、$\omega\sim\omega_0$では、

$$|x(\omega)|=\frac{F}{2\omega_0 m}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\gamma^2}}$$



兵頭「考える力学」p82　図4.10



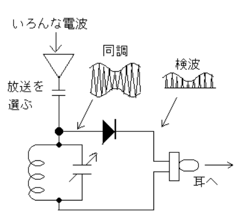
基礎物理学実験テキスト「振動・波動Ⅱ」p140　図5

様々な共鳴現象

＜地震波の共鳴＞

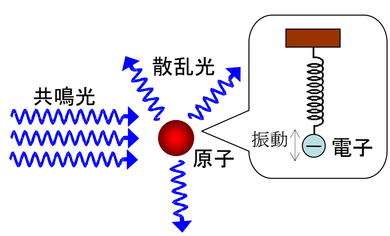
http://www.kz.tsukuba.ac.jp/~sakai/dsn.htm

＜ラジオ（LC並列共振回路）＞

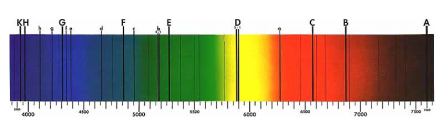


http://www9.wind.ne.jp/fujin/diy/radio/radio02.htm

＜原子・分子による光の吸収＞



共鳴する原子　原子・分子の共鳴周波数に等しい光（共鳴光）を照射すると、原子内の電子が振動し、光は散乱される。



太陽光スペクトルの暗線（フラウンフォーファー線）
太陽の大気中に存在する様々な原子・分子が、固有の共鳴周波数の光を吸収するため、多数の暗線が生じる。

第5章
極座標による運動の記述

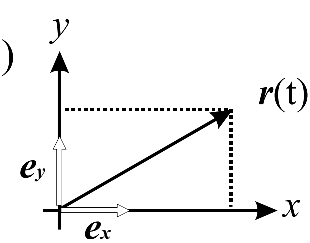
2次元極座標表示

デカルト座標表示

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{e}_x + y(t)\boldsymbol{e}_y = (x(t), y(t))$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\boldsymbol{e}_y = (\dot{x}, \dot{y})$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{x}\boldsymbol{e}_x + \ddot{y}\boldsymbol{e}_y = (\ddot{x}, \ddot{y})$$



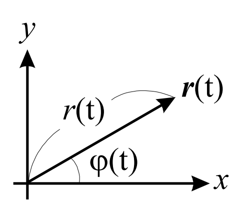
2次元極座標表示

$$\boldsymbol{r}(t) = (r(t), \varphi(t))$$

$$\cancel{\dot{\boldsymbol{r}} = (\dot{r}, \dot{\varphi})}$$

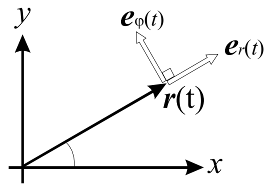
$$\cancel{\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r}, \ddot{\varphi})}$$

間違い



2次元極座標の基底ベクトル

$$\boldsymbol{r}(t) = r(t)\,\boldsymbol{e}_r(t)$$



$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r(t)\boldsymbol{e}_r(t)\right)$$

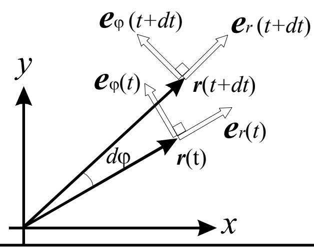
$$= \frac{dr(t)}{dt}\boldsymbol{e}_r(t) + r(t)\boxed{\frac{d\boldsymbol{e}_r(t)}{dt}}$$

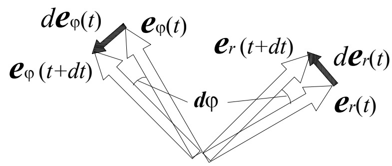
？

$\boldsymbol{e}_r(t) \,//\, \boldsymbol{r}(t)$

$\boldsymbol{e}_r(t) \perp \boldsymbol{e}_\varphi(t)$

$|\boldsymbol{e}_r(t)| = |\boldsymbol{e}_\varphi(t)| = 1$

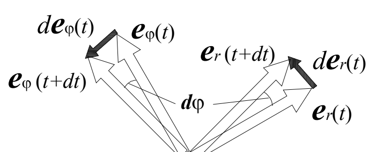




基底ベクトルの時間微分

$$d\boldsymbol{e}_r(t) = d\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi(t)$$

$$d\boldsymbol{e}_\varphi(t) = -d\varphi\,\boldsymbol{e}_r(t)$$



両辺をdtで割ると（単位時間あたりの変化にすると）

$$\frac{d\boldsymbol{e}_r(t)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{e}_\varphi(t) \qquad (\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi)$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\varphi(t)}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{e}_r(t) \qquad (\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_r)$$

したがって、

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{dr(t)}{dt}\boldsymbol{e}_r(t) + r(t)\frac{d\boldsymbol{e}_r(t)}{dt} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi = \boxed{(\dot{r}, r\dot{\varphi})}$$

$(\dot{r}, \dot{\varphi})$ ではない！

極座標表示における速度および加速度ベクトル

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=\frac{dr(t)}{dt}\boldsymbol{e}_r(t)+r(t)\frac{d\boldsymbol{e}_r(t)}{dt}=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{a}(t)=\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\right)=\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)\boldsymbol{e}_r+\left(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\varphi$$

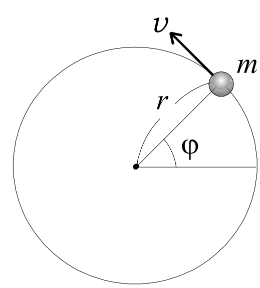
$$=\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi$$

極座標表示の運動方程式は、

$$\boldsymbol{F}=F_r\boldsymbol{e}_r+F_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi=m\boldsymbol{a}(t)\rightarrow\begin{cases}F_r=m\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)\\ F_\varphi=m\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})\end{cases}$$

等速円運動

$$\boldsymbol{r}(t)=\left(r(t),\varphi(t)\right)=\left(r,\omega t\right)$$



角速度ωで回転

r成分の運動方程式は、

$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=F_r(t)$$

rは一定なので

$$F_r(t)=-mr\omega^2$$

向心力（一定）

ϕ成分の運動方程式は、

$$m\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})\right]=F_\varphi(t)$$

rもϕも一定なので、

$$F_\varphi(t)=0$$

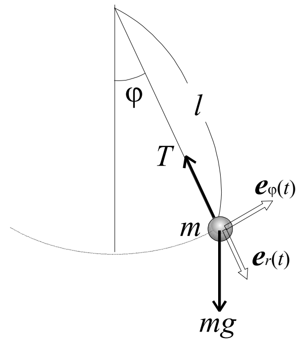
円運動している物体には進行方向の力は働いていない

単振り子

運動方程式より

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = mg\cos\varphi - T \cdots ①$$

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = -mg\sin\varphi \cdots ②$$



$$F_r = mg\cos\varphi - T$$
$$F_\varphi = -mg\sin\varphi$$

①より

$$-ml\dot{\varphi}^2 = mg\cos\varphi - T$$

$$\rightarrow T = mg\cos\varphi + ml\dot{\varphi}^2$$

②より

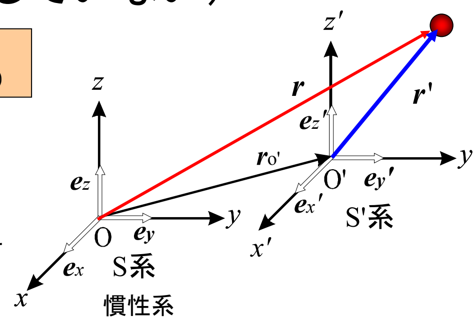
$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi$$

$$\rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi \cong -\frac{g}{l}\varphi \, (\varphi << 1)$$

第6章
相対運動と慣性力

慣性系に対して移動している座標系
（回転はしていない）

慣性系＝慣性の法則が成立する系
（力が働かなければ、運動量は変化しない）



S系（慣性系）から見た物体の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする。
S系に対して、移動している座標系をS'系とし、その原点の座標を $\boldsymbol{r}_{O'}$ とする。
S'系から見た物体の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}'$ とすると。

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{O'} + \boldsymbol{r}'$$

S系は慣性系なので、ニュートンの運動方程式が成立するので、

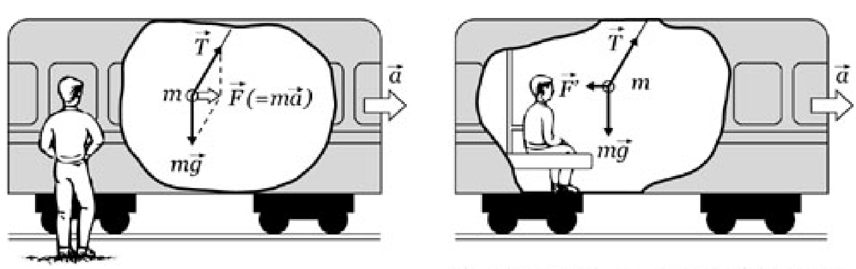
$$m(\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'} + \ddot{\boldsymbol{r}}') = \boldsymbol{F}$$
$$\Leftrightarrow m\ddot{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{F} - m\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'}$$

「**慣性力**」と呼ばれる

$\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'} = 0 \rightarrow$ S'系も慣性系（なぜなら、力が働かなければ、運動量は変化しないから）

$\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'} \neq 0 \rightarrow$ S'系は慣性系ではない。しかし、$-m\ddot{\boldsymbol{r}}_{O'}$ を力と考えれば、ニュートンの運動方程式が見かけ上成立する。

電車の中での慣性力



(a) 地上で静止している人から見ると,物体は$\vec{T}$と$m\vec{g}$の合力$\vec{F}$によって,加速度$\vec{a}$で運動している。

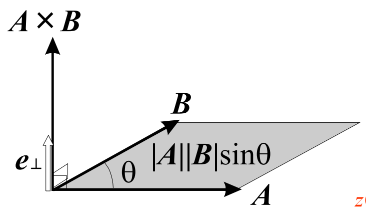
(b) 加速度運動している車内の人から見ると,物体は,$\vec{T}$と$m\vec{g}$の合力につり合う力$\vec{F}'$を受けて静止している。

加速度運動と慣性力

http://www.gen.t-kougei.ac.jp/physics/HyperText/inertia/main/main1.htm

数学的準備:ベクトルの外積

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\equiv|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta\cdot\boldsymbol{e}_{\perp}$$



＜主な性質＞

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0\Leftrightarrow\sin\theta=0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}//\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=0$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{A}\times\left(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}\right)=\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\right)-\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right)$$

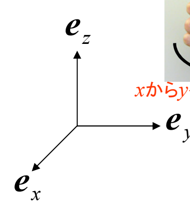
$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right)=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$$

右手系では

$$\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_x$$

$$\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{e}_y$$



$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{e}_x+B_y\boldsymbol{e}_y+B_z\boldsymbol{e}_z$ とすると、

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{e}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{e}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{e}_z$$

角速度ベクトル(回転ベクトル)

定義:回転軸と平行で、大きさは角速度ω、向きは右ねじが進む方向

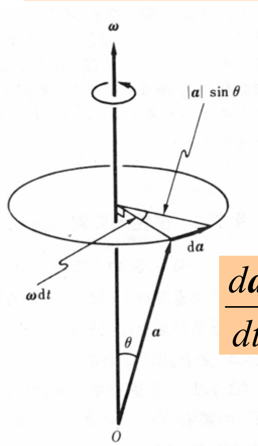


図 7.4

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a}$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{x'}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_{x'}$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{y'}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_{y'}$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{z'}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_{z'}$$

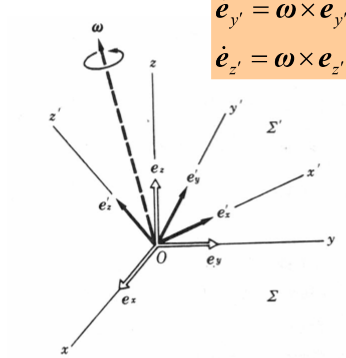


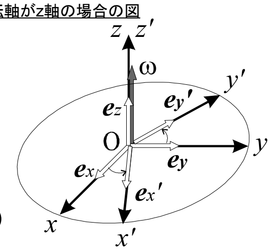
図 7.3

藤原「物理学序論としての力学」p.134

慣性系に対して回転している座標系

慣性系であるS系に対し、S'系が角速度ベクトルωで回転しているとする。

回転軸がz軸の場合の図



$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol r} &= \frac{d}{dt}\left(x'\boldsymbol e_{x'} + y'\boldsymbol e_{y'} + z'\boldsymbol e_{z'}\right)\\
&= \dot x'\boldsymbol e_{x'} + \dot y'\boldsymbol e_{y'} + \dot z'\boldsymbol e_{z'} + x'\dot{\boldsymbol e}_{x'} + y'\dot{\boldsymbol e}_{y'} + z'\dot{\boldsymbol e}_{z'}\\
&= \dot x'\boldsymbol e_{x'} + \dot y'\boldsymbol e_{y'} + \dot z'\boldsymbol e_{z'} + x'(\boldsymbol\omega\times\boldsymbol e_{x'}) + y'(\boldsymbol\omega\times\boldsymbol e_{y'}) + z'(\boldsymbol\omega\times\boldsymbol e_{z'})\\
&= \dot x'\boldsymbol e_{x'} + \dot y'\boldsymbol e_{y'} + \dot z'\boldsymbol e_{z'} + \boldsymbol\omega\times(x'\boldsymbol e_{x'} + y'\boldsymbol e_{y'} + z'\boldsymbol e_{z'})\\
&= \dot{\boldsymbol r}' + \boldsymbol\omega\times\boldsymbol r'
\end{aligned}
$$

S'系における位置、速度、加速度ベクトル

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\boldsymbol r' &= x'\boldsymbol e_{x'} + y'\boldsymbol e_{y'} + z'\boldsymbol e_{z'}\,(=\boldsymbol r)\\
\dot{\boldsymbol r}' &= \dot x'\boldsymbol e_{x'} + \dot y'\boldsymbol e_{y'} + \dot z'\boldsymbol e_{z'}\,(\neq\dot{\boldsymbol r})\\
\ddot{\boldsymbol r}' &= \ddot x'\boldsymbol e_{x'} + \ddot y'\boldsymbol e_{y'} + \ddot z'\boldsymbol e_{z'}\,(\neq\ddot{\boldsymbol r})
\end{aligned}}
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol r} &= \frac{d^2}{dt^2}\left(x'\boldsymbol e_{x'} + y'\boldsymbol e_{y'} + z'\boldsymbol e_{z'}\right)\\
&= (\text{中略})\\
&= \ddot x'\boldsymbol e_{x'} + \ddot y'\boldsymbol e_{y'} + \ddot z'\boldsymbol e_{z'} + 2\boldsymbol\omega\times(\dot x'\boldsymbol e_{x'} + \dot y'\boldsymbol e_{y'} + \dot z'\boldsymbol e_{z'}) + \boldsymbol\omega\times\left[\boldsymbol\omega\times(x'\boldsymbol e_{x'} + y'\boldsymbol e_{y'} + z'\boldsymbol e_{z'})\right]\\
&= \ddot{\boldsymbol r}' + 2\boldsymbol\omega\times\dot{\boldsymbol r}' + \boldsymbol\omega\times(\boldsymbol\omega\times\boldsymbol r')
\end{aligned}
$$

遠心力とコリオリ力

S系での加速度を、S'系での加速度、速度、位置ベクトルで表現すると

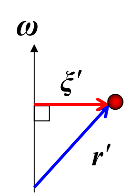
$$\ddot{\boldsymbol r} = \ddot{\boldsymbol r}' + 2\boldsymbol\omega\times\dot{\boldsymbol r}' + \boldsymbol\omega\times(\boldsymbol\omega\times\boldsymbol r')$$

S系では、ニュートンの運動方程式が成立するから

$$
\begin{aligned}
& m\ddot{\boldsymbol r} = \boldsymbol F\\
\Leftrightarrow\ & m\left[\ddot{\boldsymbol r}' + 2\boldsymbol\omega\times\dot{\boldsymbol r}' + \boldsymbol\omega\times(\boldsymbol\omega\times\boldsymbol r')\right] = \boldsymbol F\\
\Leftrightarrow\ & m\ddot{\boldsymbol r}' = \boldsymbol F \underbrace{- 2m\boldsymbol\omega\times\dot{\boldsymbol r}'}_{\text{コリオリ力}} \underbrace{- m\boldsymbol\omega\times(\boldsymbol\omega\times\boldsymbol r')}_{\text{遠心力}}
\end{aligned}
$$

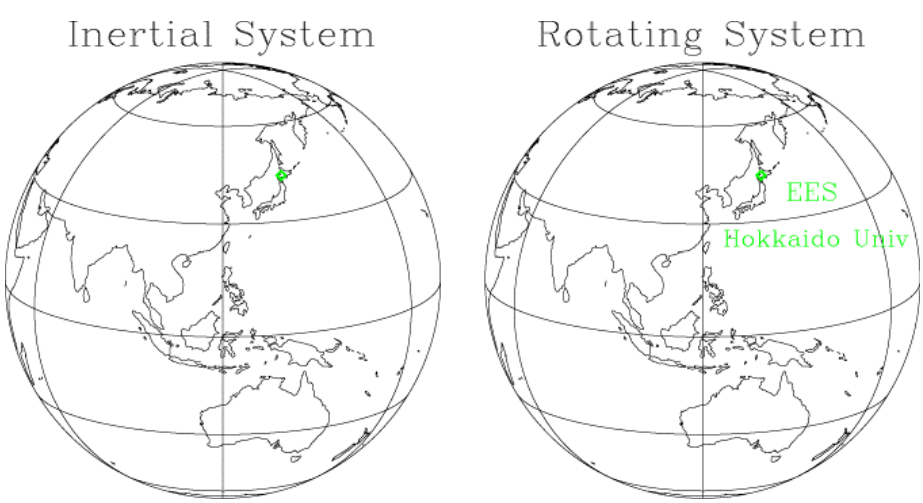
$$\boldsymbol F_{\text{col}} \equiv -2m\boldsymbol\omega\times\dot{\boldsymbol r}'$$

$$\boldsymbol F_{\text{cen}} \equiv -m\boldsymbol\omega\times(\boldsymbol\omega\times\boldsymbol r') = m\omega^2\boldsymbol\xi'$$



コリオリ力を見る実験

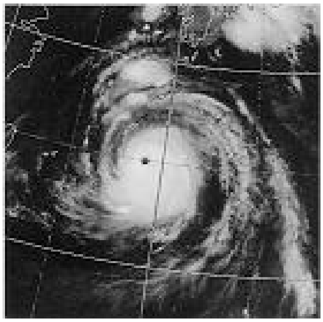
http://coast14.ees.hokudai.ac.jp/osj/umi_no_kyousitu/02coriolis_01.html

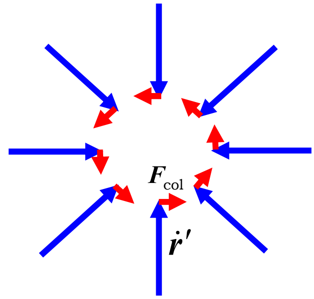


http://wwwoa.ees.hokudai.ac.jp/~f-hasebe/Coriolis.gif

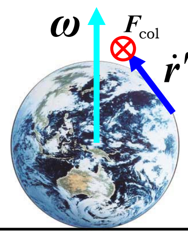
コリオリ力と台風の渦

北半球における台風の渦

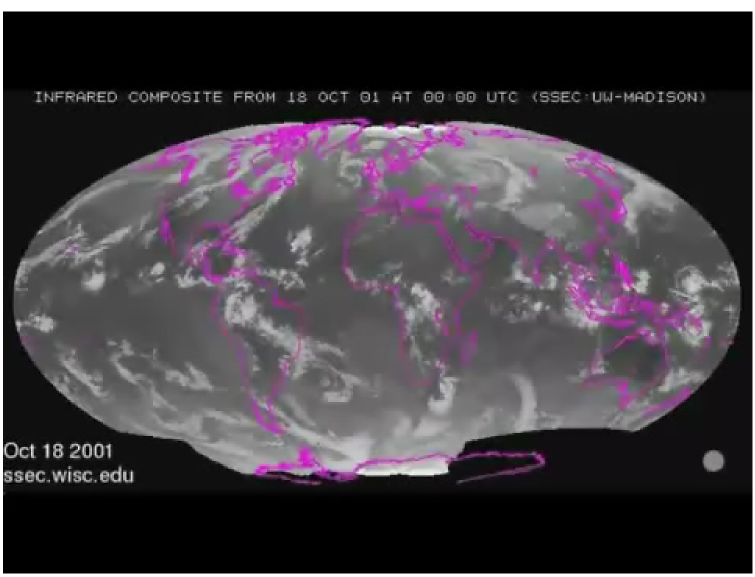


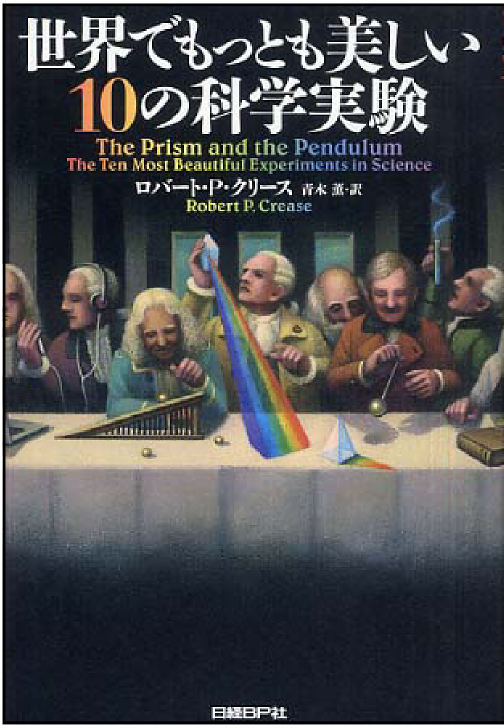


$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{\text{col}} &= -2m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}' \\
&= 2m\dot{\boldsymbol{r}}'\times\boldsymbol{\omega}
\end{aligned}
$$



コリオリ力と偏西風

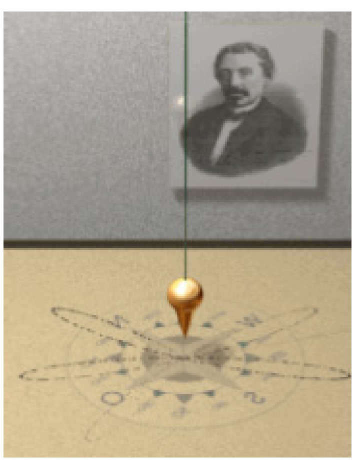




目次

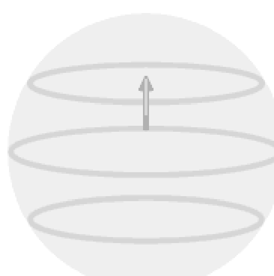
フーコーの振り子（1851）

北半球におけるフーコーの振り子



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a1/Foucault_pendulum_animated.gif

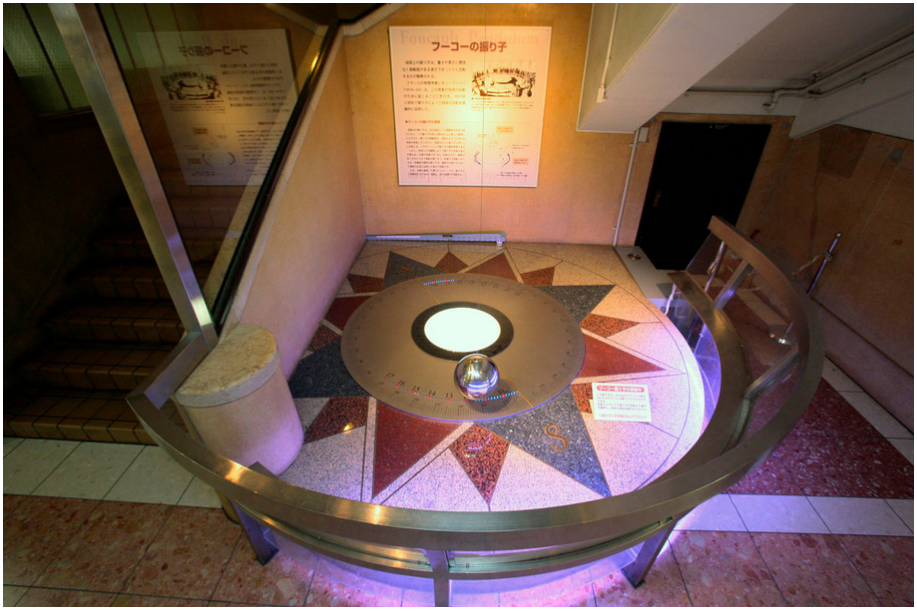
1周に必要な時間（日）= 1日/sin θ
（θ は振り子の場所の緯度）



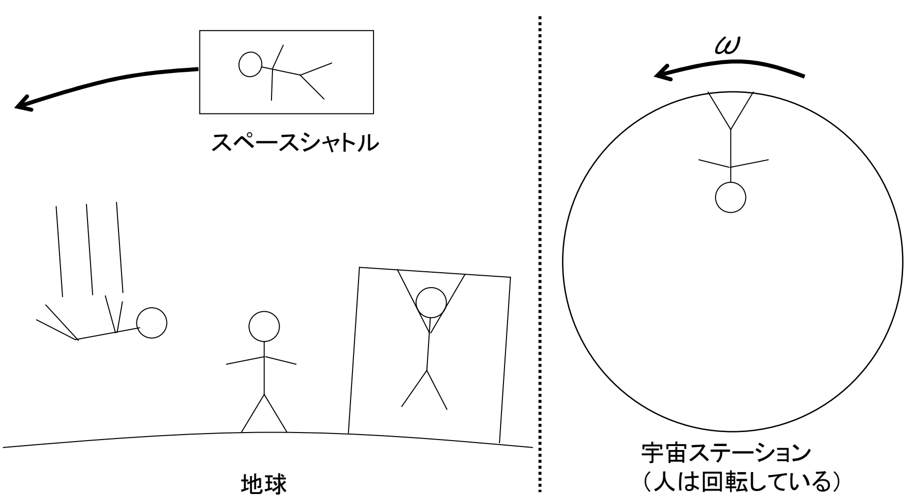
The animation describes the motion of a Foucault Pendulum at a latitude of 30° N. The plane of oscillation rotates by an angle of −180° during one day, so after two days the plane returns to its original orientation.

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/0/0d/Foucault_pendulum_plane_of_swing_semi3D.gif

国立科学博物館（上野）のフーコーの振り子



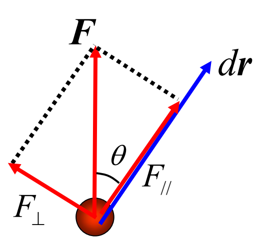
「重さ(weight)」＝「重力(gravity)」？
「無重量」＝「無重力」？



Keywards:　力、質量、重力、重さ、慣性力（遠心力）

第7章
仕事とエネルギー

仕事（work）の定義

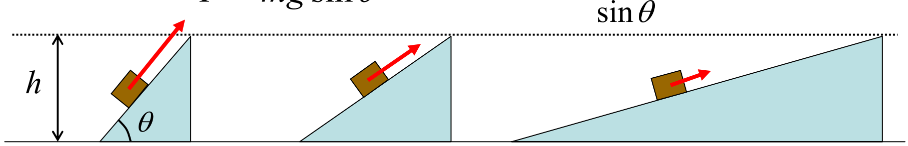


（仕事）＝（力の移動方向成分）×（移動距離）

$$\begin{aligned} dW &= F_{//}\,dr \\ &= \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \end{aligned}$$

仕事の単位はN·m = kg·m^2/s^2＝J（ジュール）

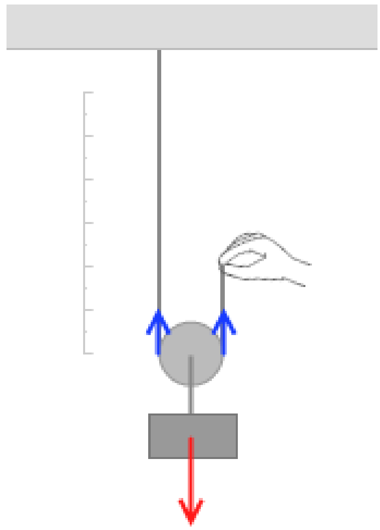
押す力 $F = mg\sin\theta$　　移動距離 $l = \dfrac{h}{\sin\theta}$



$$W = Fl = mgh$$

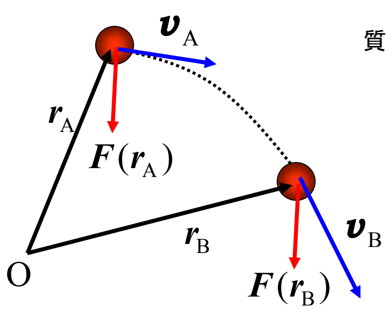
物体を高さhだけ持ち上げる仕事は、斜面の角度に依存しない（中高で習う仕事の原理の一例）

仕事の原理　滑車の例



http://www.wakariyasui.sakura.ne.jp/4-1-0-0/4-1-1-2sigotonogennri.html

仕事と運動エネルギー



質点が点Aから点Bへ移動する間に外力がする仕事

$$W_{\mathrm{AB}} = \int_{\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}}^{\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}}^{\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}} m\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot d\boldsymbol{r}$$

$$d\boldsymbol{r} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt = \dot{\boldsymbol{r}}dt,\ \frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}) = 2\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}$$ より、

$$W_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}m\int_{v_A}^{v_B} d(v^2) = \frac{1}{2}m\left[v^2\right]_{v_A}^{v_B} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

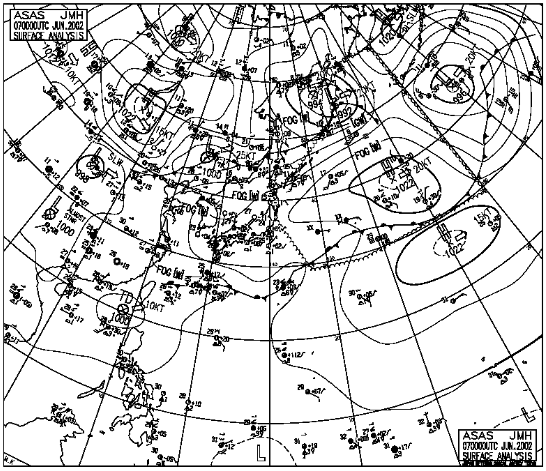
$$K \equiv \frac{1}{2}mv^2$$ 運動エネルギー（kinetic energy）

$$W_{AB} = K_B - K_A$$

運動エネルギーの変化は受けた仕事に等しい

場（field）

空間の各位置で定義（または観測）されるような物理量



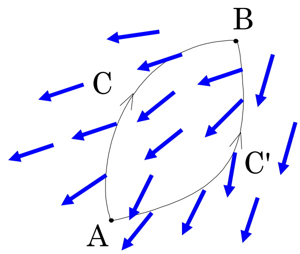
スカラー場（物理量がスカラー）
（例）
標高（2次元）
気温、気圧、
物体の密度分布
ポテンシャル（これから学ぶ）
電荷密度（冬学期に学ぶ）

ベクトル場（物理量がベクトル）
（例）
風速
重力の場（これから学ぶ）
電場、磁場、電流密度ベクトル
（冬学期に学ぶ）

保存力の場

質点が任意の位置Aから任意の位置Bへ移動する間に力Fの場のする仕事

$$W_{A\overset{C}{\to}B} = \int_{A\overset{C}{\to}B} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$$

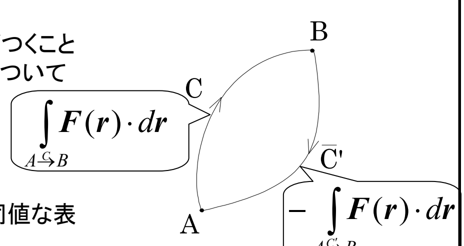


が、経路Cに依存しないとき、Fを**保存力**という。
このとき、任意に選んだ二つの経路C,C'について

$$\int_{A\overset{C}{\to}B} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{A\overset{C'}{\to}B} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$$

が、成立する。また、経路を逆にすると負号がつくことに注意すると、元の場所に戻る任意の経路について

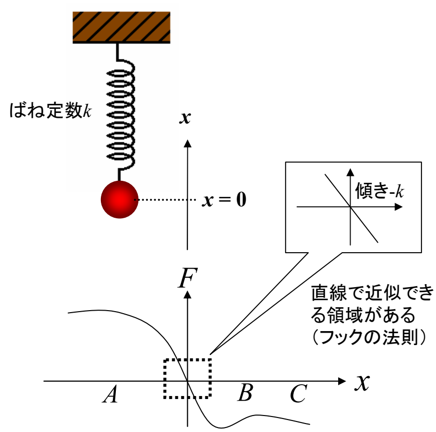
$$\oint_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 0$$



が、成立する。これはFが保存力であることと同値な表現である。

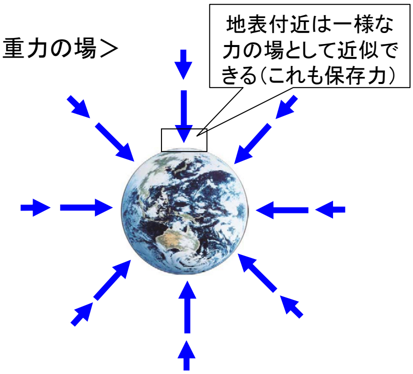
保存力の場の例

＜一次元の力＞



$$W_{A\to C\to B}=\int_A^C F(x)dx+\int_C^B F(x)dx=\int_A^B F(x)dx$$

＜重力の場＞



$$W_{AB}=\int_{r_A}^{r_B} f(r)\boldsymbol{e}_r\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{r_A}^{r_B} f(r)dr$$

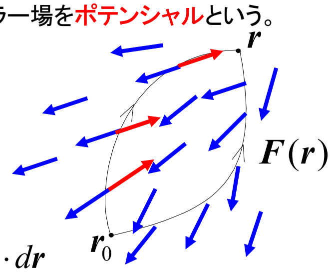
一次元の力と同じ形

一般に**中心力**は**保存力**
クーロン力（静電気力）も同じ

ポテンシャルとエネルギー保存則

力Fの場が保存力の場合、**その力とつりあうような力（-F）**を加えながら、ある基準点から、別の点まで質点を移動させるために**我々がなす仕事**は、経路に依存しない。つまりこの仕事をもってスカラー場が定義できる。このスカラー場を**ポテンシャル**という。

$$U(\boldsymbol{r})\equiv-\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$$



このとき、質点が点Aから点Bへ移動する間に
外力がなす仕事は

$$W_{AB}\equiv\int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B}F(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_0}F(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}+\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_B}F(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$$

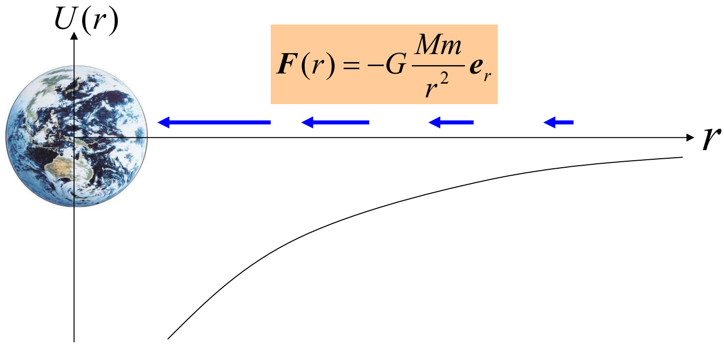
$$=-\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_A}F(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}-\left(-\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_B}F(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}\right)=U(\boldsymbol{r}_A)-U(\boldsymbol{r}_B)$$

一方、$W_{AB}=K_B-K_A$ より、

$$U(\boldsymbol{r}_A)-U(\boldsymbol{r}_B)=K_B-K_A\Leftrightarrow U(\boldsymbol{r}_A)+K_A=U(\boldsymbol{r}_B)+K_B$$

力学的エネルギーの保存則

重力のポテンシャル



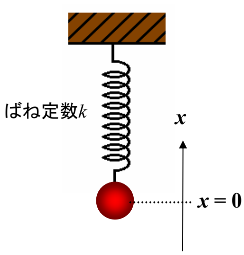
$$\boldsymbol{F}(r) = -G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

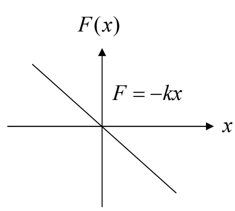
$$U(r) = -\int_{r_0}^{r}\boldsymbol{F}(r)\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{r_0}^{r}\frac{GMm}{r^2}dr = \left[-\frac{GMm}{r}\right]_{r_0}^{r} = -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{r_0}$$

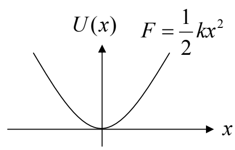
基準点を無限遠にとると（慣習）

$$U(r) = -G\frac{Mm}{r}$$

単振動の力学的エネルギー保存則







$$U + K = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

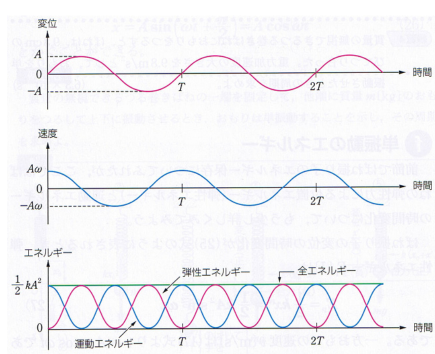


図10　単振動する物体の変位，速度，エネルギーの時間変化

$$x = A\cos\omega t$$

$$\left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

$$v = \dot{x} = -A\omega\sin\omega t$$

東京書籍　高等学校教科書『物理II』p.56

ポテンシャルと力の微分関係

＜1次元の場合＞

$$\boxed{U(x) \equiv -\int_{x_0}^{x} F(x)dx} \quad U(x+\Delta x) - U(x) = -\int_{x}^{x+\Delta x} F(x)dx \cong -F(x)\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x) - U(x)}{\Delta x} = -F(x) \Leftrightarrow F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

＜3次元の場合＞

$$\boxed{U(\boldsymbol{r}) \equiv -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}} \quad U(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}) - U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} \cong -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \Delta\boldsymbol{r}$$

成分表示すると

$$U(x+\Delta x, z+\Delta z, z+\Delta z) - U(x, y, z) \cong -\left(F_x(\boldsymbol{r})\Delta x + F_y(\boldsymbol{r})\Delta y + F_z(\boldsymbol{r})\Delta z\right)$$

Δy=0、Δz=0とおくと、

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x} = -F_x(\boldsymbol{r}) \Leftrightarrow F_x(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial x}$$

ポテンシャルの勾配（gradient）

$$F_x(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial x}, \quad F_y(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial y}, \quad F_z(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial z}$$

これらをまとめて表すと

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \left(F_x(\boldsymbol{r}), F_y(\boldsymbol{r}) F_z(\boldsymbol{r})\right) = -\left(\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial x}, \frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial y}, \frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) U(\boldsymbol{r})$$

ここでナブラ演算子を定義する

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$ ナブラ演算子

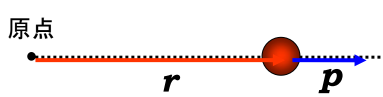
すると、力は簡単に

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla U(\boldsymbol{r})$$

と表せる。∇はこの場合「gradient（クラディエント：勾配）」と読む。

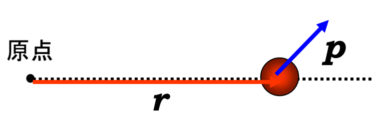
第8章
角運動量

物体の「回転」をどう表現するか？



回転してない

$$\boldsymbol{r} /\!/ \boldsymbol{p} \to \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = 0$$



回転している（と考えられる）

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \neq 0$$

$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ は、原点まわりの物体の<u>回転の度合い</u>を表す指標になっている？

$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{L}$ と定義して、これを**角運動量**と名付けよう

角運動量と力のモーメント

角運動量の時間微分（単位時間あたりの変化）を考えよう。

これは物体に働いている力

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\times m\dot{\boldsymbol{r}}\right) = \dot{\boldsymbol{r}}\times m\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{r}\times m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}\times \boxed{m\ddot{\boldsymbol{r}}}$$

$$\left(\because\ \dot{\boldsymbol{r}}\times m\dot{\boldsymbol{r}} = m(\dot{\boldsymbol{r}}\times\dot{\boldsymbol{r}}) = 0\right)$$

したがって、物体に働いている力を $\boldsymbol{F}$ とすると、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$$

$\boldsymbol{N} \equiv \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ を**力のモーメント**（もしくは**トルク**）という。

（注意）角運動量も力のモーメントも、原点の位置を変えれば、その向きも大きさも変わる

トルクレンチ

トルクの大きさの単位（SI）はNm
（kgf･mやkgf･cmも使われている）

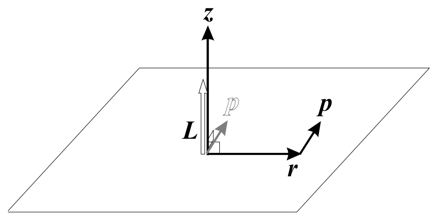
角運動量の保存

万有引力は中心力なので、太陽を原点とすると、惑星に働く力のモーメントは

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = 0$$

したがって、

$$\boxed{\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = 0}$$ （力が中心力の場合）



これは、角運動量が時間的に変化しない（一定である）ことを意味する。
「**中心力が働く物体の（中心力を原点とする）角運動量は保存する**」
と言うことができる。

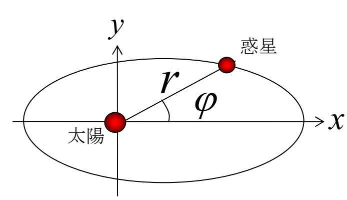
また、物体のLが変化しないということは、物体はLに垂直な一つの平面内で運動を続ける（二次元極座標表示で運動を記述できる）。

面積速度一定の法則 （ケプラーの第2法則）

2次元極座標表示

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m\dot{r}\boldsymbol{e}_r + mr\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$



角運動量は

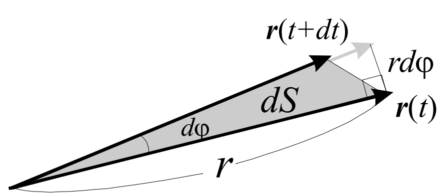
$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = r\boldsymbol{e}_r \times \left(m\dot{r}\boldsymbol{e}_r + mr\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\right)$$

$$= mr^2\dot{\varphi}\left(\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\varphi\right)$$

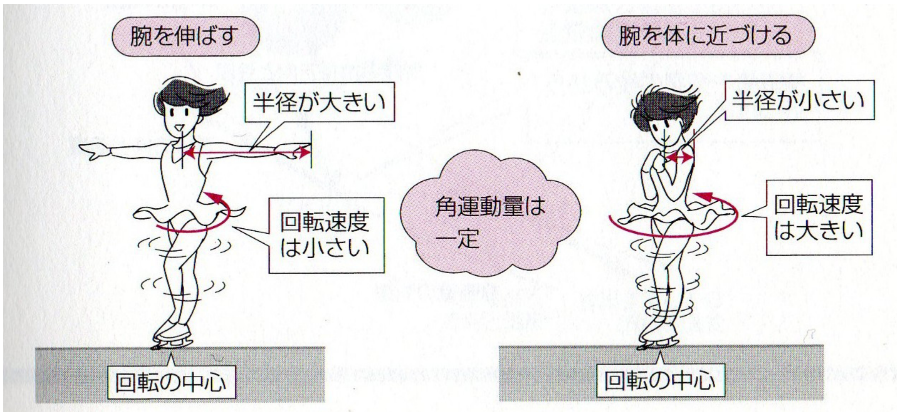
$$= mr^2\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z$$

面積速度は

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{L}{2m}$$



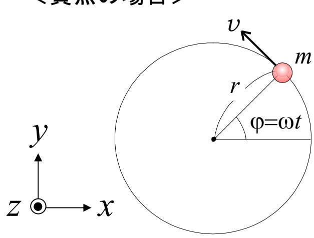
フィギュアスケートのスピン



出典:「やりなおし高校の物理」野田学(2005年、ナツメ社)

回転体の角運動量と慣性モーメント

＜質点の場合＞

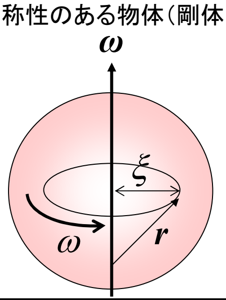


$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = mr^2\boldsymbol{\omega} = I\boldsymbol{\omega}$$

$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_z$ **角速度ベクトル**(大きさは角速度、向きは回転軸と平行(右ねじの進む向き)

$I \equiv mr^2$ **慣性モーメント**(角速度ベクトルをかけると角運動量になる量)

＜回転対称性のある物体(剛体)の場合＞



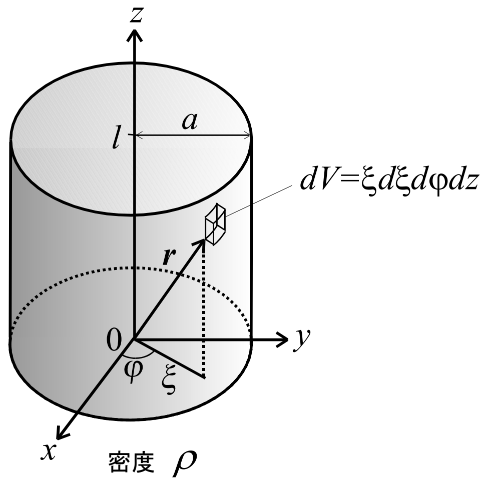
$$\boldsymbol{L} = \int \boldsymbol{r} \times \rho(\boldsymbol{r})\dot{\boldsymbol{r}}dV = I\boldsymbol{\omega}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

$$I = \int \xi^2 \rho(\boldsymbol{r})dV$$

ξ :回転軸からの距離

円柱の慣性モーメントの計算

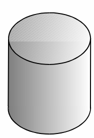
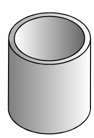
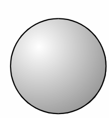
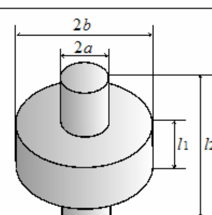


密度 ρ

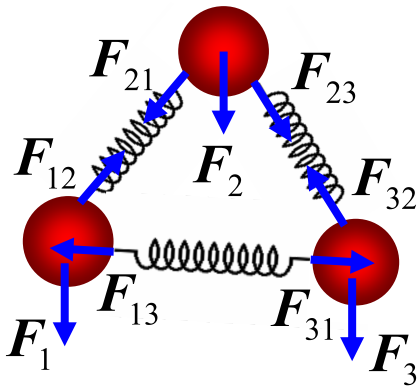
質量 $M = \pi a^2 l\rho$

$$
\begin{aligned}
I &= \int \xi^2 \rho(\mathbf{r})dV \\
&= \rho \iiint \xi^2 \xi \, d\xi d\varphi dz \\
&= \rho \int_0^a \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^l dz \\
&= 2\pi l\rho \left[\frac{1}{4}\xi^4 \right]_0^a \\
&= \ = \frac{\pi a^4 l\rho}{2} = M\frac{a^2}{2}
\end{aligned}
$$

さまざまな回転体の慣性モーメント

形状	円柱（円盤）	パイプ	球	軸付き円盤
大きさの パラメタ	 直径 $2a$	 外径 $2a$ 内径 $2b$	 直径 $2a$	
慣性モーメント	$M\frac{a^2}{2}$	$M\frac{a^2+b^2}{2}$	$M\frac{2a^2}{5}$	$M\frac{b^2}{2}\frac{l_1+(l_2-l_1)\varepsilon^4}{l_1+(l_2-l_1)\varepsilon^2}\left(\varepsilon \equiv \frac{a}{b}\right)$

内力と外力



各質点に働く力の合計は

$$\sum_i \left(\boldsymbol{F}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ij} \right)$$

$$= \sum_i \boldsymbol{F}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ij}$$

$$= \sum_i \boldsymbol{F}_i$$

質点系に働く力の和は、外力のみの和（内力の和は、作用・反作用の法則より相殺）

剛体の角運動量とトルク

物体のその箇所に働いている力

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum(\boldsymbol{r} \times m\dot{\boldsymbol{r}}) = \sum(\dot{\boldsymbol{r}} \times m\dot{\boldsymbol{r}}) + \sum(\boldsymbol{r} \times m\ddot{\boldsymbol{r}}) = \sum \boldsymbol{r} \times \boxed{m\ddot{\boldsymbol{r}}}$$

計算してみると、作用反作用の法則および内力が中心力であるため、内力の効果は相殺され（兵頭「考える力学」p211参照） 結果的に外力のトルクが残る、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum \boldsymbol{r}_{\text{作用点}} \times \boldsymbol{F}_{\text{外力}} = \sum \boldsymbol{N}_{\text{外力のトルク}}$$

ニュートンの運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

作用反作用の法則

内力は中心力

物体の角運動量の時間変化

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$$

Nは外力のトルクの和

内力のトルクが無視できることの証明

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \left(\boldsymbol{r}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i\right) = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i\right) = \sum_i \left(\boldsymbol{r}_i \times \boxed{m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i}\right)$$

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ij}$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_i \left[\boldsymbol{r}_i \times \left(\boldsymbol{F}_i + \sum_{j\neq i}\boldsymbol{F}_{ij}\right)\right] = \sum_i \left(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i\right) + \boxed{\sum_i \sum_{j \neq i}\left(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij}\right)} = \sum_i \left(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i\right)$$

あからさまに書くと

$$\begin{array}{lcccccc}
\displaystyle\sum_i \sum_{j\neq i}\left(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij}\right) = & & +\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_{12} & +\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_{13} & \cdots & +\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_{1,n-1} & +\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_{1n} \\
 & -\ \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_{12} & & +\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_{23} & \cdots & +\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_{2,n-1} & +\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_{2n} \\
 & -\ \boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{F}_{13} & -\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{F}_{23} & & \cdots & +\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{F}_{2,n-1} & +\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{F}_{2n} \\
 & \vdots & & & & & \\
 & -\ \boldsymbol{r}_{n-1} \times \boldsymbol{F}_{1,n-1} & -\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_{2,n-1} & & \cdots & & +\boldsymbol{r}_{n-1} \times \boldsymbol{F}_{n-1,n} \\
 & -\ \boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{F}_{1n} & -\boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{F}_{2n} & & \cdots & -\boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{F}_{n-1,n} &
\end{array}$$

作用反作用の法則を適用 $\boxed{\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}}$

$$= \sum_i \sum_{j>i}\left(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j\right) \times \boldsymbol{F}_{ij} = 0$$

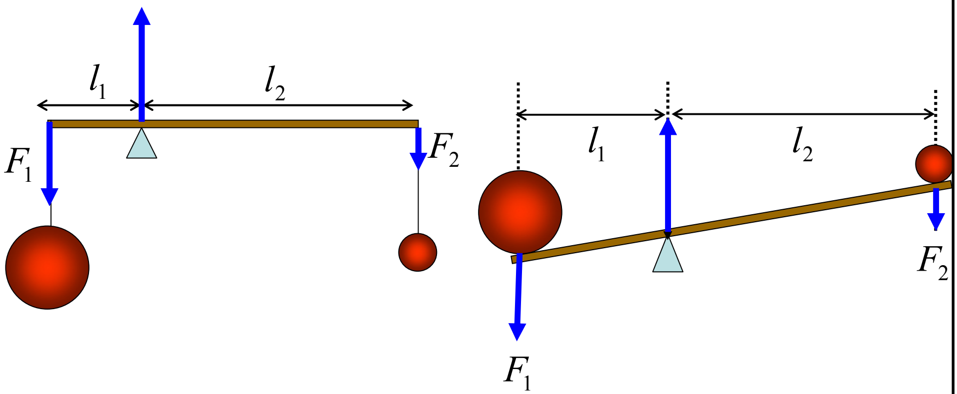
内力は中心力なので

運動量と角運動量のアナロジー

	運動量 (momentum)	角運動量 (angular momentum)
定義	$\boldsymbol{p} \equiv m\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = I\boldsymbol{\omega}$
時間変化させる要因	$\boldsymbol{F}$ 力（force）	$\boldsymbol{N} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ トルク（torque）
時間変化のしにくさを表す量（慣性）	m （慣性）質量 ((inertial) mass）	I 慣性モーメント (moment of inertia)
運動方程式	$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}$	$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{N}$

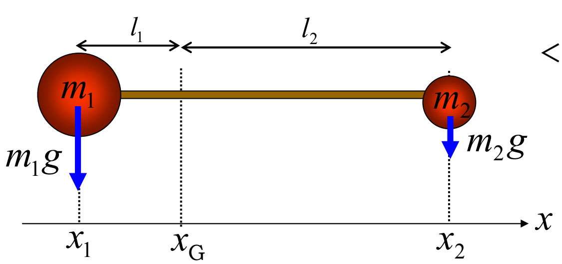
物体のつりあいと「てこの原理」

静止している物体は回転していない（角運動量がゼロのまま変化しない）
→外力のトルク（原点は任意）の和はゼロ



$$F_1 l_1 = F_2 l_2$$

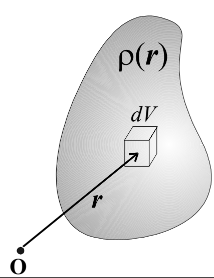
重心（質量中心）
質量の重みをつけた位置の平均



＜2質点の場合＞

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

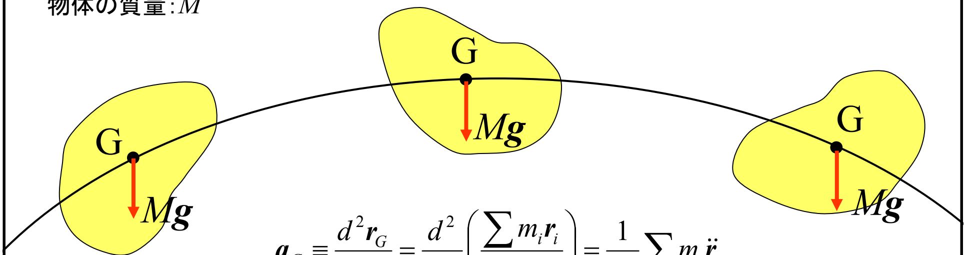
＜一般の剛体＞



$$\boldsymbol{r}_G = \frac{\sum \boldsymbol{r}_i m_i}{M} = \frac{\int \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})dV}{\int \rho(\boldsymbol{r})dV}$$

重心の運動：質点近似

物体の質量：M



$$\boldsymbol{a}_G \equiv \frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sum m_i \boldsymbol{r}_i}{M}\right) = \frac{1}{M}\sum m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i$$

$$= \frac{\sum_i (\boldsymbol{F}_i + \sum_{j\neq i} \boldsymbol{F}_{ij})}{M} = \frac{\sum_i \boldsymbol{F}_i}{M}$$

重心の運動方程式

$$\boldsymbol{F}_{\text{外力の和}} = M\boldsymbol{a}_{\mathrm{G}}$$

重心の運動方程式は、質量Mの質点の運動方程式に等しい

重力のモーメント

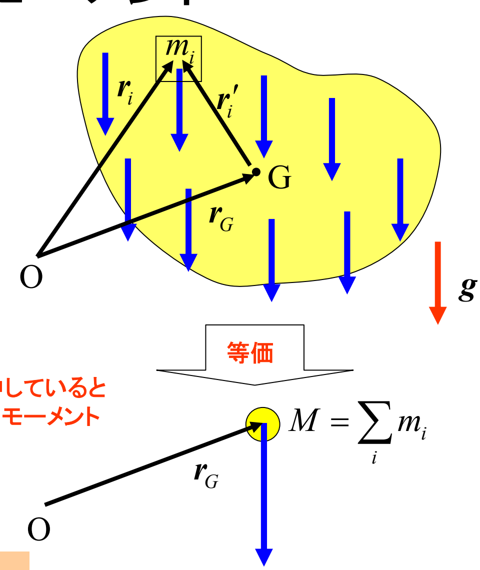
$$\boldsymbol{N} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{g}$$

$$= \left(\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i\right) \times \boldsymbol{g}$$

$$= \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{M} \times M\boldsymbol{g}$$

$$= \boxed{\boldsymbol{r}_G \times M\boldsymbol{g}}$$

全質量が重心に集中していると考えた場合の重力のモーメント

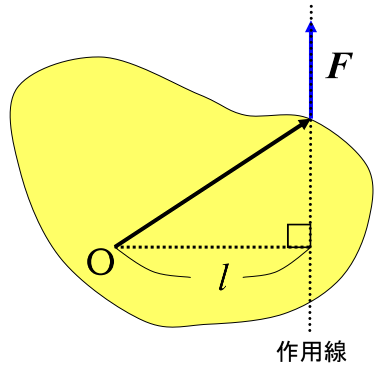


重心を原点とすれば $\boldsymbol{r}_G = 0$ であるから

$\boldsymbol{N} = 0$（重心が原点の場合）

重心を支点とすると、物体は回転しない

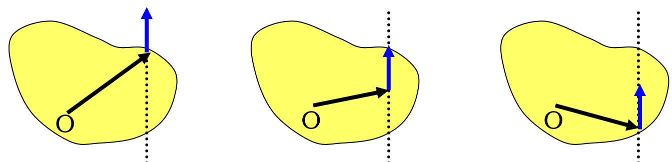
力の作用線



$$|\boldsymbol{N}| = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}| = rF\sin\theta$$
$$= Fl$$

l ：作用線から原点までの距離

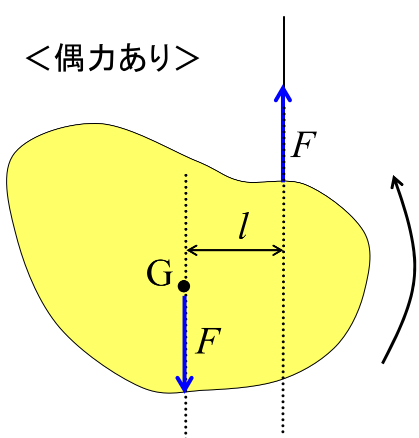
作用点を作用線上で移動しても、剛体に加わるトルクは等しい



偶力（couple）：トルクの一種

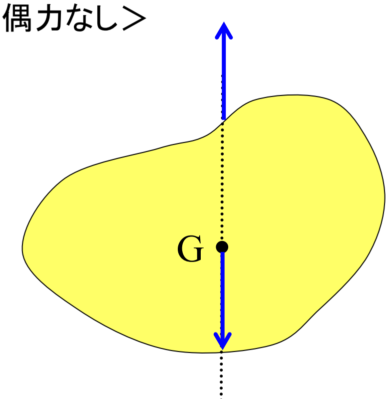
作用線の一致しない大きさの等しい二つの力

＜偶力あり＞



$$\frac{dL}{dt} = N = Fl \neq 0$$ 回転する

＜偶力なし＞



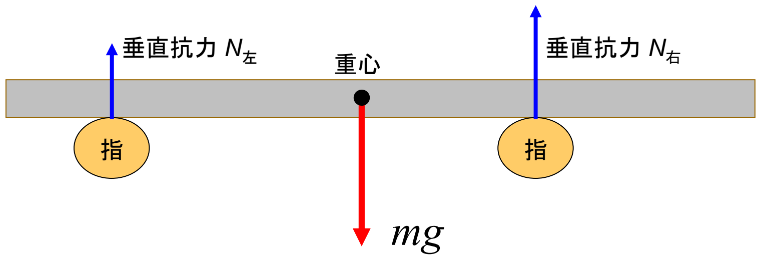
$$\frac{dL}{dt} = N = Fl = 0$$ 回転しない

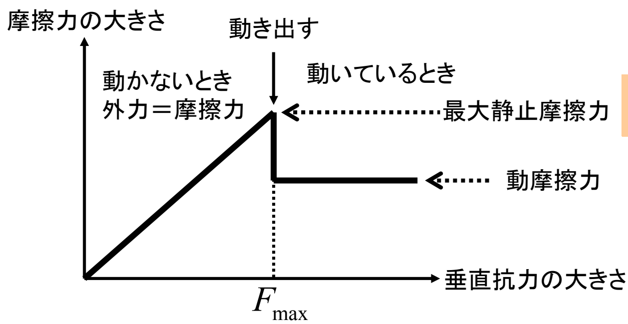
様々なワインホルダー

物体の重心を求める

東京書籍　高等学校教科書「物理Ⅰ」より転載

棒の重心の見つけ方





静止摩擦係数

$F_{\max} = \mu N$ クーロンの第1法則

$F = \mu' N$ クーロンの第2法則

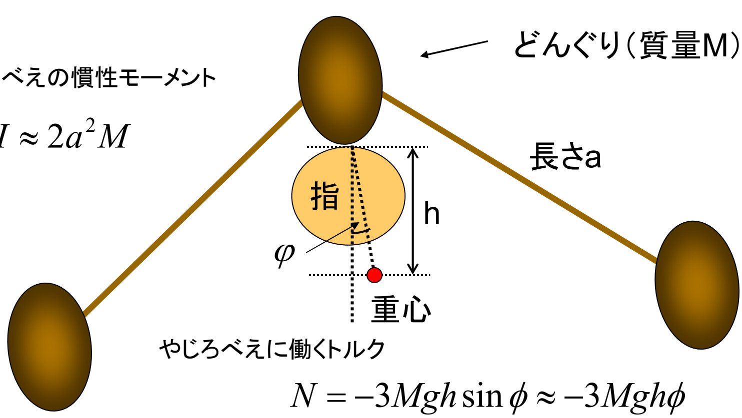
動摩擦係数

$\mu > \mu'$ クーロンの第3法則

やじろべえ（実体振り子）

やじろべえの慣性モーメント

$$I \approx 2a^2 M$$



やじろべえに働くトルク

$$N = -3Mgh\sin\phi \approx -3Mgh\phi$$

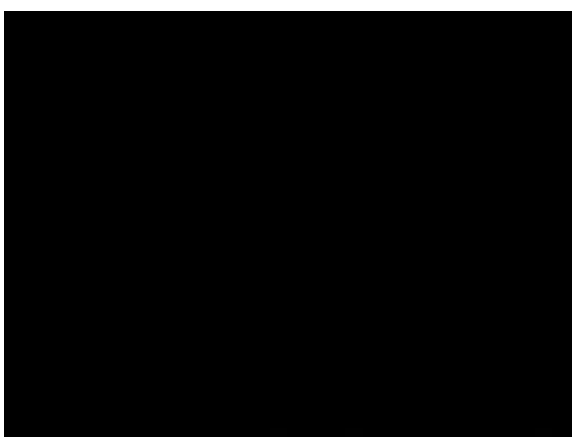
$$\frac{dL}{dt} = N, L = I\omega = 2a^2 M\dot{\varphi}$$ より、

$$2a^2 M\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = -3Mgh \rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} = -\omega^2\varphi} \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{3hg}{2a^2}}\right)$$

単振動

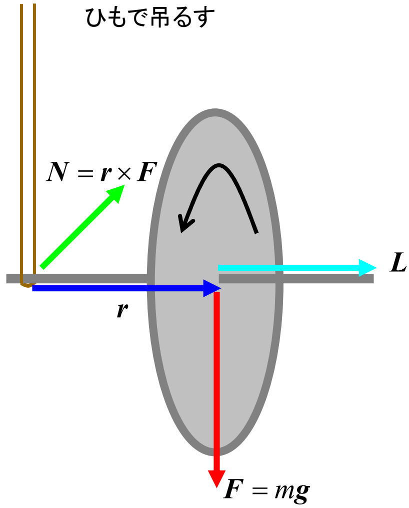
フォークで作るやじろべえ

地球ゴマ（gyroscope）



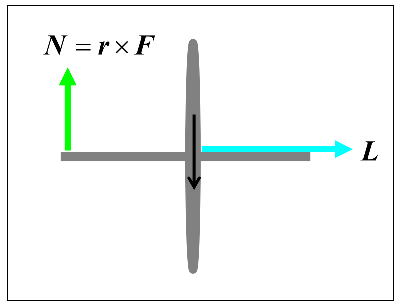
http://www.youtube.com/watch?v=V4duz17JVvY

回転する車輪の軸はどちらに回る？

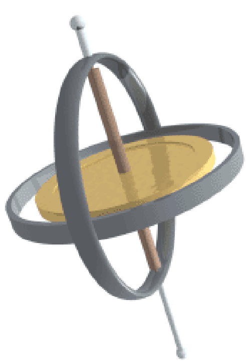


$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$$

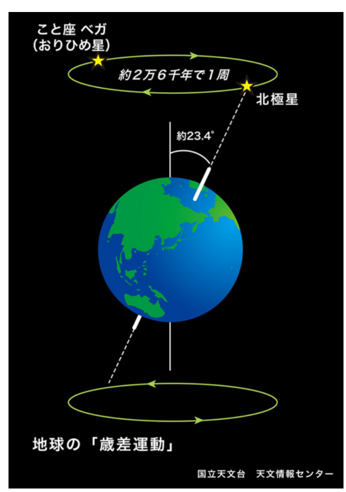
上から見た図



歳差運動(precession)



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/82/Gyroscope_precession.gif



http://www.nao.ac.jp/QA/image/img0907.jpg

斜面上を転がる回転体

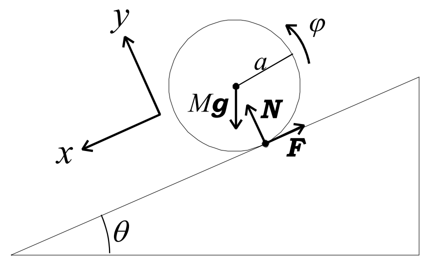
回転体の重心の運動

$$M\frac{d^2\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}}{dt^2} = M\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}$$

垂直抗力　摩擦力

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\theta - F$$

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = -Mg\cos\theta + N$$



基礎物理学実験テキスト「剛体の力学」より

回転体の回転運動

$$I\frac{d\omega}{dt} = aF$$

$$x = a\varphi$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{1+(k/a)^2}g\sin\theta$$

$I = Mk^2$　k :回転半径