平成 23 年度夏学期　力学 B（鳥井）レポート問題１

平成 23 年 4 月 14 日出題

１．ローラーコースターが曲率半径 r [m]の円形のレールの上を速さ v [m/s]で走っている。

（１）　このローラーコースターに乗っている体重 m [kg]人が感じる加速度 a [m/s²]を、次元解析により求めよ（重力加速度の影響は無視せよ）。余裕のあるものは、幾何学と微積分を使って a を求めよ。（無次元係数は幸運にも１であることがわかる）。

（２）　現在、最速のローラーコースターの速さは時速 200 km 程度である。人間が耐えられる加速度は 10G（１G は 9.8 m/s²）と言われている。（１）の結果を用いて、ローラーコースターのレールに許される最短の曲率半径を求めよ。

２．水面波の伝わる速さ V [m/s]は、波の波長に比べて水深が十分浅い場合、水深 h [m]および重力加速度 $g = 9.8$ m/s² で決まることが知られている。

（１）　次元解析により、V を h および g で表わせ（無次元の係数は１とせよ）。

（２）　（１）の結果は、津波の速さをよく近似する。水深 4000m の洋上および水深 10m の浅瀬における津波の速さを求めよ。

３．あまりにも巨大な動物が存在しない理由をガリレオは考察した。ここで我々は、あまりにも大きなプッチンプリンは崩壊してしまう理由を考えよう。プリンは同じ材料（つまり同じ柔らかさ）で作るものとする。

（１）　プッチンプリンを、形をそのままに（相似形で）M 倍にすると、必要な材料は何倍になるか？　またお皿に乗せたプッチンプリンの底辺に加わる圧力は何倍になるか？

（２）　プッチンプリンの比重は水と同じであるとする。またプッチンプリンは 1cm² あたり 50g 重の圧力を加えると崩れるものとする。崩壊しないプッチンプリンの大きさの限界を求めよ。

人間が作るにしても、自然が作るにしても、建造物の大きさを無闇な寸法に増すことの不可能なことが容易に分かります。ですから小さなものと同じ寸法で大きな船や宮殿あるいは寺院を造ることは不可能なのです。そんなことをすれば、櫂や帆桁、鉄釘、その他の各部分がばらばらになってしまいます。また、自然も並外れた大きな樹を作ることはできません。もし、そんなことをすれば、幹は自分の重さで折れてしまうでしょう。また、人間、馬、その他の動物の骨格も、もし背の高さを法外に高くすれば、それらが互いにもちこたえて世間並みの働きのできるように作り上げるわけには行かないでしょう。なぜならば、この背丈の増大は、ただ普通より固くて丈夫な材料を使用するか、あるいは骨を太くするかでなければ不可能で、その結果動物の恰好や容貌は化け物を思わせるほど、形を変えるでしょうから。（ガリレオ・ガリレイ「新科学対話」（1638）より）

平成 23 年度夏学期　力学 B（鳥井）レポート問題２

平成 23 年 4 月 21 日出題

１．直線運動している物体 A の位置が図１のようであったとする。この物体 A の速度、加速度の時間変化をグラフ化せよ。

２．直線運動している物体 B の加速度が図２のようであったとする。時刻 $t = 0$ で、この物体の位置（x 座標）は 0、速度は 0 であったとする。この物体の速度、および位置の時間変化をグラフ化せよ。

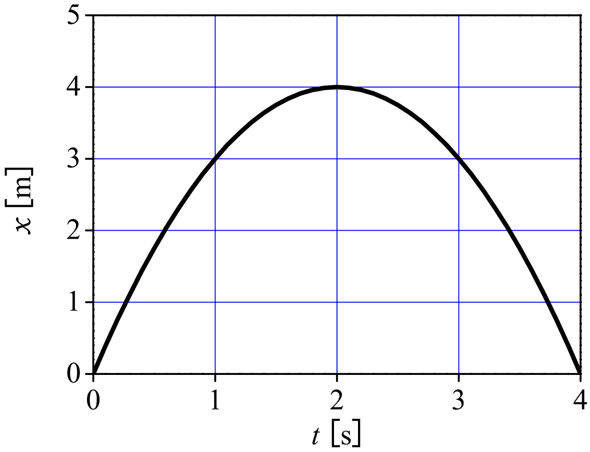


図１　直線運動している物体 A の位置の時間変化

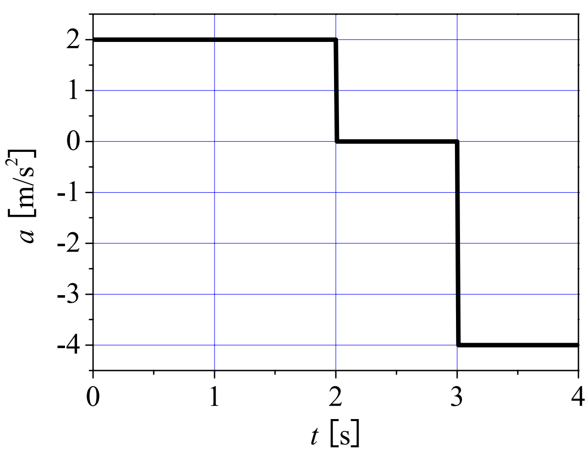


図２　直線運動している物体 B の加速度の時間変化

３．図３は、2009 年世界陸上（ベルリン大会）の男子 100 メートル決勝におけるウサイン・ボルトの走行速度の位置依存性を示している。このグラフより、5m 地点におけるにおけるボルトの加速度の値を見積もれ。興味のあるものは、スタート直後の加速度を見積もれ（考え方は色々あるし、答も色々であろう）。

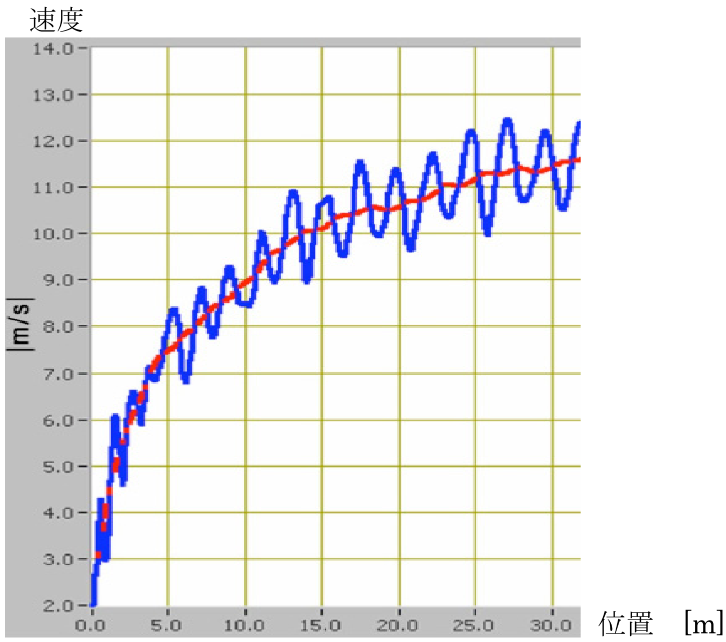


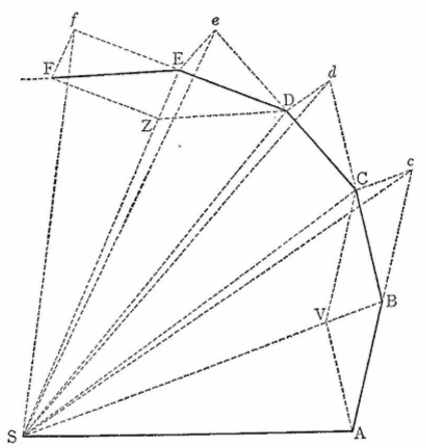
図３　2009 年世界陸上男子 100m 決勝おけるウサイン・ボルトの走行速度の位置依存性。青線は測定値、赤線は平均速度。（http://berlin.iaaf.org/news/kind=101/newsid=53084.html）

平成 23 年度夏学期　力学 B（鳥井）レポート問題３

平成 23 年 4 月 28 日出題

１.「惑星と太陽とを結ぶ線分が単位時間に掃く面積（面積速度）は、一定である」というケプラーの第２法則は、「惑星の運動の加速度ベクトルは、惑星と太陽とを結ぶ線と常に平行である」と仮定すれば証明できることを、右図を参考にして示せ（ヒント：△SAB と△SBc と△SBC の面積がすべて等しいことを示す）。

S は太陽、A, B, C, D, E, F は惑星の軌道を表す。惑星は微小時間に A から B に進む。太陽からの引力がなければ、慣性によって次の微小時間で c に進むが、実際は太陽からの引力によって、線分 SB と平行に加速度を受け、C に進む。

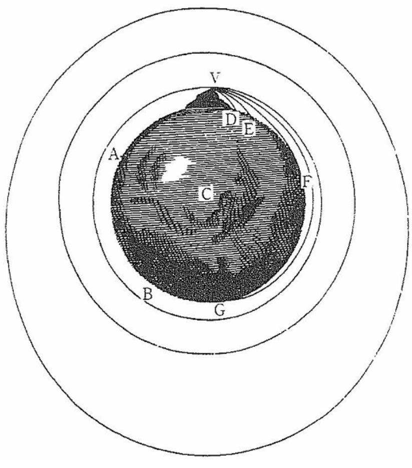


ニュートン「プリンシピア」より。

２. 地球表面で重力のみを受けて運動する物体の鉛直方向（地球の中心へ向かう方向）の加速度は、物体の大きさや材質に依存しないことが実験で確かめられている（ガリレオがピサの斜塔で実験して最初に確かめたと言われている）。地球の半径を $R = 6400\ \mathrm{km}$ 、地表における重力加速度を $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ として、以下の問に答えよ。

（１） 弾丸を速さ v で地表と平行に打ち出したら、速さが変化せず地球を一周して戻ってきたとする（空気抵抗は無視する）。つまり弾丸は R を半径とする等速円運動をしたとする。この等速円運動の周期 T 、角速度 ω 、および加速度の大きさ a を、v および R を用いて表わせ。

（２） （１）の状況が成立するのは、等速円運動の加速度 a が、地表における重力加速度 g に一致している場合のみである。この条件より、v の具体的な値を計算せよ（この速度を**第一宇宙速度**という）。また、このときの周期 T も計算で求め、それを分の単位で表わせ（スペースシャトルや国際宇宙ステーションの周期を調べて比較してみよ。そこから何が言えるか）。



ニュートン「世界の体系」より。図中記号は、問題文と関係ありません。

（３） ケプラーは「惑星の公転周期 T の２乗は、軌道半径 D の３乗に比例する」ことを観測データより見出した（ケプラーの第 3 法則）。この法則を惑星の円運動の加速度の大きさ a と軌道半径 D の関係として表現し直せ。

（４） ケプラーの第３法則は、ニュートンの運動の３法則および万有引力からの帰結の一つであり、地球を回る月や人工衛星などにも適用できる。ケプラーの第３法則および（２）の結果を用いて、①地球の自転の周期と同じ公転周期を持つ人工衛星（静止衛星）の軌道半径、②公転周期が 28 日の月の軌道半径が、それぞれ地球の半径 R の何倍か計算せよ。

平成 23 年度夏学期　力学 B（鳥井）レポート問題４

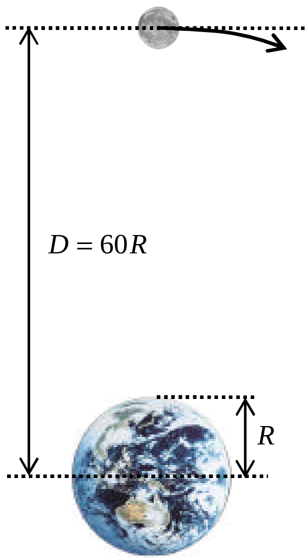
平成 23 年 5 月 12 日出題

1．ニュートンは「プリンキピア」の第Ⅲ編「世界体系」で次のように書いている（カッコ内は鳥井が補足）。「(月の地球からの）平均距離を地球の半径の 60 倍とし、また月の恒星（この場合、地球のこと）に対する１公転は、天文学者たちが決定したように 27 日７時間 43 分で完了するとし、また地球の周囲はフランス人たちが測量によって見出したように、123,249,600 パリ・フィートであるとしよう（１パリ・フィートは約 32.5 cm)」これらニュートンの時代に知られていた数値のみを用いて、地球上の重力加速度の値を計算してみよう。単位と有効数字に注意せよ。

（１）　月の公転速度の値を計算せよ。

（２）　月の向心加速度を計算せよ。月は１秒間にどれだけ地球に向かって落下しているか？

（３）　（２）の結果と万有引力の法則より、地球上の重力加速度の値を計算せよ。現在知られている値（9.8 m/s²）とどれだけ近いか。



縮尺は正しくない

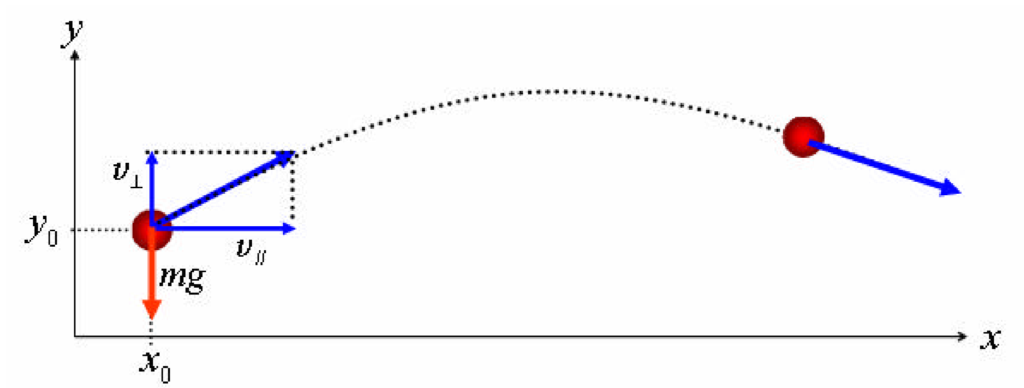
2．質量 m の球を時刻 $t=0$ に初期位置 (x_0, y_0) より打ち出した。x 軸方向の初速度を $v_{//}$、y 軸方向の初速度を $v_\perp$ をとする。球には大きさが mg の重力が $-y$ 方向に働いている。時刻 $t=0$ 以降の球の座標 $(x(t), y(t))$ を求めたい。

（１）　x 軸方向、y 軸方向に関する運動方程式を、それぞれ書き下せ。

（２）　初期条件を満たすように（１）の運動方程式を解き、$(x(t), y(t))$ を求めよ。

（３）　$(x(t), y(t))$ が描く軌跡が放物線（y が x の二次関数）となることを示せ。

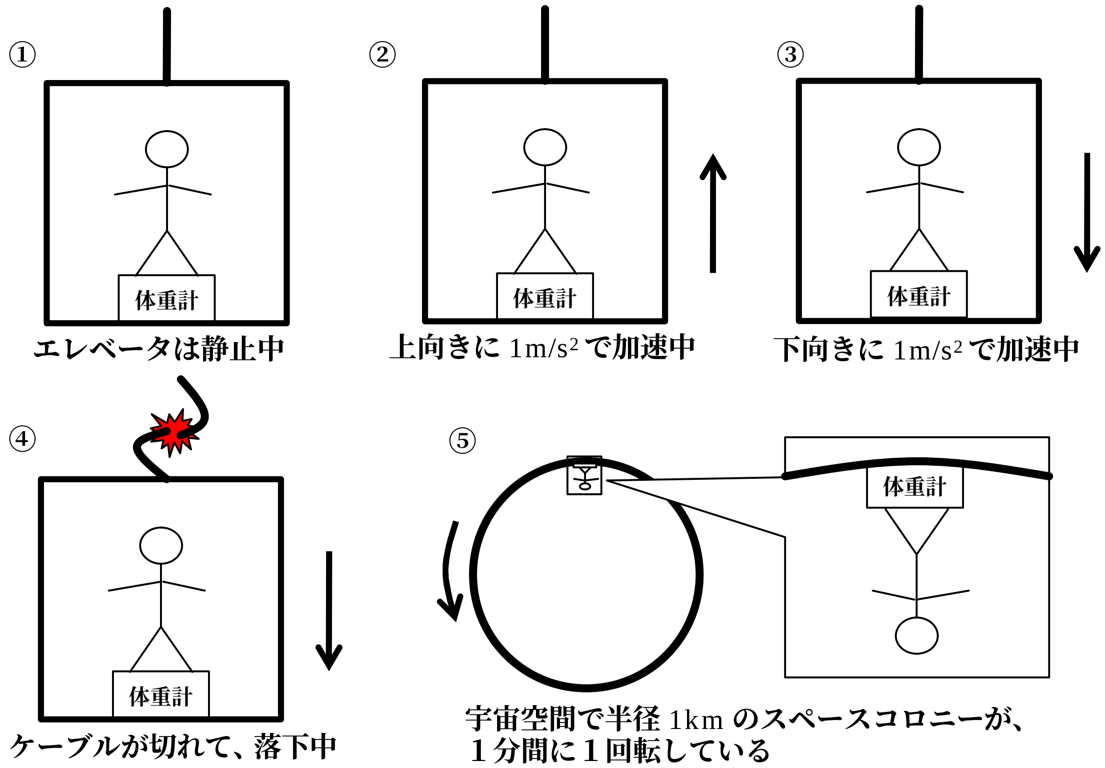
（４）　（余裕がある者のみ答えよ）$x_0 = y_0 = 0$ とする。球の速さ $v=\sqrt{v_{//}^2+v_\perp^2}$ が一定という制限がつくとき、球を一番遠くに飛ばす打ち出し角度を求めよ。



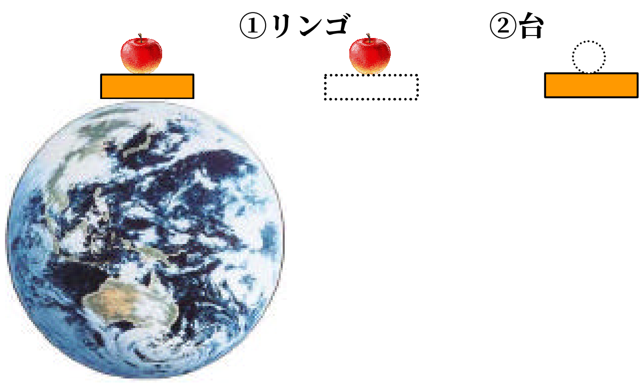
平成 23 年度夏学期　力学 B（鳥井）レポート問題５

平成 23 年 5 月 19 日出題

１．物質の「質量」や物質に働く「力」は明確に定義できる量であるが、「重さ」は人の感覚に結びついたあいまいな概念である。ここでは「重さ」を「体重計の示す値」と定義してみよう。体重計の目盛の単位は kg 重である。以下の図に示す状況で、「人に働いている力」を矢印で表し、体重計の示す値をそれぞれ答えよ。ただし、エレベータは地球上（重力加速度は約 g = 10 m/s²）にあるとし、人の質量は 60 kg とする。



２．質量 m_1 のリンゴが質量 m_2 の台の上に置いてある。①リンゴに働く力、②台に働く力を、それぞれ矢印であらわせ。それぞれの矢印で表された力に対して、（A）つりあいの関係にあるもの同士、（B）作用反作用の関係にあるもの同士を選び出せ。

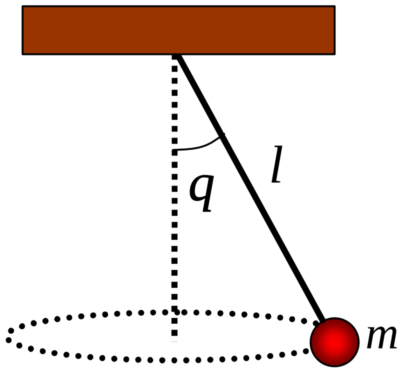


３．速さ 10 m/s で飛んでくる質量 50 g の卵を、割らずにキャッチする方法を考える。卵を手でキャッチする際、手から卵に力を加えることにより、卵が完全に止まるまで減速させるわけだが、卵は 5 kg 重の力を加えると割れてしまうとする。卵を割らずにキャッチするには、最低でもどれだけの時間、力を加え続けなければならないか。また、最低でもどれだけの距離、手を後ろに動かさなくてはならないか。

平成 23 年度夏学期　力学 B（鳥井）レポート問題６

平成 23 年 5 月 26 日出題

１．長さ l のひもで吊るされた質量 m の球が鉛直方向に対して q の角度で等速円運動している。ひもの質量は無視できるとして、以下の問いに答えよ。



（１）　球に働いている力を矢印で表せ。

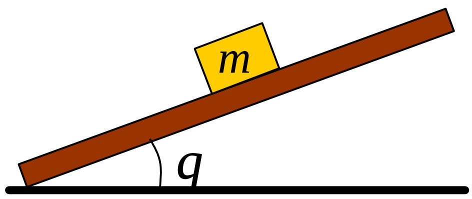
（２）　球がひもから受ける張力の大きさ求めよ。

（３）　球の等速円運動の向心加速度を求めよ。

（４）　$q << 1$ とする。このとき、$\sin q \cong \tan q \cong q$ と近似できる。球の等速円運動の周期がちょうど２秒になるひもの長さを求めよ（数値で答を出すこと）。

（５）　（実験実習）5 円玉を（４）で答えた長さの糸で吊るし、$q << 1$ をみたす角度で回転させてみよ。周期は本当に２秒になったか？また回転させるのではく、単振子のように揺らした場合、その周期はどうなるか？同じ周期になった場合、それは何故か考察せよ。

２．質量 m のブロックを板の上に乗せ、水平面に対する板の角度 q を大きくしていったら、ちょうど $q = q_0$ のときに滑り出した。以下の問いに答えよ。



（１）　滑り出す前の角度において、ブロックに働いている①重力、②垂直抗力、③摩擦力を矢印で表わせ。

（２）　ブロックが滑り出す直前における、垂直抗力の大きさ N、および摩擦力の大きさ $F_{\max}$（最大静止摩擦力）を求めよ。

（３）　静止摩擦係数 m は、$F_{\max} = mN$ で定義される。このブロックと板との間の m を q_0 で表わせ。

（４）　ブロックが動き始めてからの摩擦力（動摩擦力）の大きさは $F = m'N$（ただし $m' < m$）で与えられるとする。横軸を q、縦軸を摩擦力の大きさとするグラフの概形を描け。

（５）　（実験実習）（３）の解答を参考にして、身近にある物体間の静止摩擦係数を測定せよ（おおよその値でよい）。１より大きい静止摩擦係数の測定に成功した場合は、特別なレポート点を与えるので、その詳細（用いた物体の材質、形状など）を報告すること。（注）粘着力は摩擦力とはみなしません。

平成23年度夏学期　力学B（鳥井）レポート問題７

平成23年6月2日出題

1．宇宙からの放射線の影響で（$n + {}^{14}N \rightarrow {}^{14}C + {}^{1}H$ という核反応により）、大気中には約10^{-12}（1兆分の１）の割合の${}^{14}C$が二酸化炭素の形で存在している。${}^{14}C$は半減期5730年でβ崩壊する放射性同位元素で、二酸化炭素を光合成で取り込む植物、その植物を摂取する動物、これらを食物とする人間にも大気中と同じ割合で ${}^{14}C$ が存在している。人体の体重を 70kg として以下の問いに答えよ。

（１）　１個の${}^{14}C$原子が１秒間に崩壊する確率を求めよ。

（２）　ある化石に含まれていた${}^{14}C$原子の割合が、大気中における${}^{14}C$原子の割合の1%であったとする。この化石が生存していたのは今から何年前か？

（３）　${}^{14}C$原子を1g集めたとき、1秒間に崩壊する${}^{14}C$原子は何個か。

（４）　人体を構成する元素は1番目が酸素（質量比65%）、2番目が炭素（質量比18%）である。体重70kgの人体に存在する${}^{14}C$の総質量をグラム(g)で表わせ。

（５）　人体内部で１秒間に崩壊する${}^{14}C$原子の個数を求めよ（単位はベクレル（Bq））。

（６）　${}^{14}C$原子がβ崩壊する際に放出するβ線のエネルギーは、0.156 MeV（1 MeV = 10^6 eV、1eV = 1.6×10^{-19} J）である。体内で放出されたβ線のエネルギーは、100%体内で吸収されると仮定し、${}^{14}C$原子のβ崩壊によって人体が1年間に吸収するエネルギーを求めよ。

（７）　放射線が人体に及ぼす影響は、各組織・臓器が1kgあたりに吸収する放射線のエネルギー（単位は J/kg だが、これをグレイ(Gy)と表す）に放射線の種類で決まる荷重係数（1～20）をかけた値で評価する。これを等価線量といい、シーベルト（Sv）という単位で表す。β線の場合、荷重係数は１で 1 Gy = 1 Sv である。体内の${}^{14}C$原子は体内で均等に分布していると仮定し、${}^{14}C$原子による1年間あたりの等価線量を求めよ（参考：日本人が1年間に受ける自然放射線は約1 mSv）。

2．関数 $f(x) = (1+x)^a$ を考える。

（１）　$f(x)$をxの１次までマクローリン展開せよ（ $f(x)$の１次近似式）。

（２）　「102」という数値は$100+2=10^2\times(1+0.02)$と表現できる。（１）の結果を用いて$(102)^5$および$\sqrt{102}$の近似値を求めよ。

（３）　$(102)^5$および$\sqrt{102}$を実際に電卓を用いて計算し、（２）の近似値と比較せよ。

3．オイラーの公式$e^{iq} = \cos q + i\sin q$を用いて、以下を証明せよ。

（１）　$e^{iq_1}e^{iq_2} = e^{i(q_1+q_2)}$

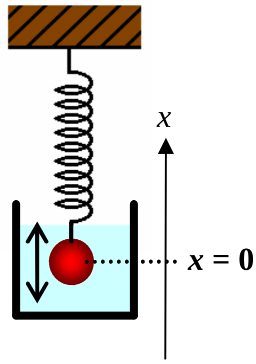
（２）　$(e^{iq})^n = e^{inq}$　（ド・モアブルの定理）

（３）　$\dfrac{d}{dt}e^{iwt} = iwe^{iwt}$

（４）　$\mathrm{Re}\left[\dfrac{de^{iwt}}{dt}\right] = \dfrac{d}{dt}\mathrm{Re}\left[e^{iwt}\right]$、$\mathrm{Im}\left[\dfrac{de^{iwt}}{dt}\right] = \dfrac{d}{dt}\mathrm{Im}\left[e^{iwt}\right]$（関数を微分しても実部と虚部は混じらない）

平成 23 年度夏学期　力学 B（鳥井）レポート問題８

平成 23 年 6 月 9 日出題



1．ばね定数 k のばねに質量 m の球がつながれている。球は粘性のある液体の中にあり、速度に比例する抵抗力 $F_{\mathrm{I}} = -2mgv$ を受けるものとする。$x=0$ はつりあいの位置とする。

（１）　球の位置 x に関する運動方程式を書き表せ。

（２）　（１）の運動方程式の解として、$f(t)$ と $g(t)$ が見つかったとする。このとき、関数 $Af(t)+Bg(t)$ （A, B は任意定数）も運動方程式の解であることを示せ（この性質は、線形微分方程式一般に成り立つ）。

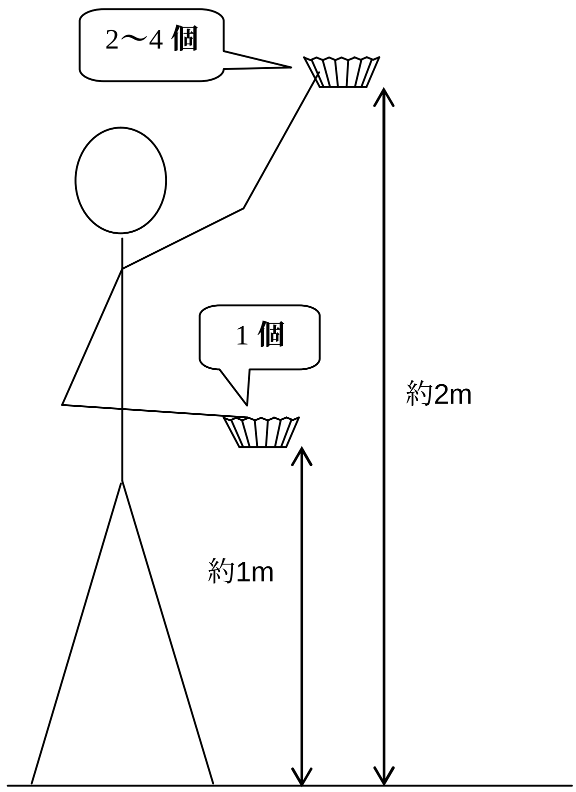
（３）　運動方程式の解として $x = e^{at}$ の形を仮定する。これを運動方程式に代入し、a の値を求めよ。

（４）　（２）、（３）の結果より、運動方程式の一般解（任意定数を含む解）を求めよ。

（５）　時刻 $t=0$ に位置 $x=0$ にあった球に上向きの初速度 v_0 を与えた。その後の時刻における球の運動を求めよ。

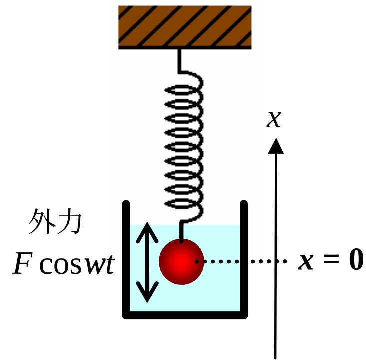
（６）　（５）の運動における振動周波数 w は、抵抗力が無視できる場合（つまり $g=0$）の振動周波数 w_0（これを固有周波数という）と異なっている。観測された振動の周期が１秒、振動の振幅が $1/e \approx 0.37$ 倍に減衰するのにかかった時間が 10 秒であったとする。振動周波数の固有周波数からのずれは何%か（ヒント：近似式 $(1+x)^a \cong 1+ax$ を利用せよ）。

２．（実験実習）お弁当用のアルミカップが受ける空気抵抗は慣性抵抗（速度の自乗に比例）だろうか、それとも粘性抵抗（速度に比例）だろうか。右図のような実験をして白黒はっきりさせてみよう。アルミカップ１個を 1m の高さから、2 個～4 個を 2m の高さから同時に落下させる。同時に地面に着くのは、2m の高さのアルミカップが何個のときであったか？この実験結果を考察し、アルミカップが受ける抵抗力が慣性抵抗か粘性抵抗か判定せよ。興味のあるものは、授業で紹介したようにストップウォッチを用いて落下時間を計測し、終端速度（またはその自乗）をアルミカップの個数の関数としてグラフ化し、考察してみよ。



平成 23 年度夏学期　力学 B（鳥井）レポート問題９

平成 23 年 6 月 16 日出題



１．ばね定数 k のばねに質量 m の球がつながれている。球は粘性のある液体の中にあり、速度に比例する抵抗力 $F_{\mathrm{I}} = -2mgv$ および角周波数 w の外力 $F\cos wt$ を受けるものとする。$x = 0$ は外力がない時のつりあいの位置とする。

（１） 球の固有角周波数（抵抗力も外力も働いていないと考えた場合の振動の角周波数）w_0 を求めよ。

（２） 球の位置 x に関する運動方程式を w_0 を用いて（k を用いずに）書き表せ。

（３） 運動方程式の定常解（十分時間が経った後の解）として $x(t) = x(w)e^{iwt}$ の形を仮定し、その実部が実際の位置を表現すると約束する。これに伴い、周期的外力も Fe^{iwt} と複素表示する。$x(t)$ を運動方程式に代入し、$x(w)$ の値（一般に複素数）を求めよ。

（４） 実際の球の位置を表す関数は、複素平面上で回転する関数 $x(w)e^{iwt}$ の実部 $\mathrm{Re}[x(w)e^{iwt}]$ である。球の実際の（我々が住む実数の世界での）振動の振幅を求めよ。

（５） $g << w_0$ のとき、つまり減衰の時定数が固有振動の周期より十分長い場合、振動の振幅の 2乗（これは振動のエネルギーに相当する）は $(w_0 - w)^2 + g^2$ に反比例すること、つまり $w = w_0$ でピークを持つ（共振する）ことを示せ。

（６） 振動の振幅の２乗の値が、共振周波数における値（ピーク値）の半分以上になるような外力の角周波数 w の範囲 Δw を求めよ（これを共振の半値全幅、英語では full width at half maximum　（FWHM）と呼ぶ。）

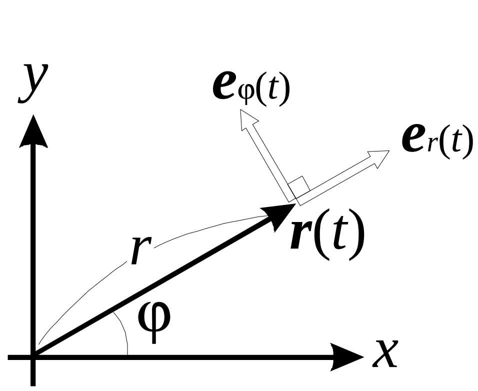
（７） 近年、高層ビルの長周期（つまり低周波数）地震動対策が話題となっている。とあるビルが来るべき長周期地震（周期は予測されているものとする）に耐えられないと診断されたとする。上の設問から学んだ知識のみを使って、可能な対策を考案せよ。

２．右図のような２次元極座標表示を考える。

（１） 速度および加速度ベクトルが以下で与えられることを証明せよ。

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{j}\,\boldsymbol{e}_j$$

$$\boldsymbol{a}(t) = \left(\ddot{r} - r\dot{j}^2\right)\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{j})\boldsymbol{e}_j$$



（２） ある物体が、原点の周りを半径 a 、角周波数 w の等速円運動している。上式より、この物体の加速度ベクトルの $\boldsymbol{e}_r$ 成分、および $\boldsymbol{e}_j$ 成分を求めよ。

平成 23 年度夏学期　力学 B（鳥井）レポート問題１０

平成 23 年 6 月 23 日出題

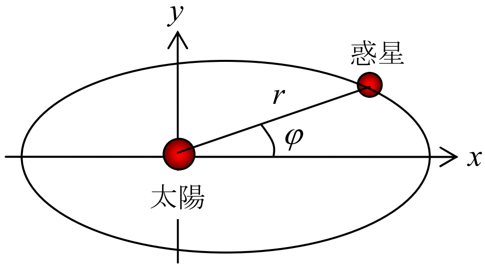
１．$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z,\ \boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{e}_x+B_y\boldsymbol{e}_y+B_z\boldsymbol{e}_z$ とする。以下を証明せよ。

（１）　$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{e}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{e}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{e}_z$

（２）　$\dfrac{d}{dt}\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right)=\dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\dfrac{d\boldsymbol{B}}{dt}$

２．太陽を原点とする２次元極座標を考える。惑星の位置、速度および加速度は、以下のように表わされる。

$$\boldsymbol{r}(t)=r\boldsymbol{e}_r$$
$$\boldsymbol{v}(t)=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$
$$\boldsymbol{a}(t)=\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi$$



（１）　太陽と惑星とを結ぶ線分が単位時間に描く面積（面積速度）を、r と $\dot{\varphi}$ を用いて表わせ。

（２）　惑星の角運動量の大きさ L を求めよ（ヒント：$|\boldsymbol{L}|=|\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}|,\ |\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\varphi|=1, \boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_r=0$）。

（３）　面積速度を角運動量の大きさ L で表わせ。

（４）　万有引力が中心力（力の $\boldsymbol{e}_\varphi$ 成分がゼロ）であることを用いて、面積速度および角運動量が時間変化しない（保存する）ことを示せ。

３．$z=0$ 平面内にある半径 a、単位長さあたりの質量 ρ のリングが、z 軸を回転軸として、角周波数 ω で図の向きに回転している（角速度ベクトルは $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{e}_z$）。以下の問いに答えよ。

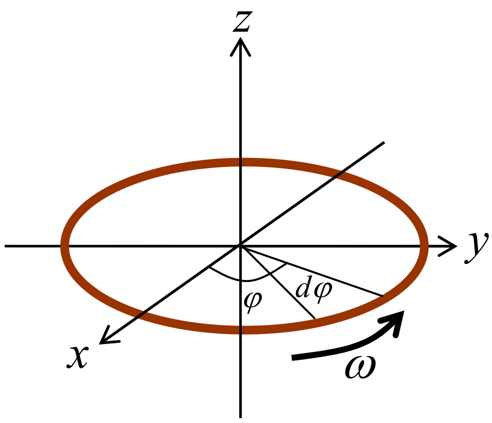
（１）　リング上の位置を極座標表示する。リング上の φ から $\varphi+d\varphi$ の部分の質量を求めよ。

（２）　リング上のある部分の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすると、その部分の速度ベクトルが $\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ と表わせること示せ。

（３）　リング上の φ から $\varphi+d\varphi$ の部分の角運動量を求めよ。大きさだけでなく、向きも答えること。

（４）　リング全体の角運動量を求めよ。

（５）　リング全体の質量を M として、リングの慣性モーメント I を求めよ。

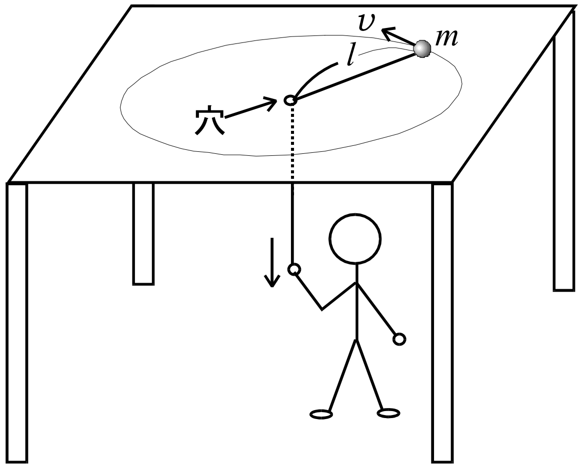


（６）　余裕のあるものは、半径 a、単位面積あたりの質量 ρ（全体の質量 M）の円盤の角運動量および慣性モーメントを求めよ。

平成 23 年度夏学期　力学 B（鳥井）レポート問題１１

平成 23 年 6 月 30 日出題

１. 机の中心に穴を開け、右図のように質量mの球に糸をつないだ。最初、球は速さ$v = v_0$で円運動しており、球と穴との距離lは糸の下端を下向きの力で引っ張ることによって$l = l_0$に保たれていた。この状態から、糸を引く力を徐々に増し、球と穴との距離が$l = l_0/10$になるまで糸を引いた。このとき、①球の角運動量、②球の速度、③球の角速度、④糸を引く力は、それぞれ何倍になるか答えよ。ただし、球と机の間の摩擦および糸と穴の間の摩擦は無視できるものとする。



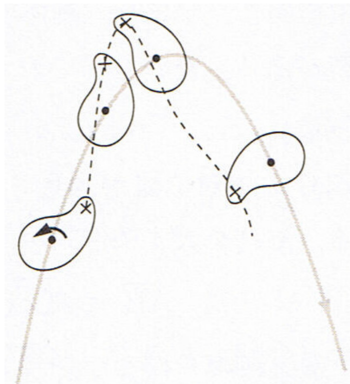
２. 右図のように板を投げ上げると、重心でない点の軌跡は複雑な曲線を描くが、重心の軌跡はきれいな放物線を描く。これは、重心の座標$\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}$が運動方程式

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}}{dt^2} = \boldsymbol{g} \quad (※)$$

を満たすためである（$\boldsymbol{g}$は鉛直下向きで大きさが重力加速度であるベクトルを表す）。重心の座標の定義式

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} = \frac{\sum m_i \boldsymbol{r}_i}{M}$$

（$\boldsymbol{r}_i$およびm_iは、板を構成する個々の原子・分子の位置および質量、Mは板の質量を表す）に立ち返り、（※）式を証明せよ。その際、どの段階で作用反作用の法則を利用したか明示せよ。



兵頭「考える力学」p220 図 11.12

３.（実験実習）右の写真は、フォーク２本とコインを使った「やじろべえ（balancing toy)」である。実際に作ってみよ。コインの代わりに爪楊枝（toothpick）を用いても面白い。

（参考課題）やじろべえは、物理的には「実体振り子」と呼ばれる振り子の一種である。角運動量の時間変化を表す方程式$d\boldsymbol{L}/dt = \boldsymbol{N}$（$\boldsymbol{N}$は外力のトルクの和）より、やじろべえの安定位置からの角度のずれφが従うべき方程式が

$$I\ddot{\varphi} = -Mgh\varphi \quad （ただし\varphi << 1のとき）$$

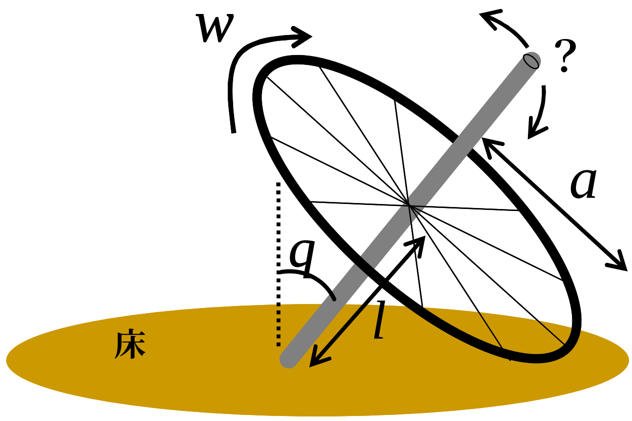
で与えられることを示せ（Iは支点まわりの慣性モーメント、Mは質量、gは重力加速度、hは支点から重心までの距離）。この方程式より、やじろべえの振動周期を求め、これを長くする（やじろべえをゆっくり振動させる）ための条件について考察せよ。その考察に基づき、上述のフォークやじろべえの周期が１秒以上になるよう工夫せよ。

平成 23 年度夏学期　力学 B（鳥井）レポート問題１２

平成 23 年 7 月 7 日出題

１．回転している物体に、回転軸に対して垂直な向きにトルクを加えると、回転軸（つまり角運動量の向き）が回転を始める。このような運動を一般に歳差運動（precession）という。歳差運動でよく知られた例が、独楽（spinning top）の首振り運動（みそすり運動）である。ここでは自転車の車輪（半径 a ）を独楽とした場合の歳差運動を考えよう。

（1）自転車の車輪の質量はすべて外周部（rim）に集中していると考える（スポークおよび車軸の質量は無視する）。車輪の質量を M として、車輪の慣性モーメント I を求めよ。



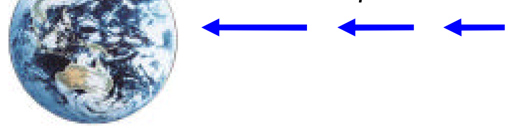
（2）車輪の中心から床までの距離を l 、車軸の垂直方向からの傾きを q とする。車輪に働くトルク N の大きさを求めよ。

（3）車輪は上から見て時計回りに回転しているとする。このとき、車軸は時計回りと反時計回りのどちらで歳差運動するか？手近にある独楽（画びょうでもよい）を回して実験で確認せよ。

（4）車輪の回転の角速度を w とする。車軸の歳差運動の角速度 Ω を求めよ。一般に、独楽が止まる寸前は、回転の角速度 w が極端に小さくなる。このとき、歳差運動の角速度はどう変化するか？これも実験で確認せよ。

（5）（参考課題）世の中には歳差運動しない「マクスウェルの独楽」と呼ばれるおもちゃがある（web で調べてみよ）。なぜ歳差運動しないのか考察せよ。また、実際に作ってみよ。

２．万有引力定数を G 、地球の質量を M 、地球の半径を R とする。



$$\boldsymbol{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

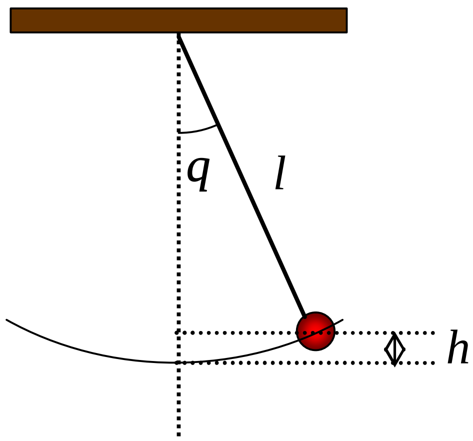
（1）重力に逆らって質量 m の物体を地表から無限遠まで押し続けるために必要な仕事を求めよ。

（2）実際には、我々は空気のない宇宙まで行って物体を押し続けるわけにはいかない。そこで物体に初速度を与えて物体を無限遠まで運ぶことにしよう。運動エネルギーの変化は、重力が物体になす仕事（この場合、負の値を持つ）に等しいことを用いて、最低限必要な初速度を求めよ（これは第二宇宙速度と呼ばれ、第一宇宙速度（約 7.9 km/s）の $\sqrt{2}$ 倍である）。

平成 23 年度夏学期　力学 B（鳥井）レポート問題１３

平成 23 年 7 月 14 日出題

１．ひもの長さがl、球の質量がmの単振り子を考える。鉛直方向からのひもの角度をq、球の最下点から高さをhとする。



（１）$q << 1$として、qが満たす微分方程式を求めよ（$\sin q \cong q$ の近似を用いよ）。

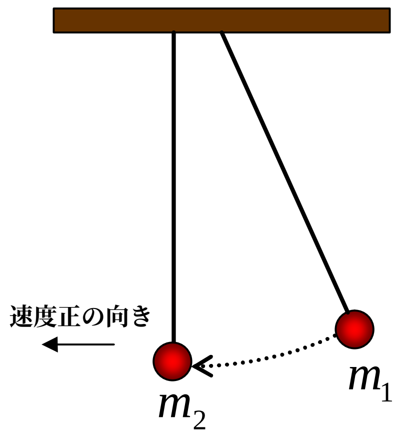
（２）時刻$t = 0$で$q = q_0$、初速度ゼロとして（１）の微分方程式の解を求めよ。

（３）$q << 1$として、hをqで表わせ（$\cos q$ の近似式として、テイラー展開の 2 次までの式を用いよ）。

（４）（３）の結果を用いて、球の持つ位置エネルギーをqの関数として表わせ。

（５）球の運動エネルギーと位置エネルギーの和は時間的に変化しない、つまり保存することを（２）および（４）の結果より計算で示せ。

２．質量がそれぞれm_1、m_2の球（球１、球２と呼ぶ）を長さの等しいひもでつるし、静止している球２に向かって速度v_1で球１を衝突させた。その直後の球１、球２の速度を、それぞれv_1'、v_2'とする。衝突の際、球の力学的エネルギーは保存されるとして、以下の問いに答えよ。



（１）運動量保存則を式で表わせ。

（２）エネルギー保存則を式で表わせ。

（３）（１）、（２）より、v_1'、v_2'をv_1、m_1、m_2で表わせ。また衝突直後における球１に対する球２の相対速度を求めよ。

（４）①$m_1 >> m_2$、②$m_1 = m_2$、③$m_1 << m_2$におけるv_1'、v_2'をそれぞれ求めよ。

（実験実習）机上に置いた 1 円玉、10 円玉、500 円玉などを指ではじいて衝突させ、（４）の結果を確認してみよ。

３．地球による重力のポテンシャルは、地球の中心を座標の原点とすれば、$a \equiv GM$（Gは万有引力定数、Mは地球の質量）として

$$U(\boldsymbol{r}) = -\frac{a}{r} = -\frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

と表現できる。このポテンシャルより$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla U(\boldsymbol{r})$を実際に計算することにより、地球の重力の場$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$を求めよ。

補講は 7 月 20 日（水）３限（13:00~14:30）@1108 です