平成23年度夏学期　力学B（鳥井）レポート問題１０

平成23年6月23日出題

１．$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{e}_x + B_y\boldsymbol{e}_y + B_z\boldsymbol{e}_z$ とする。以下を証明せよ。

（１）　$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{e}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{e}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{e}_z$

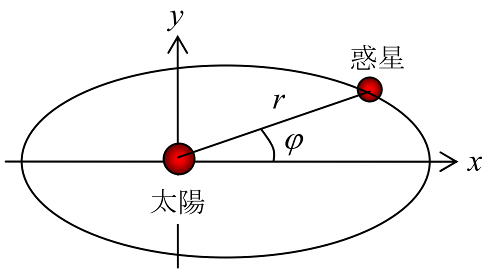
（２）　$\dfrac{d}{dt}\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right) = \dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times\dfrac{d\boldsymbol{B}}{dt}$

２．太陽を原点とする２次元極座標を考える。惑星の位置、速度および加速度は、以下のように表わされる。

$$\boldsymbol{r}(t) = r\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{a}(t) = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi$$



（１）　太陽と惑星とを結ぶ線分が単位時間に描く面積（面積速度）を、r と $\dot{\varphi}$ を用いて表わせ。

（２）　惑星の角運動量の大きさ L を求めよ（ヒント：$|\boldsymbol{L}| = |\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}|$, $|\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\varphi| = 1, \boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_r = 0$）。

（３）　面積速度を角運動量の大きさ L で表わせ。

（４）　万有引力が中心力（力の $\boldsymbol{e}_\varphi$ 成分がゼロ）であることを用いて、面積速度および角運動量が時間変化しない（保存する）ことを示せ。

３．$z=0$ 平面内にある半径 a、単位長さあたりの質量 ρ のリングが、z 軸を回転軸として、角周波数 ω で図の向きに回転している（角速度ベクトルは $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_z$）。以下の問いに答えよ。

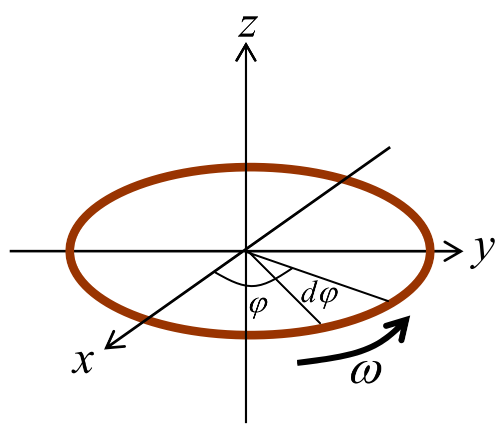
（１）　リング上の位置を極座標表示する。リング上の φ から $\varphi + d\varphi$ の部分の質量を求めよ。

（２）　リング上のある部分の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすると、その部分の速度ベクトルが $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ と表わせること示せ。

（３）　リング上の φ から $\varphi + d\varphi$ の部分の角運動量を求めよ。大きさだけでなく、向きも答えること。

（４）　リング全体の角運動量を求めよ。

（５）　リング全体の質量を M として、リングの慣性モーメント I を求めよ。



（６）　余裕のあるものは、半径 a、単位面積あたりの質量 ρ（全体の質量 M）の円盤の角運動量および慣性モーメントを求めよ。