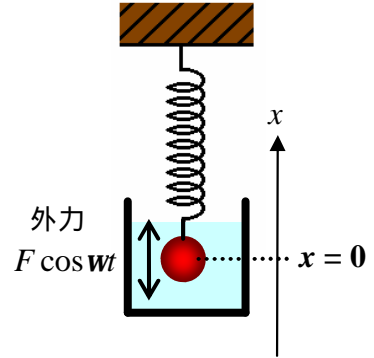


平成 23 年度夏学期 力学 B (鳥井) レポート問題 9

平成 23 年 6 月 16 日出題

1. ばね定数 k のばねに質量 m の球がつながれている。球は粘性のある液体の中にあリ、速度に比例する抵抗力 $F_1 = -2mgv$ および角周波数 ω の外力 $F \cos \omega t$ を受けるものとする。 $x = 0$ は外力がない時のつりあいの位置とする。



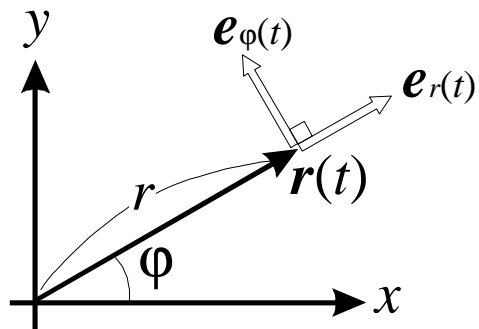
- (1) 球の固有角周波数(抵抗力も外力も働いていないと考えた場合の振動の角周波数) ω_0 を求めよ。
- (2) 球の位置 x に関する運動方程式を ω_0 を用いて(k を用いずに) 書き表せ。
- (3) 運動方程式の定常解(十分時間が経った後の解)として $x(t) = x(\omega)e^{i\omega t}$ の形を仮定し、その実部が実際の位置を表現すると約束する。これに伴い、周期的外力も $Fe^{i\omega t}$ と複素表示する。 $x(t)$ を運動方程式に代入し、 $x(\omega)$ の値(一般に複素数)を求めよ。
- (4) 実際の球の位置を表す関数は、複素平面上で回転する関数 $x(\omega)e^{i\omega t}$ の実部 $\text{Re}[x(\omega)e^{i\omega t}]$ である。球の実際の(我々が住む実数の世界での)振動の振幅を求めよ。
- (5) $g \ll \omega_0$ のとき、つまり減衰の時定数が固有振動の周期より十分長い場合、振動の振幅の 2乗(これは振動のエネルギーに相当する)は $(\omega_0 - \omega)^2 + g^2$ に反比例すること、つまり $\omega = \omega_0$ でピークを持つ(共振する)ことを示せ。
- (6) 振動の振幅の 2乗の値が、共振周波数における値(ピーク値)の半分以上になるような外力の角周波数 ω の範囲 $\Delta\omega$ を求めよ(これを共振の半値全幅、英語では full width at half maximum (FWHM) と呼ぶ。)
- (7) 近年、高層ビルの長周期(つまり低周波数)地震動対策が話題となっている。とあるビルが来るべき長周期地震(周期は予測されているものとする)に耐えられないと診断されたとする。上の設問から学んだ知識のみを使って、可能な対策を考案せよ。

2. 右図のような 2 次元極座標表示を考える。

- (1) 速度および加速度ベクトルが以下で与えられることを証明せよ。

$$\mathbf{v}(t) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi})\mathbf{e}_\phi$$



- (2) ある物体が、原点の周りを半径 a 、角周波数 ω の等速円運動している。上式より、この物体の加速度ベクトルの e_r 成分、および e_ϕ 成分を求めよ。