

平成 23 年度夏学期 力学 B (鳥井) レポート問題 7

平成 23 年 6 月 2 日出題

1. 宇宙からの放射線の影響で($n + {}^{14}\text{N} \rightarrow {}^{14}\text{C} + {}^1\text{H}$ という核反応により) 大気中には約 10^{-12} (1兆分の1)の割合の ${}^{14}\text{C}$ が二酸化炭素の形で存在している。 ${}^{14}\text{C}$ は半減期 5730 年で崩壊する放射性同位元素で、二酸化炭素を光合成で取り込む植物、その植物を摂取する動物、これらを食物とする人間にも大気中と同じ割合で ${}^{14}\text{C}$ が存在している。人体の体重を 70kg として以下の問いに答えよ。

- (1) 1 個の ${}^{14}\text{C}$ 原子が 1 秒間に崩壊する確率を求めよ。
- (2) ある化石に含まれていた ${}^{14}\text{C}$ 原子の割合が、大気中における ${}^{14}\text{C}$ 原子の割合の 1% であったとする。この化石が生存していたのは今から何年前か?
- (3) ${}^{14}\text{C}$ 原子を 1g 集めたとき、1 秒間に崩壊する ${}^{14}\text{C}$ 原子は何個か。
- (4) 人体を構成する元素は 1 番目が酸素 (質量比 65%)、2 番目が炭素 (質量比 18%) である。体重 70kg の人体に存在する ${}^{14}\text{C}$ の総質量をグラム(g)で表わせ。
- (5) 人体内部で 1 秒間に崩壊する ${}^{14}\text{C}$ 原子の個数を求めよ (単位はベクレル (Bq))。
- (6) ${}^{14}\text{C}$ 原子が崩壊する際に放出する β 線のエネルギーは、0.156 MeV (1 MeV = 10^6 eV、1 eV = 1.6×10^{-19} J) である。体内で放出された β 線のエネルギーは、100%体内で吸収されると仮定し、 ${}^{14}\text{C}$ 原子の崩壊によって人体が 1 年間に吸収するエネルギーを求めよ。
- (7) 放射線が人体に及ぼす影響は、各組織・臓器が 1kg あたりに吸収する放射線のエネルギー (単位は J/kg だが、これをグレイ(Gy)と表す) に放射線の種類で決まる荷重係数 (1~20) をかけた値で評価する。これを等価線量といい、シーベルト (Sv) という単位で表す。 β 線の場合、荷重係数は 1 で 1 Gy = 1 Sv である。体内の ${}^{14}\text{C}$ 原子は体内で均等に分布していると仮定し、 ${}^{14}\text{C}$ 原子による 1 年間あたりの等価線量を求めよ (参考: 日本人が 1 年間に受ける自然放射線は約 1 mSv)。

2. 関数 $f(x) = (1+x)^a$ を考える。

- (1) $f(x)$ を x の 1 次までマクローリン展開せよ ($f(x)$ の 1 次近似式)。
- (2) 「102」という数値は $100 + 2 = 10^2 \times (1 + 0.02)$ と表現できる。(1)の結果を用いて $(102)^5$ および $\sqrt{102}$ の近似値を求めよ。
- (3) $(102)^5$ および $\sqrt{102}$ を実際に電卓を用いて計算し、(2)の近似値と比較せよ。

3. オイラーの公式 $e^{iq} = \cos q + i \sin q$ を用いて、以下を証明せよ。

- (1) $e^{iq_1} e^{iq_2} = e^{i(q_1+q_2)}$
- (2) $(e^{iq})^n = e^{inq}$ (ド・モアブルの定理)
- (3) $\frac{d}{dt} e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t}$
- (4) $\operatorname{Re}\left[\frac{de^{i\omega t}}{dt}\right] = \frac{d}{dt} \operatorname{Re}[e^{i\omega t}]$ 、 $\operatorname{Im}\left[\frac{de^{i\omega t}}{dt}\right] = \frac{d}{dt} \operatorname{Im}[e^{i\omega t}]$ (関数を微分しても実部と虚部は混じらない)