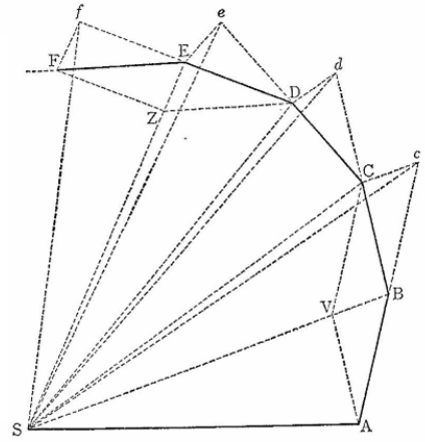


平成 23 年度夏学期 力学 B (鳥井) レポート問題 3

平成 23 年 4 月 28 日出題

1. 「惑星と太陽とを結ぶ線分が単位時間に掃く面積 (面積速度) は、一定である」というケプラーの第 2 法則は、「惑星の運動の加速度ベクトルは、惑星と太陽とを結ぶ線と常に平行である」と仮定すれば証明できることを、右図を参考にして示せ (ヒント: $\triangle SAB$ と $\triangle SBc$ と $\triangle SBC$ の面積がすべて等しいことを示す)。

S は太陽、A, B, C, D, E, F は惑星の軌道を表す。惑星は微小時間に A から B に進む。太陽からの引力がなければ、慣性によって次の微小時間で c に進むが、実際は太陽からの引力によって、線分 SB と平行に加速度を受け、C に進む。



ニュートン「プリンシピア」より。

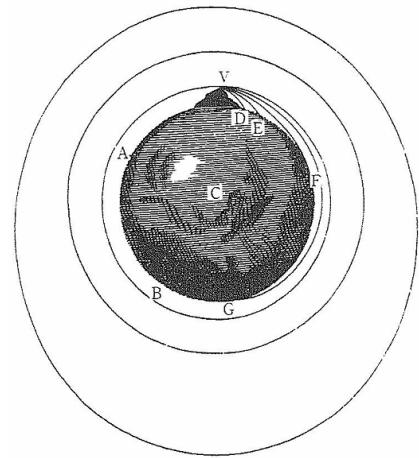
2. 地球表面で重力のみを受けて運動する物体の鉛直方向 (地球の中心へ向かう方向) の加速度は、物体の大きさや材質に依存しないことが実験で確かめられている (ガリレオがピサの斜塔で実験して最初に確かめたと言われている)。地球の半径を $R = 6400 \text{ km}$ 、地表における重力加速度を $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ とし、以下の問に答えよ。

- (1) 弾丸を速さ v で地表と平行に打ち出したら、速さが変化せず地球を一周して戻ってきたとする (空気抵抗は無視する)。つまり弾丸は R を半径とする等速円運動をしたとする。この等速円運動の周期 T 、角速度 ω 、および加速度の大きさ a を、 v および R を用いて表わせ。

- (2) (1) の状況が成立するのは、等速円運動の加速度 a が、地表における重力加速度 g に一致している場合のみである。この条件より、 v の具体的な値を計算せよ (この速度を **第一宇宙速度** という)。また、このときの周期 T も計算で求め、それを分の単位で表わせ (スペースシャトルや国際宇宙ステーションの周期を調べて比較してみよ。そこから何が言えるか)。

- (3) ケプラーは「惑星の公転周期 T の 2 乗は、軌道半径 D の 3 乗に比例する」ことを観測データより見出した (ケプラーの第 3 法則)。この法則を惑星の円運動の加速度の大きさ a と軌道半径 D の関係として表現し直せ。

- (4) ケプラーの第 3 法則は、ニュートンの運動の 3 法則および万有引力からの帰結の一つであり、地球を回る月や人工衛星などにも適用できる。ケプラーの第 3 法則および (2) の結果を用いて、①地球の自転の周期と同じ公転周期を持つ人工衛星 (静止衛星) の軌道半径、②公転周期が 28 日の月の軌道半径が、それぞれ地球の半径 R の何倍か計算せよ。



ニュートン「世界の体系」より。図中記号は、問題文と関係ありません。