

平成23年度夏学期 力学B

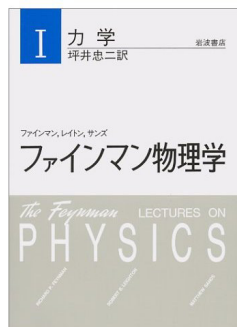
担当：鳥井 寿夫

<http://maildbs.c.u-tokyo.ac.jp/~torii/lectures/MC/index.htm>

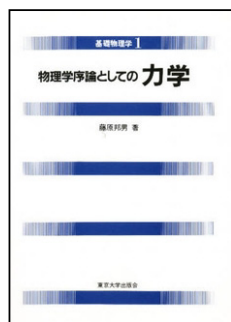
もしくは

<http://physics.c.u-tokyo.ac.jp/> からリンクをたどる

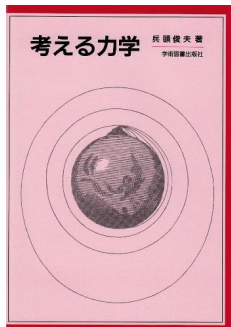
参考書



- 「**ファイマン物理学I 力学**」(岩波書店)



- **藤原邦夫著「物理学序論としての力学」**
(東京大学出版会)

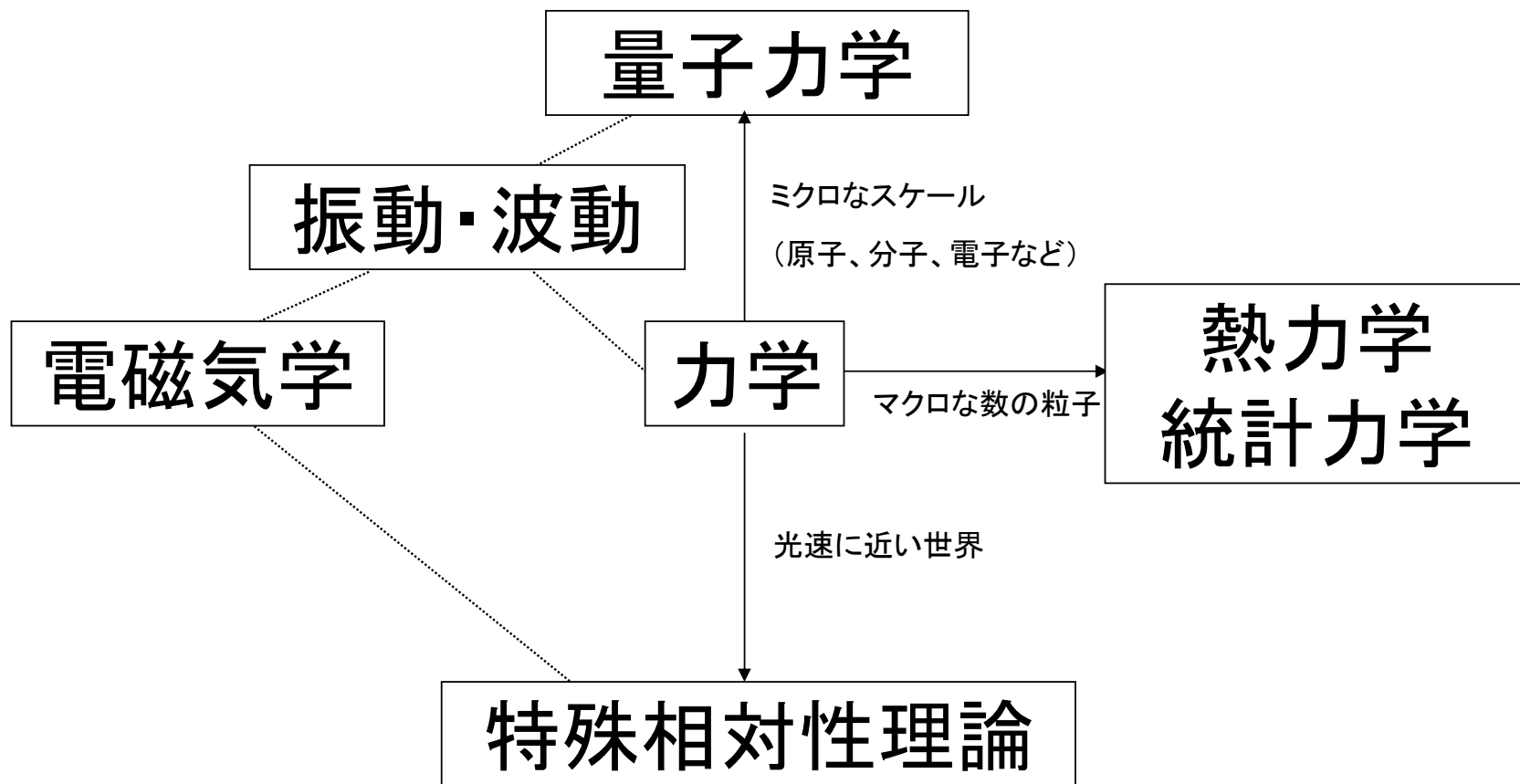


- **兵頭俊夫著「考える力学」**(学術図書出版)

物理学とは

- 自然界に見られる現象の法則性を実験または観測で見出し、数学を用いて記述する。
- 物理法則は、その正しさが**測定の不確かさの範囲で検証**される(**証明はされない**)。実験物理学者は、物理法則の**適用範囲**を日々実験によって**拡張**している。
- 既存の物理法則で説明できない実験結果、観測結果が得られた場合、それを説明する理論を理論物理学者が提唱する。

力学と他の物理科目との関係



古典物理学の形成

- 1543 コペルニクスの地動説
- 1604 落体の法則(ガリレオ)
- 1619 ケプラーの法則
- 1620頃 慣性の法則(デカルト)
- 1687 ニュートンの運動の3法則、万有引力の法則
- 1785 クーロンの法則
- 1820 アンペールの法則
- 1831 ファラデーの電磁誘導の法則
- 1864 マクスウェル方程式
- 1897 電子の発見(トムソン)
- 1905 特殊相対性理論(アインシュタイン)

古典物理(～1905)の全て

表 18-1 古典物理

マクスウェル方程式

- I. $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (閉曲面を通る電束) = (内部の電荷)/ ϵ_0
- II. $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (ループをめぐる \mathbf{E} の線積分) = $-\frac{d}{dt}$ (ループを通る \mathbf{B} の流束)
- III. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (閉曲面を通る \mathbf{B} の流束) = 0
- IV. $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ c^2 (ループをめぐる \mathbf{B} の積分) = (ループを通る電流)/ ϵ_0
 $+ \frac{d}{dt}$ (ループを通る電束)

電荷の保存

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \left[\text{閉曲面を通る電流の流束} = -\frac{d}{dt}(\text{内部の電荷}) \right]$$

力の法則

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

運動の法則

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}) = \mathbf{F}, \quad \text{ただし } \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (\text{アインシュタインの修正によるニュートンの法則})$$

万有引力

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r$$

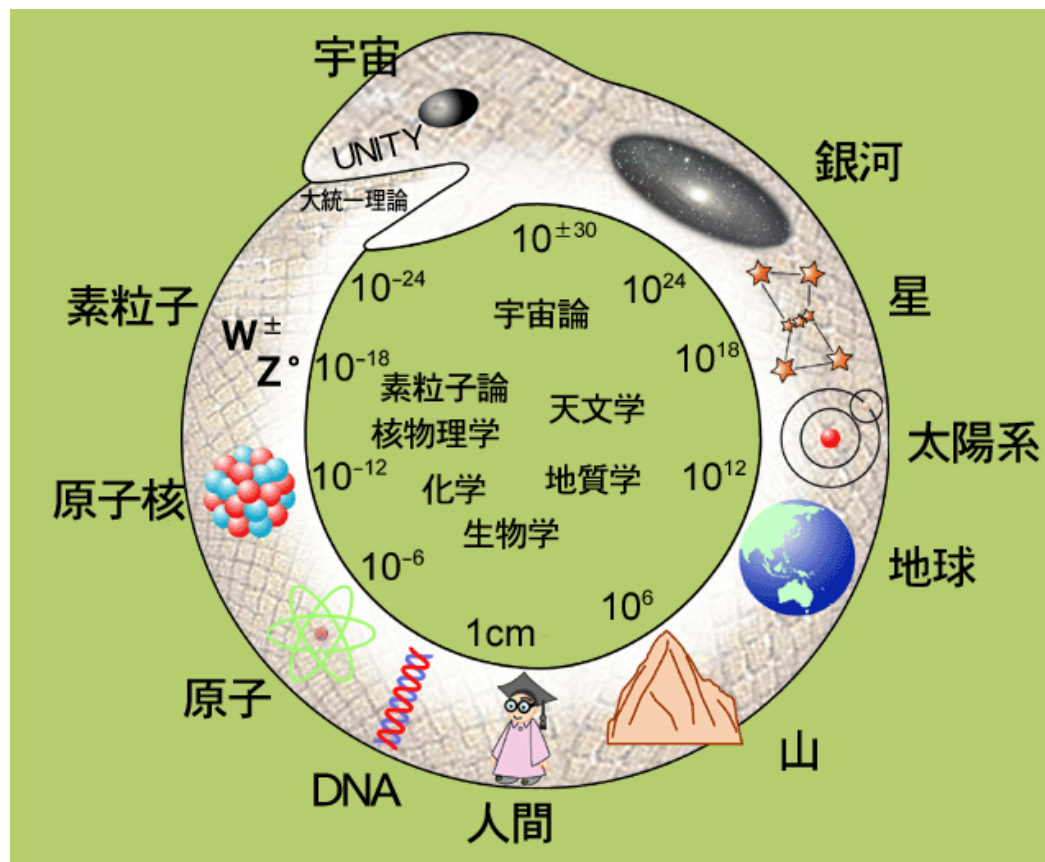
力学Bはこれだけ

Powers of Ten (1977)



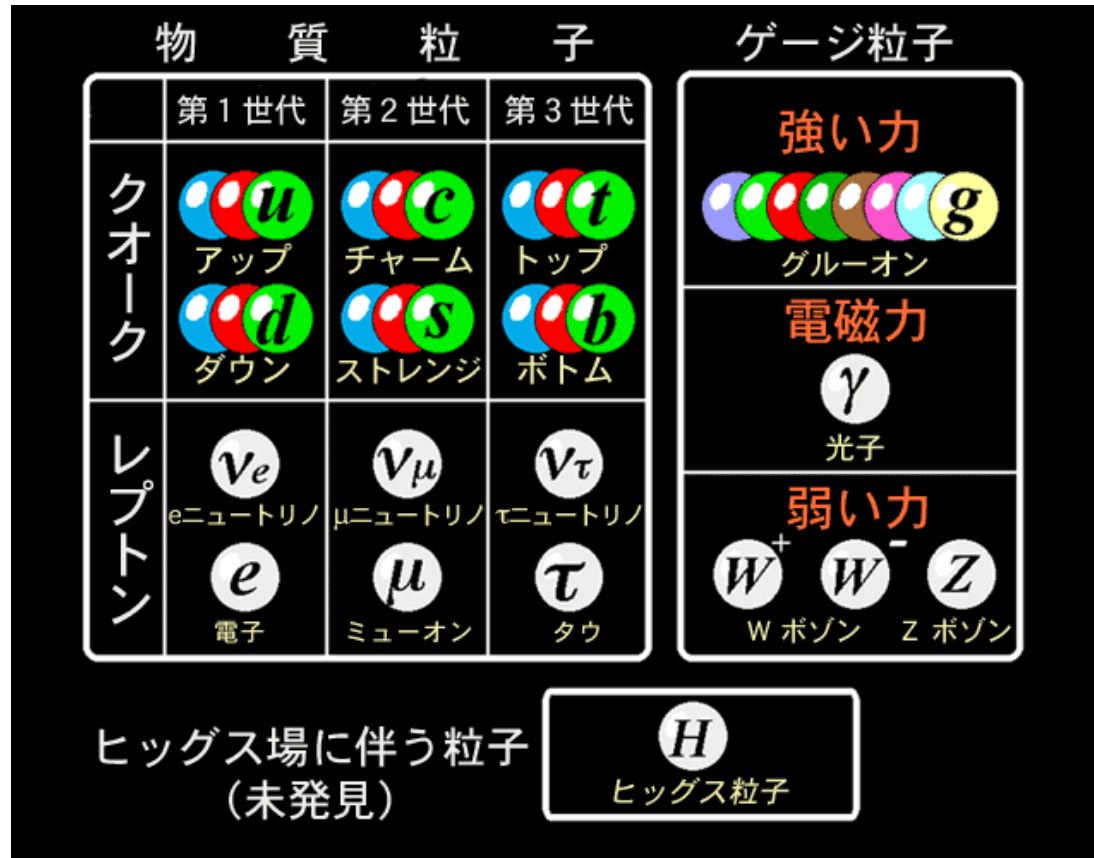
<http://www.powersof10.com/film>

ウロボロスの蛇

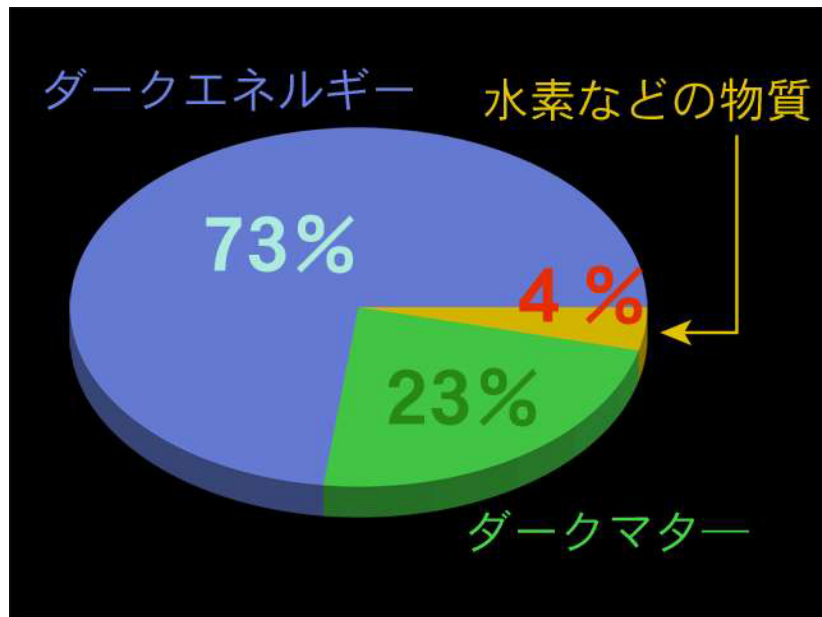


<http://www.kek.jp/newskek/2006/novdec/Satointerview.html>

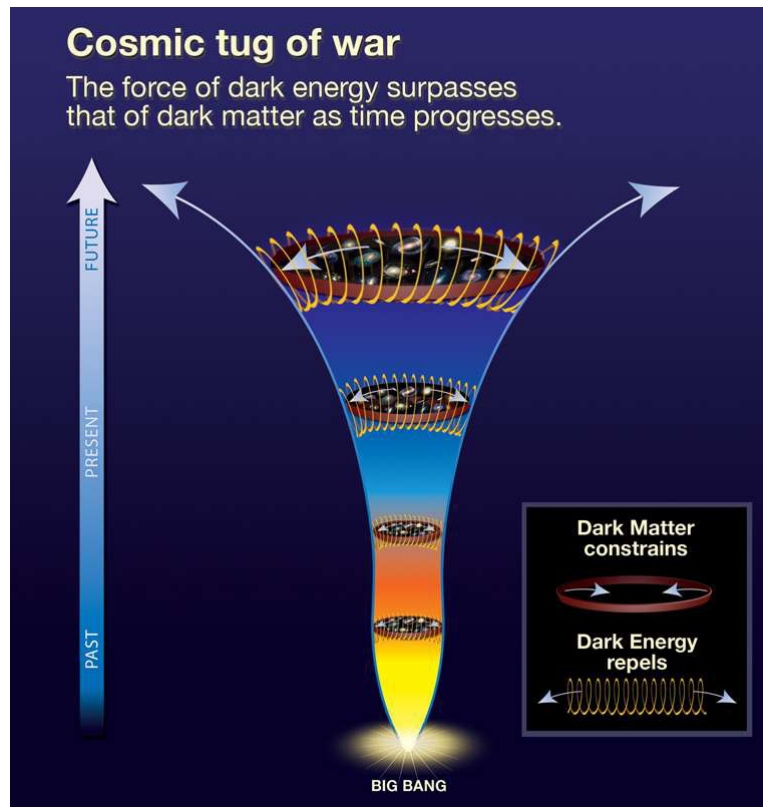
素粒子の標準理論



ダークマター・ダークエネルギー



<http://www.kek.jp/newskek/2010/mayjun/darkmatter.html>



<http://www.space.com/1272-greatest-mysteries-rest-universe.html>

第0章

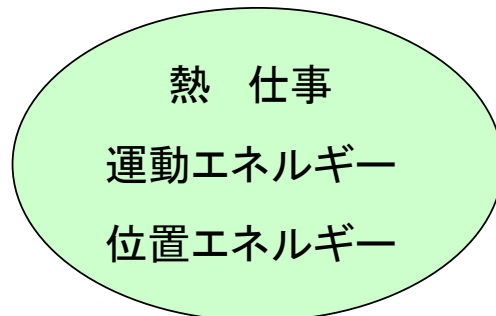
单位系

物理量の次元と単位

- 物理量 (physical quantity) : 測定によって定量化される量
- 単位 (unit) : 各物理量の基準となる大きさ
- 次元 (dimension) : 物理量の質的違いを表す概念
(足すことに意味がある物理量は同じ次元を持つ)
この授業では、物理量Aの次元を[A]と表す。

(例)

エネルギーの次元を持つ物理量



エネルギーの単位



国際単位系 (SI) (基本単位)

	物理量	単位の名称	記号	
基 本 単 位	長さ	メートル	m	} MKSA 単位系
	質量	キログラム	kg	
	時間	秒	s	
	電流	アンペア	A	
単 位	温度	ケルビン	K	
	物理量	モル	mol	
	光度	カンデラ	cd	
補助 単位	平面角	ラジアン	rad	
	立体角	ステラジアン	sr	

* その他の単位は、上の基本単位の乗除のみで表現できる(組立単位)


国際単位系 (SI) (組立単位)

	物理量	記号	単位の名称	SI基本単位による表現
組 立 単 位	周波数 (1/ 時間)	Hz	ヘルツ	s^{-1}
	力 (質量 × 加速度)	N	ニュートン	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
	圧力 (力/ 面積)	Pa	パスカル	$N/m^2 = m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
	エネルギー (力 × 距離)	J	ジュール	$N \cdot m = m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
	仕事率 (仕事/ 時間)	W	ワット	$J/s = m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
	電気 (電流 × 時間)	C	クーロン	$A \cdot s$
	電圧 (エネルギー/ 電気量)	V	ボルト	$J/C = m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
静電容量	F	ファラッド	$C/V = m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$	

長さの単位

1mは、光が真空中を $1/299792458$ 秒間に進む距離
(1905年にアインシュタインが提唱した光速不変の
原理を信じ、光速は 299792458 m/sであると定義)

レーザー



真空中の光速は $299,792,458$ m/s (定義)

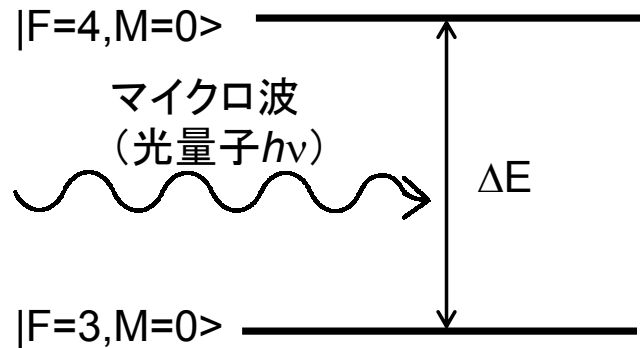
時間の単位（セシウム原子時計）

1sは、 ^{133}Cs の基底状態の二つの超微細構造準位 ($F=4, M=0$ および $F=3, M=0$)の間のマイクロ波遷移に対応する放射の9,192,631,770周期の継続時間



米国立標準技術研究所が開発した超小型原子時計の心臓部 (2004年9月2日朝日新聞より)

< ^{133}Cs , 6S軌道のエネルギー準位>



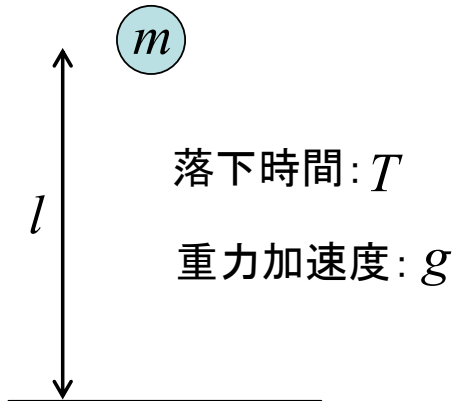
マイクロ波がCs原子と共鳴 ($\Delta E = h\nu$) しているときの周波数を9,192,631,770Hzと定義

質量の単位

1kgは、キログラム原器(直径、高さとも39mmの円柱形で、白金90%、イリジウム10%の合金)の質量



次元解析 (dimensional analysis)



$$[T] = T,$$

$$[m] = M$$

$$[l] = L$$

$$[g] = LT^{-2}$$

$$T = C m^{\alpha} l^{\beta} g^{\gamma} \text{ と置いてみる}$$

↑
係数(無次元)

両辺の次元は等しいはずなので

$$[T] = [m]^{\alpha} [l]^{\beta} [g]^{\gamma}$$

故に、

$$T = M^{\alpha} L^{\beta} \left(\frac{L}{T^2} \right)^{\gamma} = M^{\alpha} L^{\beta+\gamma} T^{-2\gamma}$$

したがって、

$$\alpha = 0, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = -\frac{1}{2}$$

巨大なプリンはなぜ壊れやすいか？



<http://www.youtube.com/watch?v=YGyPaZ3DHm8>

ガリレイ「新科学対話」(1638)より

人間が作るにしても、自然が作るにしても、建造物の大きさを無闇な寸法に増すことの不可能なことが容易に分かります。ですから小さなものと同じ寸法で大きな船や宮殿あるいは寺院を造ることは不可能なのです。そんなことをすれば、樫や帆桁、鉄釘、その他の各部分がばらばらになってしまいます。また、自然も並外れた大きな樹を作ることはできません。もし、そんなことをすれば、幹は自分の重さで折れてしまうでしょう。また、人間、馬、その他の動物の骨格も、もし背の高さを法外に高くすれば、それらが互いにもちこたえて世間並みの働きのできるように作り上げるわけには行かないでしょう。なぜならば、この背丈の増大は、ただ普通より固くて丈夫な材料を使用するか、あるいは骨を太くするかでなければ不可能で、その結果動物の恰好や容貌は化け物を思わせるほど、形を変えるでしょうから。

ガリレオ・ガリレイ「新科学対話」岩波文庫(訳:今野武雄・日田節次)

単位の換算 (unit conversion)

$$1 \text{ cal} = 4.18 \text{ J} \rightarrow \begin{cases} \frac{4.18 \text{ J}}{1 \text{ cal}} = 1 \text{ (無次元)} \\ \frac{1 \text{ cal}}{4.18 \text{ J}} = 1 \text{ (無次元)} \end{cases}$$

$$100 \text{ cal} = 100 \text{ cal} \times 1 = 100 \cancel{\text{ cal}} \times \frac{4.18 \text{ J}}{\cancel{1 \text{ cal}}} = 100 \times 4.18 \text{ J} = 418 \text{ J}$$

$$100 \text{ J} = 100 \text{ J} \times 1 = 100 \cancel{\text{ J}} \times \frac{1 \text{ cal}}{\cancel{4.18 \text{ J}}} = \frac{100}{4.18} \text{ cal} = 23.9 \text{ cal}$$

(例題) km/時 → m/s もしくは m/s → km/時 の換算係数は？

グラフ、単位、不確かさ、有効数字

- グラフ軸の3要素
(物理量、単位、目盛)

基礎物理定数

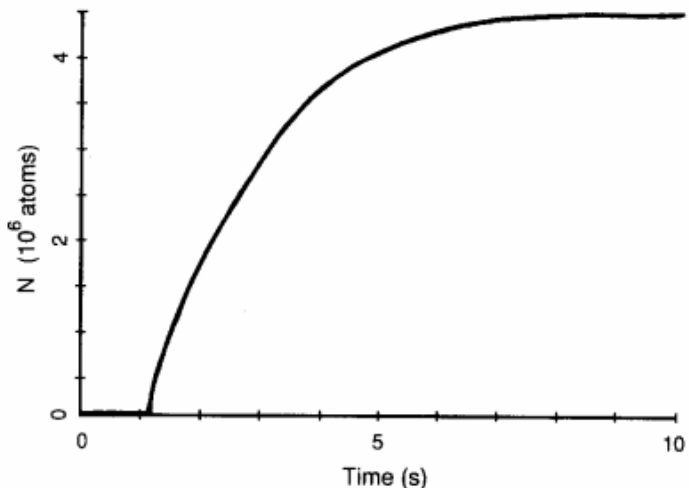


Fig. 7. Number of trapped atoms versus time after the trap is turned on at 1.2 s.

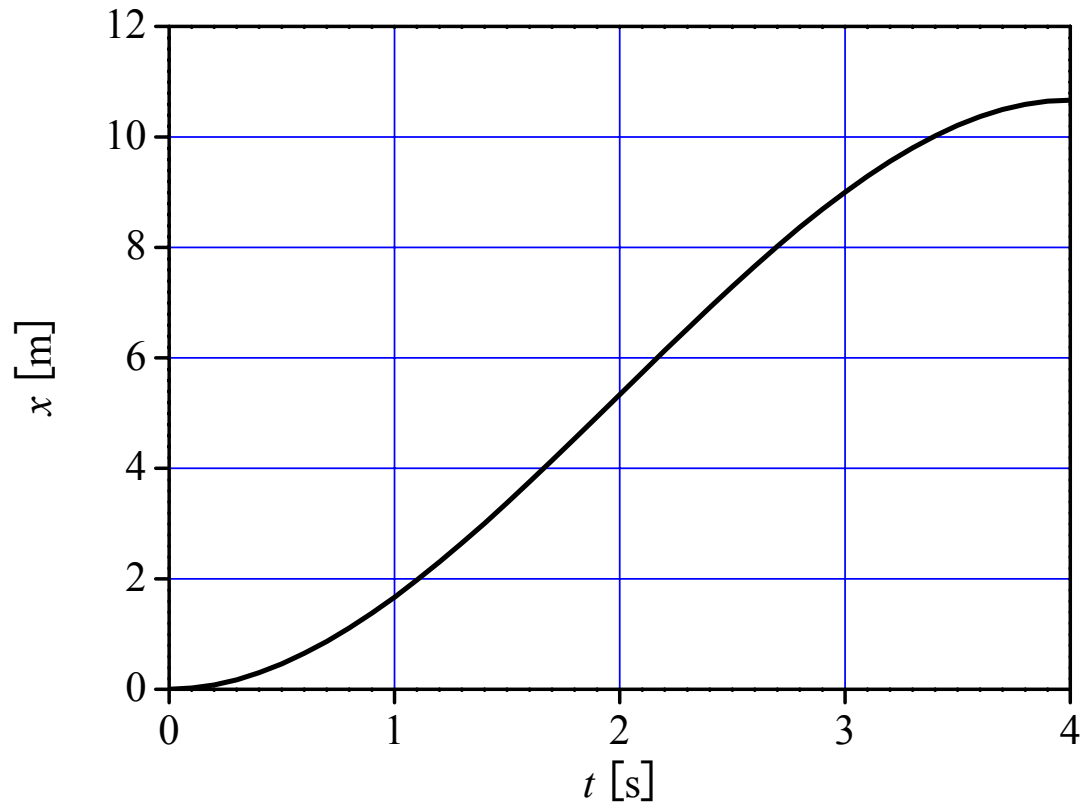
Table 1: Fundamental Physical Constants (1998 CODATA recommended values)

Speed of Light	c	$2.997\,924\,58 \times 10^8$ m/s (exact)
Permeability of Vacuum	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ N/A ² (exact)
Permittivity of Vacuum	ϵ_0	$(\mu_0 c^2)^{-1}$ (exact) $= 8.854\,187\,817 \dots \times 10^{-12}$ F/m
Planck's Constant	h	$6.626\,068\,76(52) \times 10^{-34}$ J·s $4.135\,667\,27(16) \times 10^{-15}$ eV·s
	\hbar	$1.054\,571\,596(82) \times 10^{-34}$ J·s $6.582\,118\,89(26) \times 10^{-16}$ eV·s
Elementary Charge	e	$1.602\,176\,462(63) \times 10^{-19}$ C
Bohr Magneton	μ_B	$9.274\,008\,99(37) \times 10^{-24}$ J/T $h \cdot 1.399\,624\,624(56)$ MHz/G
Atomic Mass Unit	u	$1.660\,538\,73(13) \times 10^{-27}$ kg
Electron Mass	m_e	$5.485\,799\,110(12) \times 10^{-4}$ u $9.109\,381\,88(72) \times 10^{-31}$ kg
Bohr Radius	a_0	$0.529\,177\,208\,3(19) \times 10^{-10}$ m
Boltzmann's Constant	k_B	$1.380\,650\,3(24) \times 10^{-23}$ J/K

第1章

位置·速度·加速度

x-tグラフより速度と加速度を求める



ファイマン物理学I 力学 8章 運動

(中略)

さて、我々の話は軌道に乗ったようである。話はこうである。車の女の人が $\frac{1}{1000}$ 時間走りつづければ、60 マイルの $\frac{1}{1000}$ だけ進むはずである。いいかえれば1時間走りつづけるということはいらない；問題は、ある瞬間にこのスピードで走っていたというのは、何のことかということなのである。これの意味は、彼女が時間的にもうちょっと走ったら、その間に走る距離は、1時間に60マイルの一定のスピードで走る車の距離と同じであるということである。

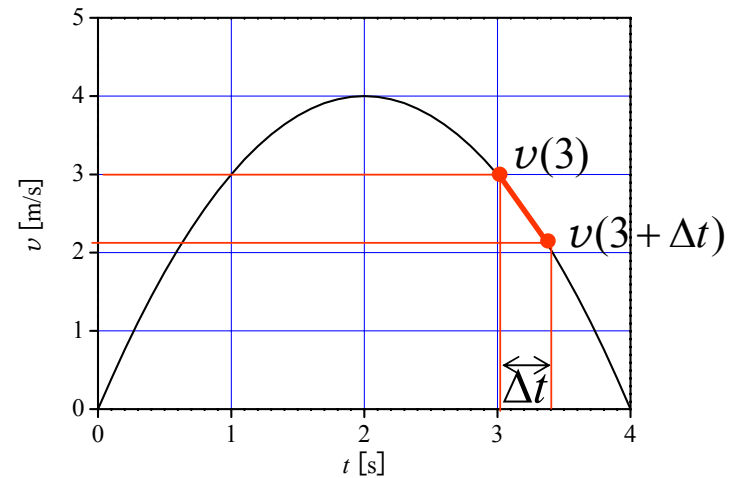
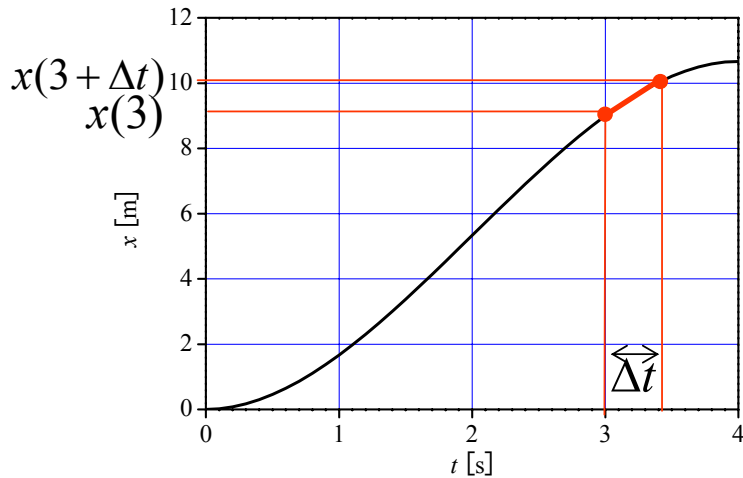
(中略)

上の定義の中には、一般的の形でギリシャ人にはなかった新しい考えが入っている。それは微小な距離とそれに対応する微小な時間を考えてその比をつくり、時間を短く短く短くしたら、この比がどうなるかをみるということである。いいかえれば、進んだ距離をそれに要した時間で割って、時間が無限に短く短くなったときの極限を求めるのである。この考えは、ニュートンとライプニッツとによって独立に出されたものであって、微分学という数学の新分野のはじまりである。微分学は運動を記述するために発明されたものであって、その第一の応用は、“時速60マイル”で走るというのはどういう意味かということ定義する問題であった。

……女の人の運転する自動車は白バイにつかまった。巡査が彼女のところへやってきて、こう言う。「奥さんは時速六〇マイルで走っていましたね！」彼女は言う。「そんなはずはありませんよ。まだ七分間しか走っていないのですよ。おかしいですね——まだ一時間も走らないのに一時間六〇マイル走れるはずはないじゃありませんか？」もしも諸君が警官だったら何と答えるか？……我々はこう言う。「奥さん、我々が言うのはこういう意味なのです。あなたがいままでどおりに走りつづけていたら、次の一時間に六〇マイル行くだろうということなのです。」彼女は言う。「さあ、私はアクセルを踏んでいませんでした。車のスピードはだんだん落ちていました。ですからいままでどおりに走りつづけても、六〇マイル行くはずはありません。」……さっきの女の人はこうも言える。「いままでどおりに一時間走ったら、街のつきあたりの塀にぶつかってしまいますよ！」我々が意味するところを説明するのは、そんなにやさしいことではないのである。

『ファイマン物理学I 力学』坪井忠二訳より

微分を用いた速度と加速度の定義 (直線上の運動の場合)



$$v(3) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(3 + \Delta t) - x(3)}{\Delta t} \equiv \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=3}$$

$$a(3) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(3 + \Delta t) - v(3)}{\Delta t} \equiv \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=3}$$

一般に

$$v(t) = \frac{dx}{dt} (\equiv \dot{x})$$

一般に

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} (\equiv \ddot{x})$$

加速度の比較

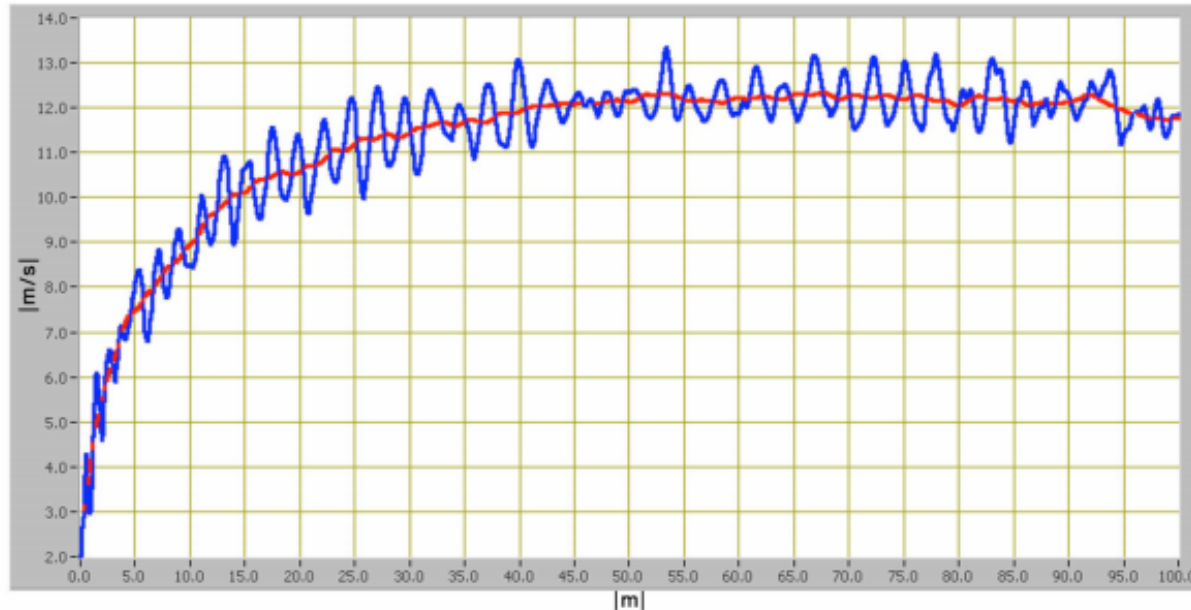
- 0.006 m/s^2 人に感じられる最小の揺れ
- 0.7 m/s^2 新幹線N700系
- 1.6 m/s^2 月面の重力加速度
- $4 \sim 5 \text{ m/s}^2$ 人間(100m走のスタート時)の加速度
- $9.8 \text{ m/s}^2 = 1\text{G}$ 地球上の重力加速度(平均値)
- $3 \sim 6\text{G}$ ロールコースターの最高加速度
- 10G 戦闘機における加速度限界
- 46.2G 人間が耐えることのできた加速度限界
- 116000G シリウスB(白色矮星)の重力加速度

人間の最高加速度は？

Biomechanical analysis

12th IAAF World Championships in Athletics • Berlin, 15.-23.08.2009

100m men final: Usain BOLT (JAM) 9,58s - WR



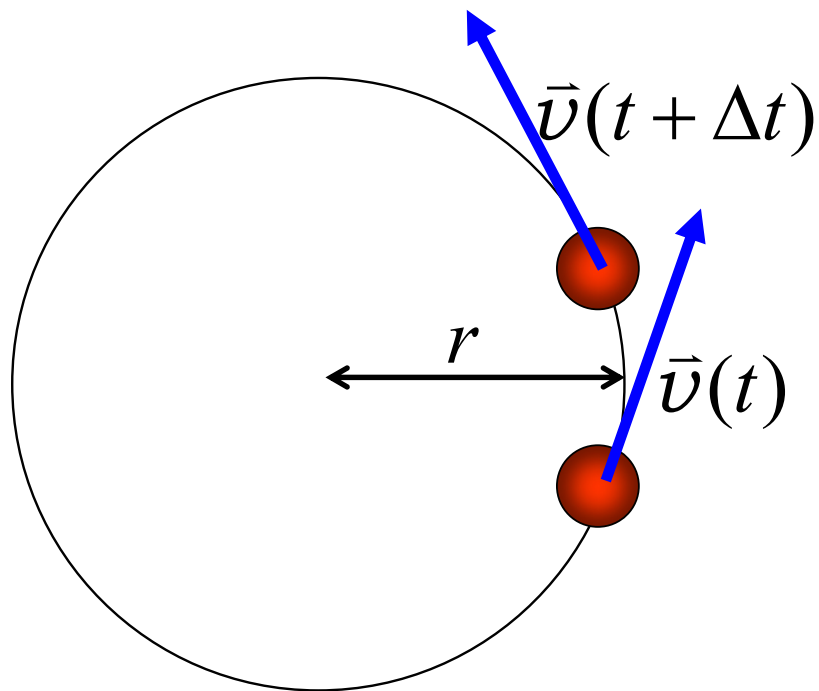
Race distribution: LAVEG measurement curve (blue) and average speed (red)

Split times [s]

	Reaction time	t10	t20	t30	t40	t50	t60	t70	t80	t90	t100
Bolt	0,146	1,89	2,88	3,78	4,64	5,47	6,29	7,10	7,92	8,75	9,58
Powell	0,134	1,87	2,90	3,82	4,70	5,55	6,39	7,23	8,08	8,94	9,84

<http://berlin.iaaf.org/news/kind=101/newsid=53084.html>

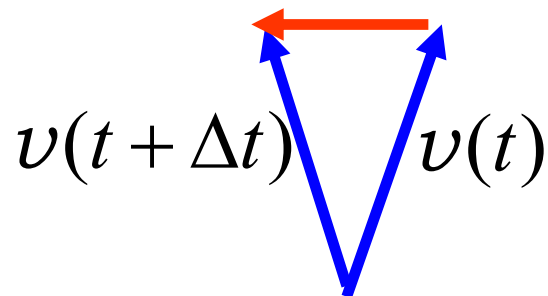
等速円運動における加速度



周波数 $\nu =$

角周波数 $\omega =$

周期 $T =$



$$\vec{a}(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

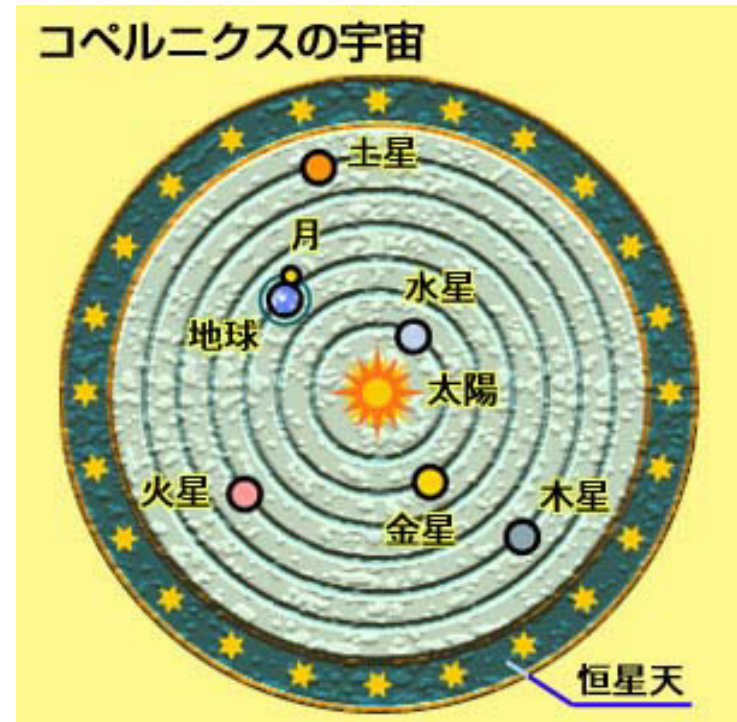
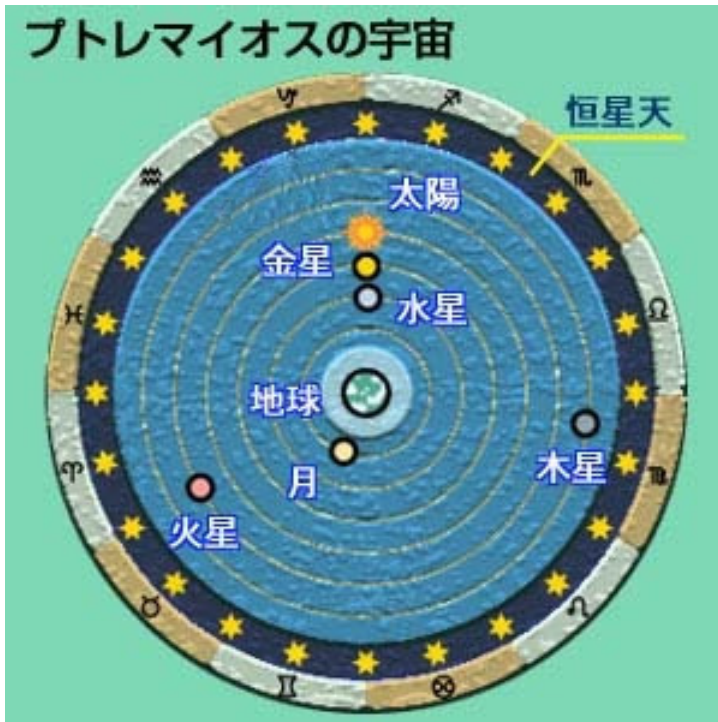
加速度の向き:

加速度の大きさ: $a =$

第2章

運動の法則と 万有引力

天動説と地動説



http://spaceinfo.jaxa.jp/ja/universe_ancient.html

http://spaceinfo.jaxa.jp/ja/movingheavens_movingearth.html

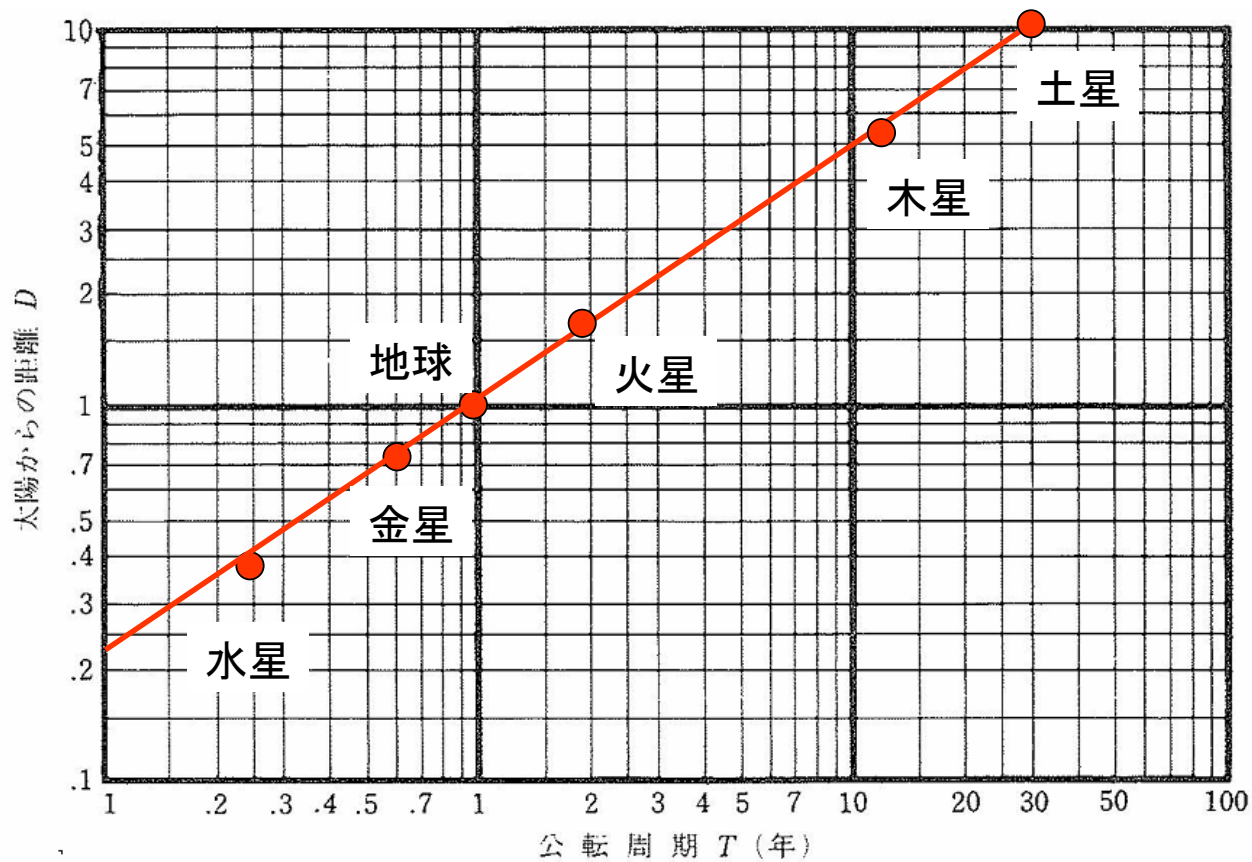
コペルニクス(1473-1543)の求めた惑星の公転周期と太陽からの平均距離

表 1.2 コペルニクスの求めた太陽系に関する諸数値と現在の数値との比較

		公 転 周 期 T		太陽からの平均距離 D (地球のそれを単位とする)	
		コペルニクス	現 在	コペルニクス	現 在
水	星	88 日	88.01 日	0.36	0.387
金	星	225 日	224.60 日	0.72	0.723
地	球	$365\frac{1}{4}$ 日	365.24 日	1.0	1.000
火	星	687 日	686.94 日	1.5	1.524
木	星	12 年	11.86 年	5	5.203
土	星	30 年	29.46 年	9	9.539

藤原邦男「物理学序論としての力学」p.9より

公転周期 T と太陽からの距離 D の関係



ケプラーの法則

(ケプラー「宇宙の調和」(1619))

- 第1法則(楕円軌道の法則)
 - 惑星は、太陽をひとつの焦点とする楕円軌道上を動く。
- 第2法則(面積速度一定の法則)
 - 惑星と太陽とを結ぶ線分が単位時間に描く面積は、一定である。
- 第3法則(調和の法則)
 - 惑星の公転周期の2乗は、軌道の平均距離の3乗に比例する。

ハレー彗星(76年周期)

前回の回帰は1986年。次回は2061年(50年後)



http://www.astroarts.jp/hoshinavi/magazine/mcnaught_memorial/image/1986.jpg



<http://www.ne.jp/asahi/nakaegaw/piz/kit/kt007.html>

ケプラーの第2法則と中心力

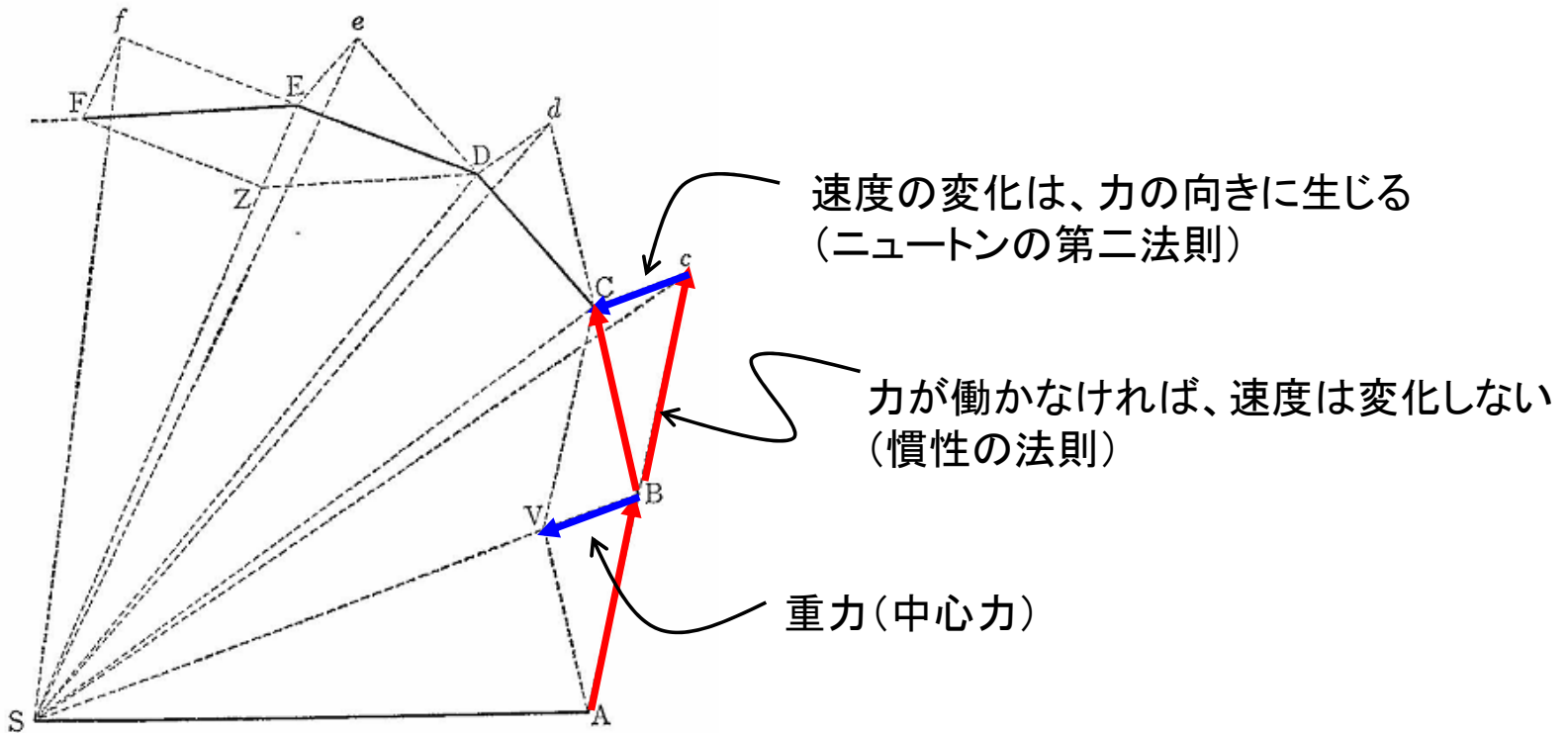


図 12

ケプラーの第3法則と逆2乗則

惑星の円運動の加速度

$$a = \omega^2 D = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 D \propto \frac{D}{T^2}$$

ケプラーの第3法則

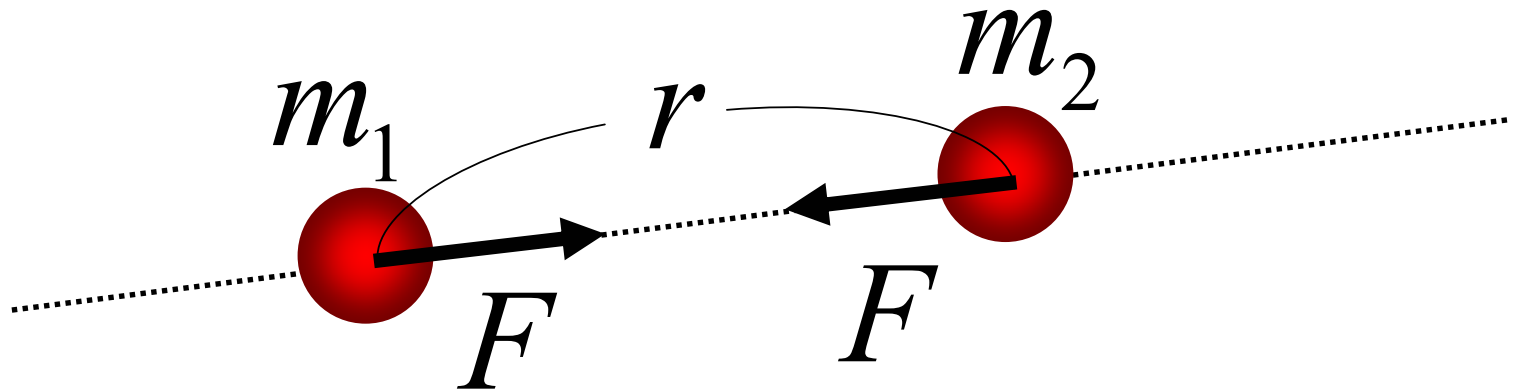
$$T^2 \propto D^3$$

以上より

$$a \propto \frac{D}{T^2} \propto \frac{1}{D^2}$$

惑星の円運動の加速度は、惑星の太陽からの距離の自乗に反比例している(ケプラーの第3法則の言い換え)

万有引力の法則 (ニュートン「プリンキピア」(1687))



$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

物体間に働く引力は、互いを結んだ線に平行で、その大きさは互いの距離の2乗に反比例し、それぞれの質量の積に比例する。

運動の3法則

(ニュートン「プリンキピア」(1687))

- 第1法則(慣性の法則)

すべての質点は、それに加えられた力によってその状態が変化させられない限り、静止または一直線上の等速運動の状態を続ける

- 第2法則(運動の法則)

質点の運動量(=質量×速度)の変化は、加えられた力の方向に沿って起り、かつ、微小時間内における運動量の単位時間あたりの変化は、加えられた力に等しい

- 第3法則(作用・反作用の法則)

すべての作用に対して、等しく、かつ反対向きの反作用が常に存在する。すなわち、互いに働きあう質点の相互作用は常に相等しく、かつ反対方向へと向かう。

ニュートンの運動方程式(第2法則)

運動量(質量×速度)の単位時間あたりの変化とは

$$\frac{d(mv)}{dt} = m \frac{dv}{dt} = ma \quad \left(a \equiv \frac{dv}{dt} \right)$$

これが、物体に加えられている力に等しいとするのが第二法則

$$F = ma$$

この式は、力の単位を定義していると考えられる。
1kgの物体に1m/s²の加速度を生じさせる力を1N(ニュートン)と定義する。1N=1kg m/s²

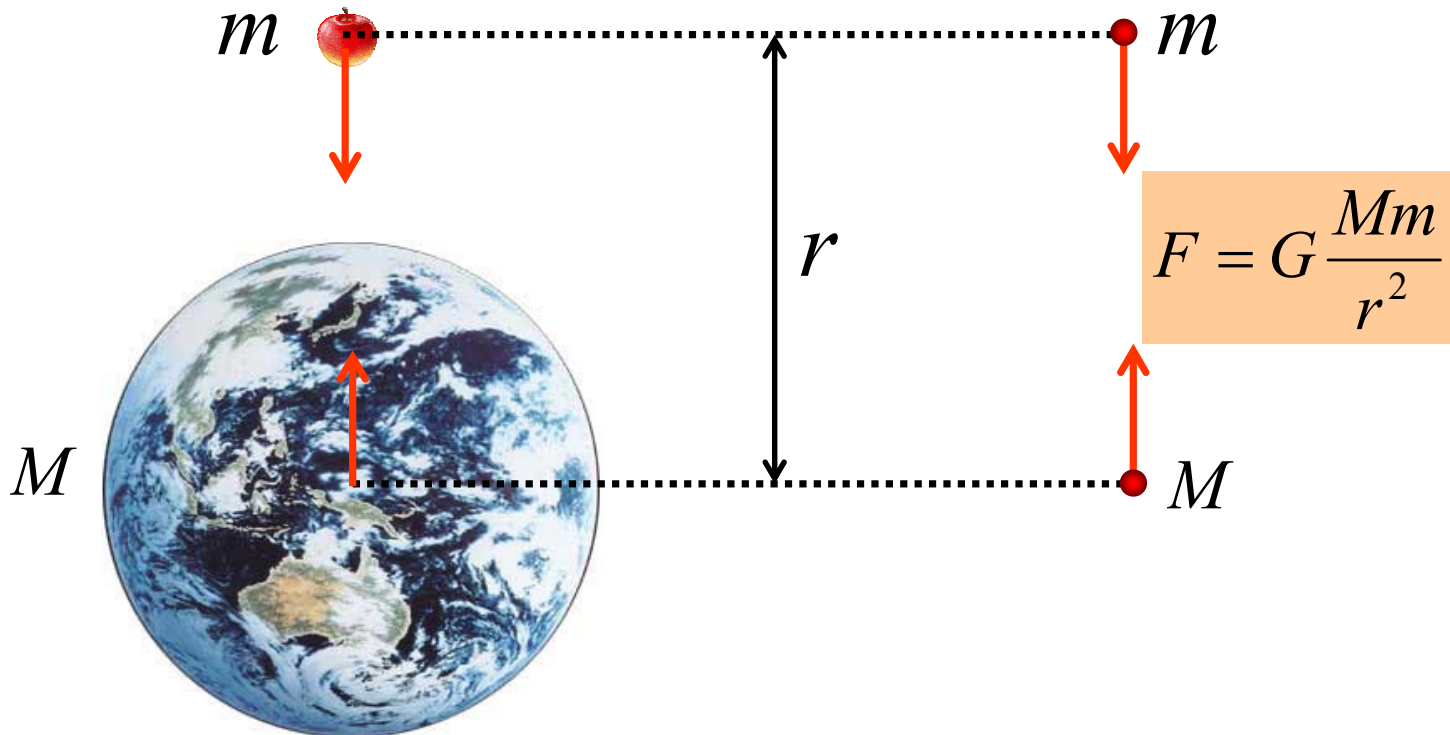
(例題) 質量が1kgの物体に働く重力は何N(ニュートン)か？

(答え) 手を離すと9.8m/s²で落下するので、 $F = 1 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 = 9.8 \text{ N} = 1 \text{ kgf}(\text{kgw})$

大きさのある物体からの重力

りんごと地球(大きさあり)

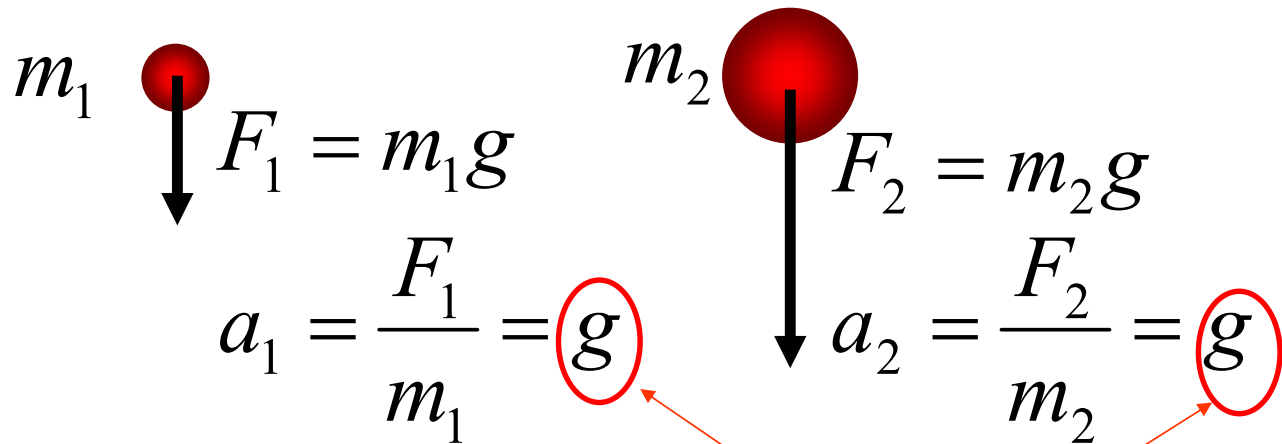
質点(大きさなし)



(定理) 大きさのある物体間に働く重力は、物体の密度分布が球対称ならば全質量が中心に集まった仮想的な質点の間に働く重力に等しい

地球上の物体に働く重力

$$F = G \frac{M_{\oplus} m}{R_{\oplus}^2} = mg \left(g = G \frac{M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \approx 9.8 \text{ m/s}^2 \right)$$



地球

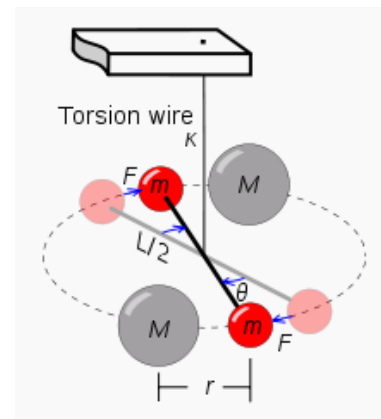
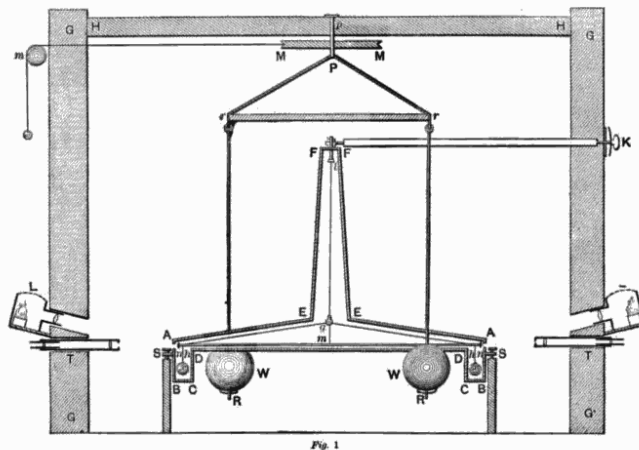
加速度が質量に依らない!

キャベンディッシュの実験(1797)

地球の質量を量る

$$F = G \frac{M_{\oplus} m}{R_{\oplus}^2} = mg \left(g = G \frac{M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \approx 9.8 \text{ m/s}^2 \right)$$

地球の半径Rと重力加速度はわかっているのので、万有引力定数Gがわかれば、地球の質量Mが求められる。



キャベンディッシュの実験結果

地球の比重 = 5.448 ± 0.033
 $(G = 6.74 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1})$

現在知られているデータ

$G = (6.67428 \pm 0.00067) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$
 $M_{\oplus} = (5.97219 \pm 0.00060) \times 10^{24} \text{ kg}$

「慣性質量」と「重力質量」

物体の質量には色々ある(かもしれない)

- 慣性質量: 物体の「動かしにくさ(慣性)」を表す量。加速度は質量に反比例する。

$$F = m_I a \rightarrow a = \frac{F}{m_I}$$

- 重力質量: 他の物体から、その物体に加わる「重力の大きさ」を表す量。重力は質量に比例する

$$F = G \frac{M m_g}{R^2} = m_g g$$

実験事実: 観測される重力加速度は、物質の種類や体積に依存しない→慣性質量と重力質量は比例する

実験結果

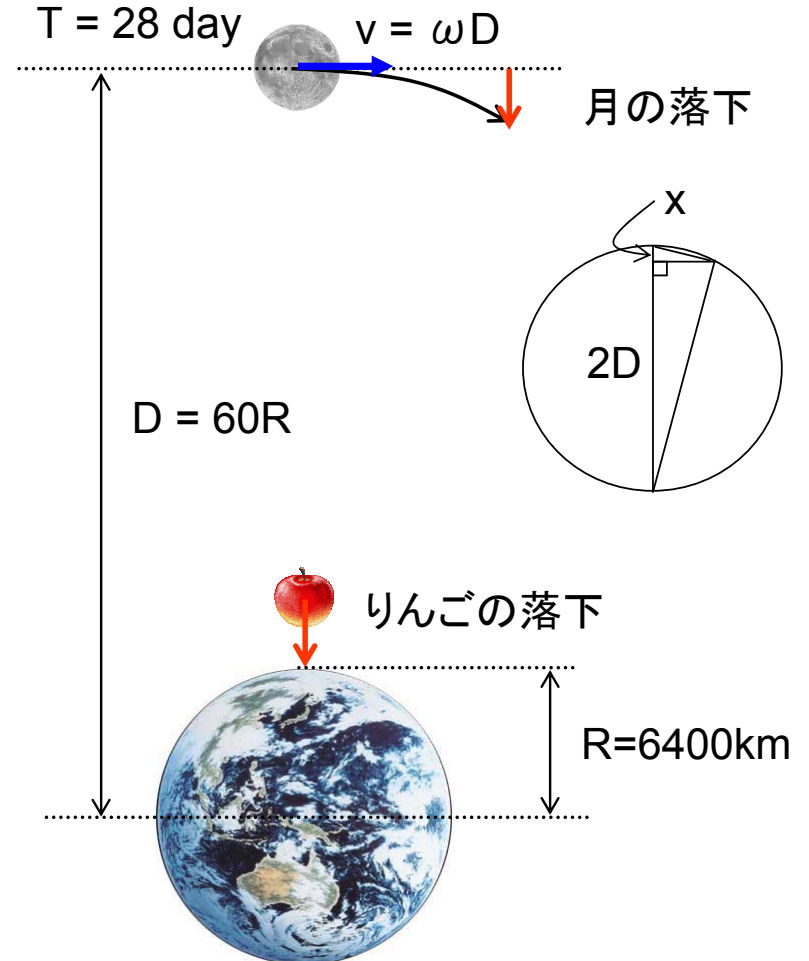
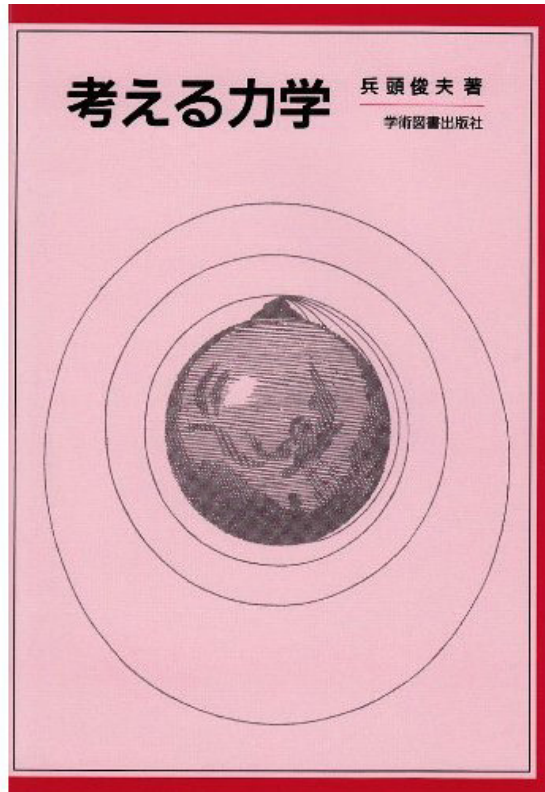
$$a = \frac{F}{m_I} = \frac{m_g}{m_I} g = g?$$

アインシュタインの一般相対性理論では、両者は同一のものとみなす(等価原理)

$$m_g = m_I = m$$

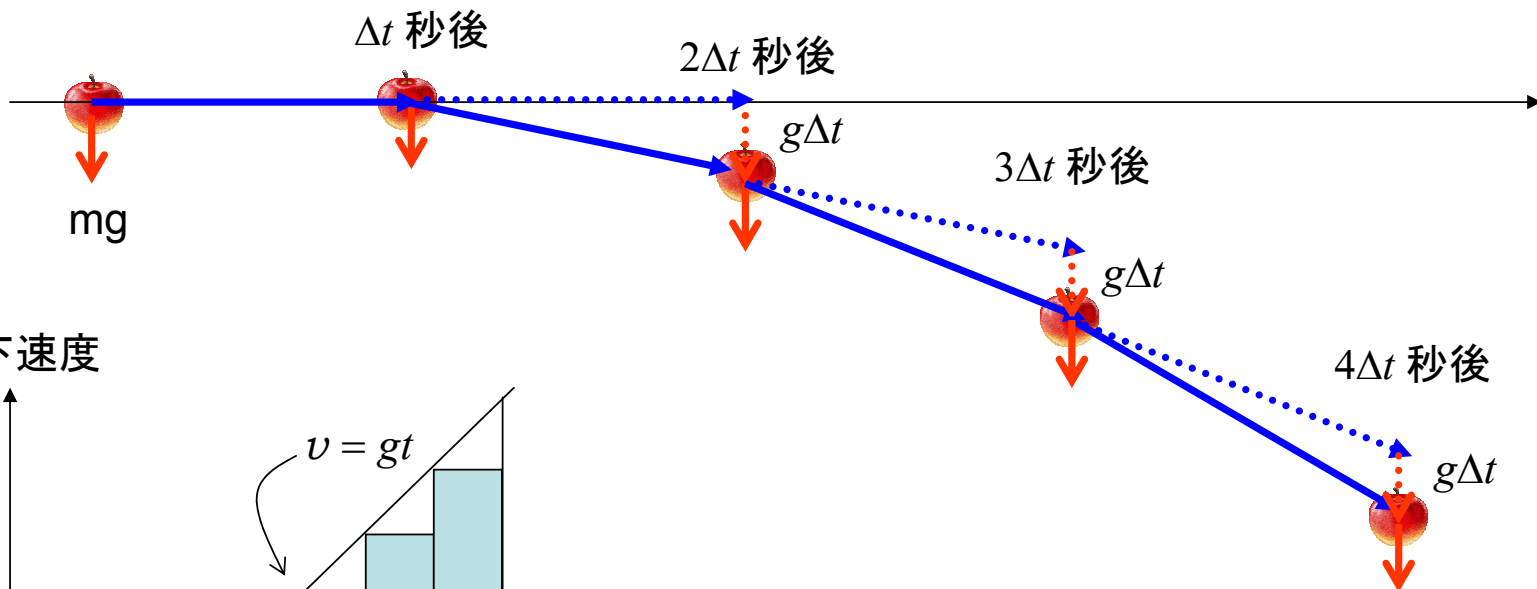
今後、この授業でも両者を区別せずに m と表す。

地上のリンゴと月の落下

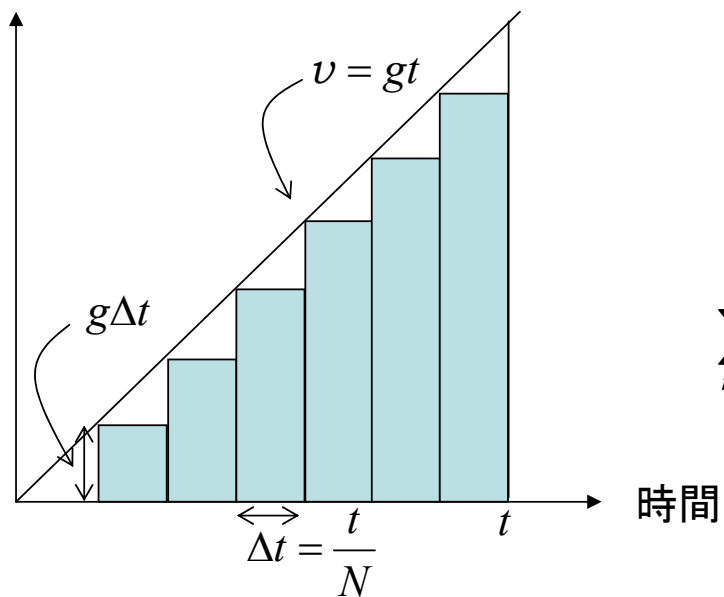


Not to scale(縮尺は合っていない)

撃力近似と積分



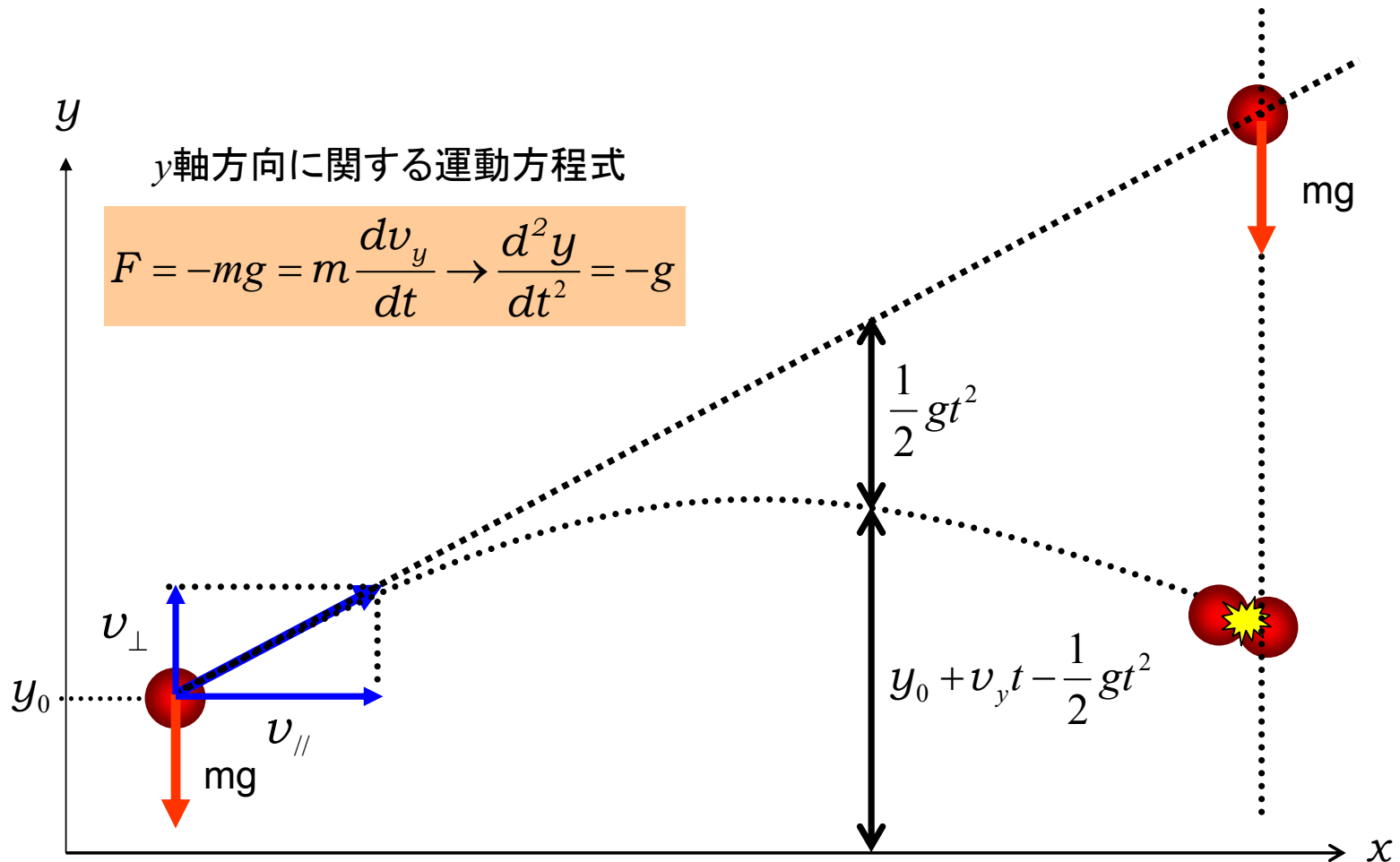
落下速度



$$\sum_{n=1}^N (n-1)g\Delta t \cdot \Delta t = \frac{gt^2}{N^2} \sum_{n=1}^N (n-1) = \frac{1}{2} gt^2 \frac{N(N-1)}{N^2}$$

$N \rightarrow \infty$
 \downarrow
 1

Monkey Hunting



MIT Physics Demo

Monkey and a Gun

**MIT Department of Physics
Technical Services Group**

<http://techtv.mit.edu/videos/735-monkey-and-a-gun>

古典物理(～1905)の全て

表 18-1 古典物理

マクスウェル方程式

- I. $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (閉曲面を通る電束) = (内部の電荷)/ ϵ_0
- II. $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (ループをめぐり \mathbf{E} の線積分) = $-\frac{d}{dt}$ (ループを通る \mathbf{B} の流束)
- III. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (閉曲面を通る \mathbf{B} の流束) = 0
- IV. $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ c^2 (ループをめぐり \mathbf{B} の積分) = (ループを通る電流)/ ϵ_0
+ $\frac{d}{dt}$ (ループを通る電束)

電荷の保存

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \left[\text{閉曲面を通る電流の流束} = -\frac{d}{dt}(\text{内部の電荷}) \right]$$

力の法則

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

運動の法則

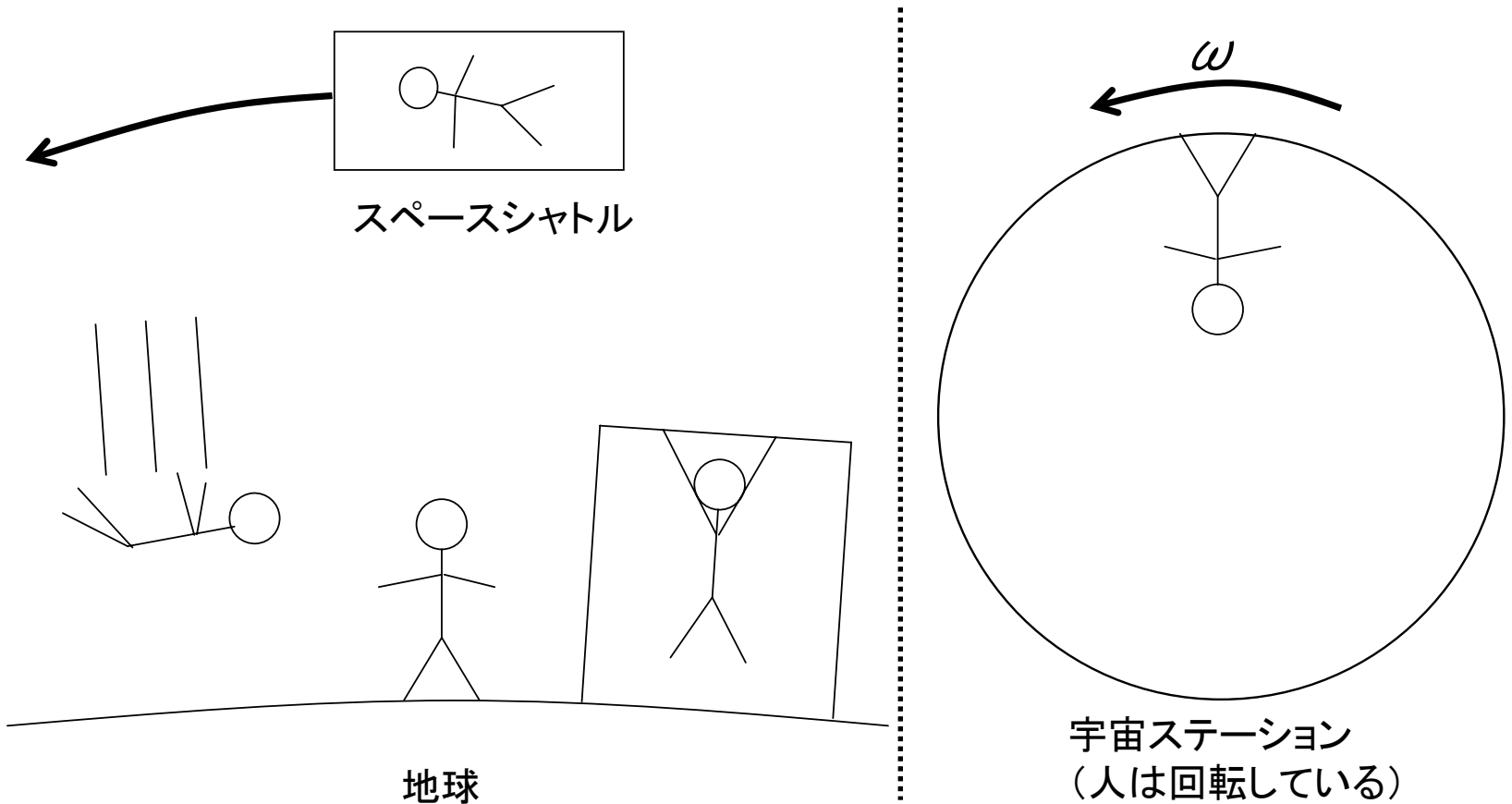
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}) = \mathbf{F}, \quad \text{ただし } \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (\text{アインシュタインの修正によるニュートンの法則})$$

万有引力

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r$$

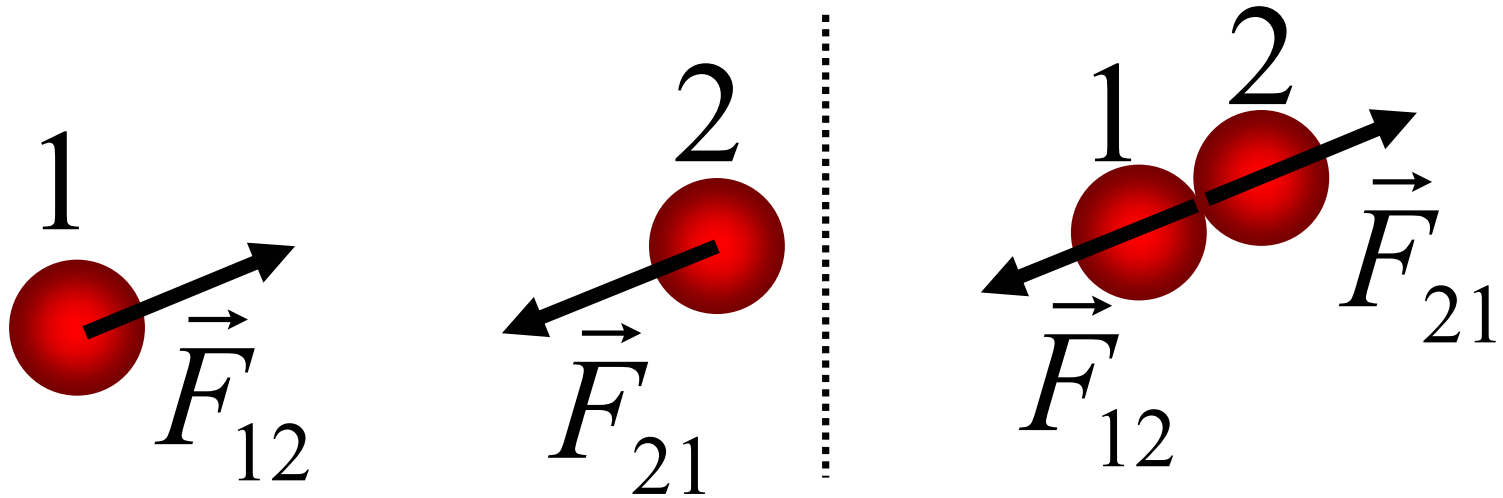
もう勉強した。力学Bはこれでおしまい？

「重さ(weight)」=「重力(gravity)」？ 「無重量」=「無重力」？



Keywords: 力、質量、重力、重さ、慣性力(遠心力)

作用・反作用の法則

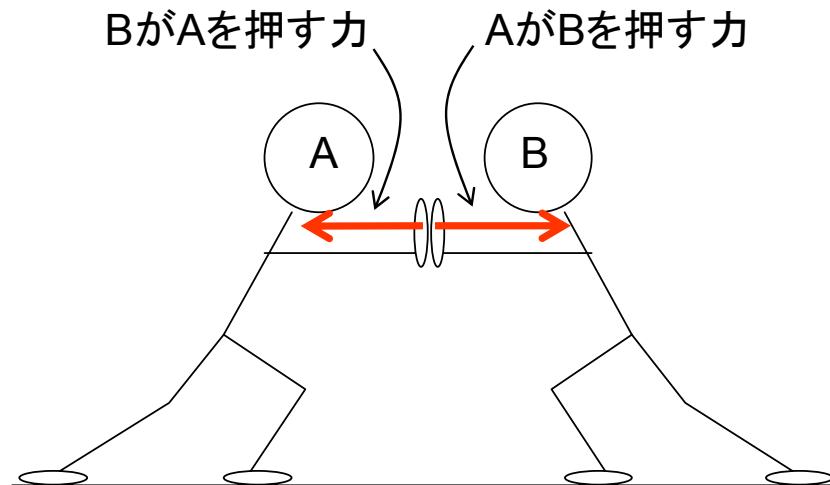
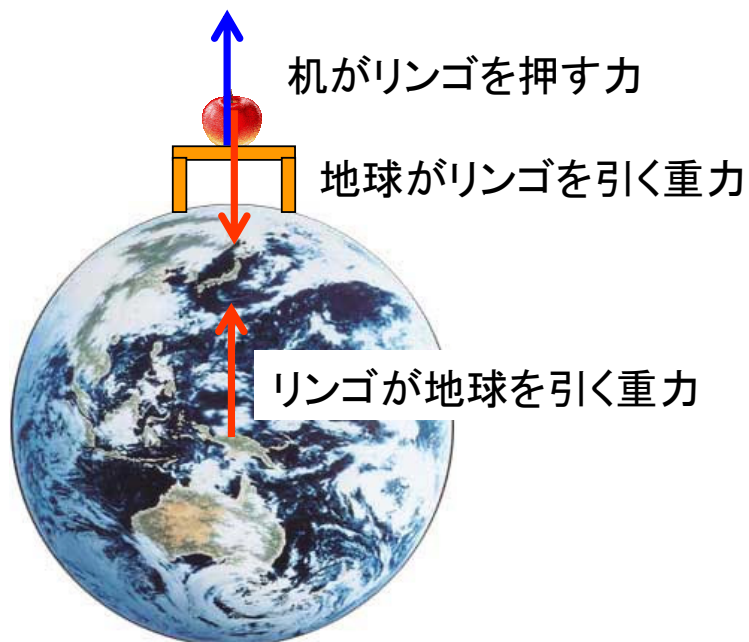


力の大きさは等しく、向きは反対

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

接触しているか否かにかかわらず成立！

作用・反作用の法則 ≠ 力のつりあい



運動量と力積

重たいモノ、速いモノほど止めにくい

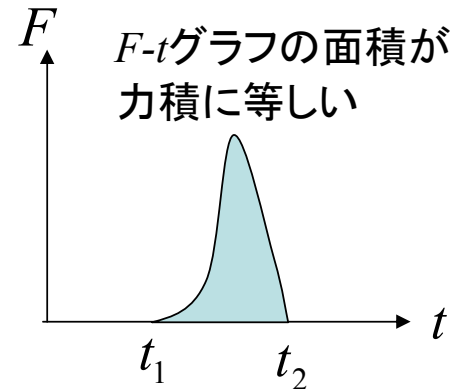
ニュートンの運動方程式

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}(t)}{\Delta t} = \mathbf{F}(t) \Rightarrow d\mathbf{p}(t) = \mathbf{F}(t)dt$$

両辺を積分して

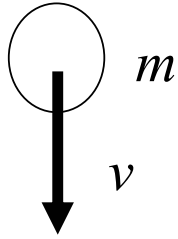
$$\mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)dt$$

「力積」

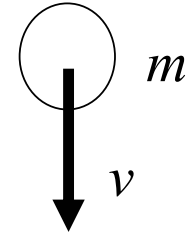


物体の運動量変化は、その物体に与えられた力積に等しい
(運動の第2法則の別表現)

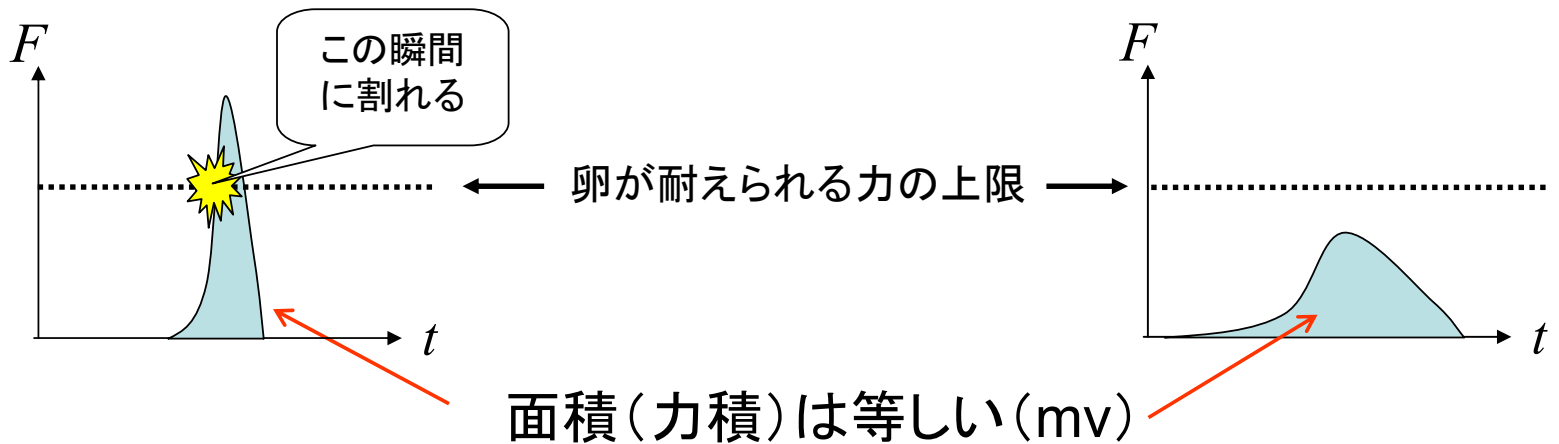
生卵を割らずに受け止めるには



硬い床

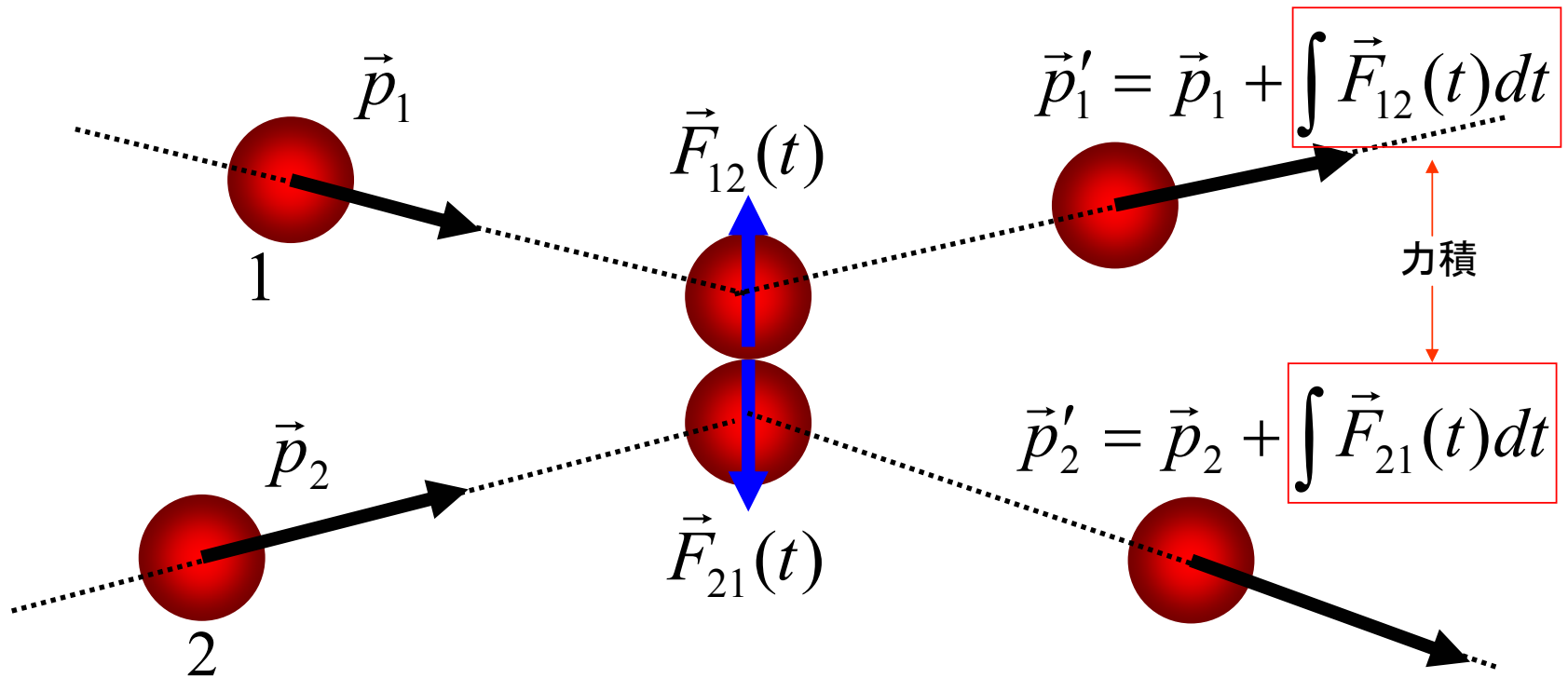


クッション



運動量保存則

(運動の第2、第3法則からの帰結)



$$\vec{F}_{21}(t) = -\vec{F}_{12}(t) \text{ より } \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

相互作用の前後で、運動量の和は保存する！

Newton's Cradle



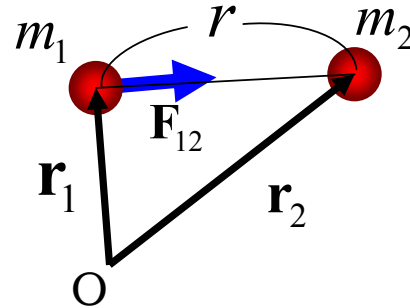
第3章

様々な力

種々の力

万有引力

$$\mathbf{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}$$



電磁気力

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \end{aligned}$$

静電気力、磁力

原子間力、分子間力

弾性力

これらの区別はあいまい
(起源はみな同じ電磁気力)

束縛力

(垂直抗力、張力)

摩擦力

抵抗力(粘性抵抗、慣性抵抗)

弾性力

(物体がその形を維持しようとする力)

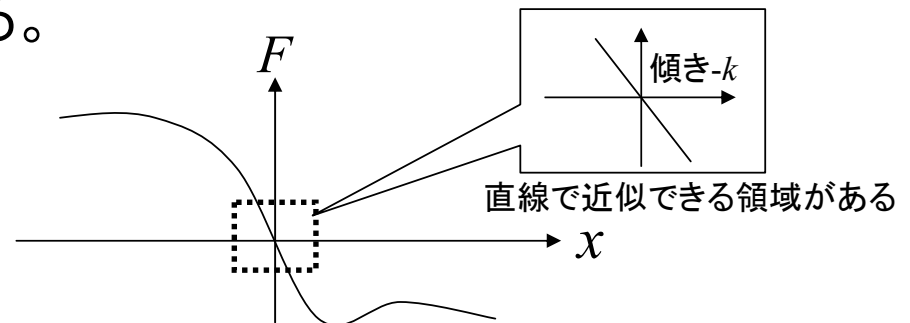


自然長(力が働いてないときの長さ)からの「ずれ」を x とする。この「ずれ」を元に戻そうとする力 F は、 x が十分小さいならば、近似的に x に比例する。

$$F = -kx$$

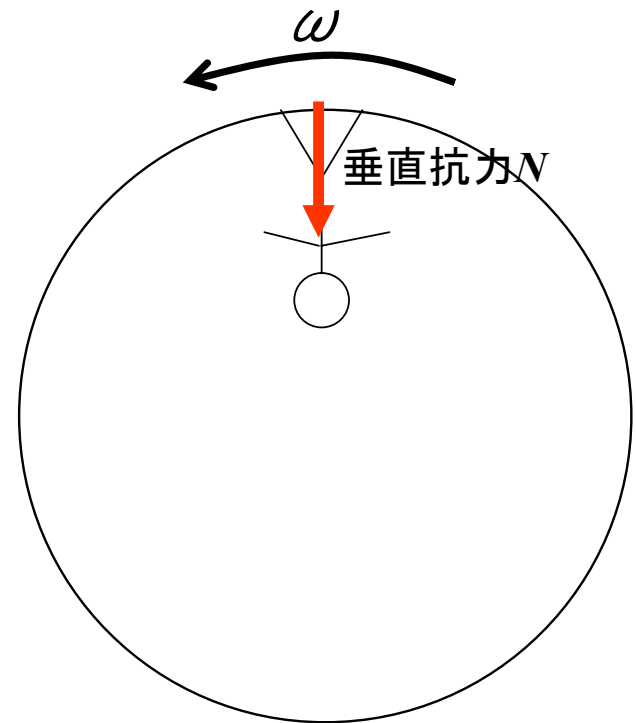
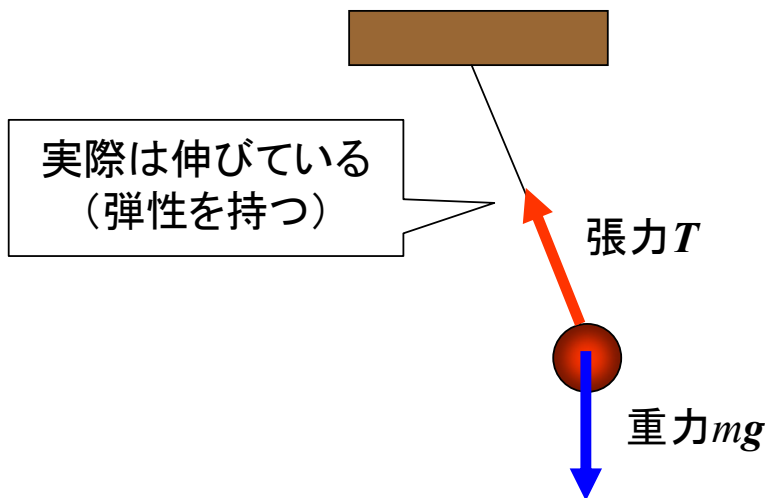
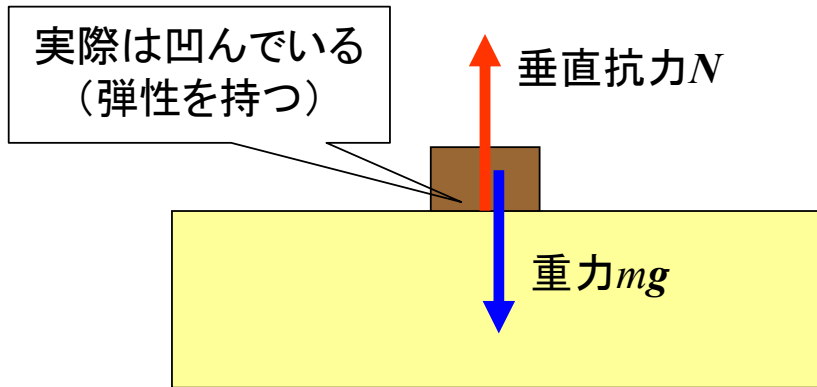
k : ばね定数
(spring constant)

これをフックの法則という(あくまで近似法則)。負号は物質の変位を戻す方向に力が働くことを表現する。



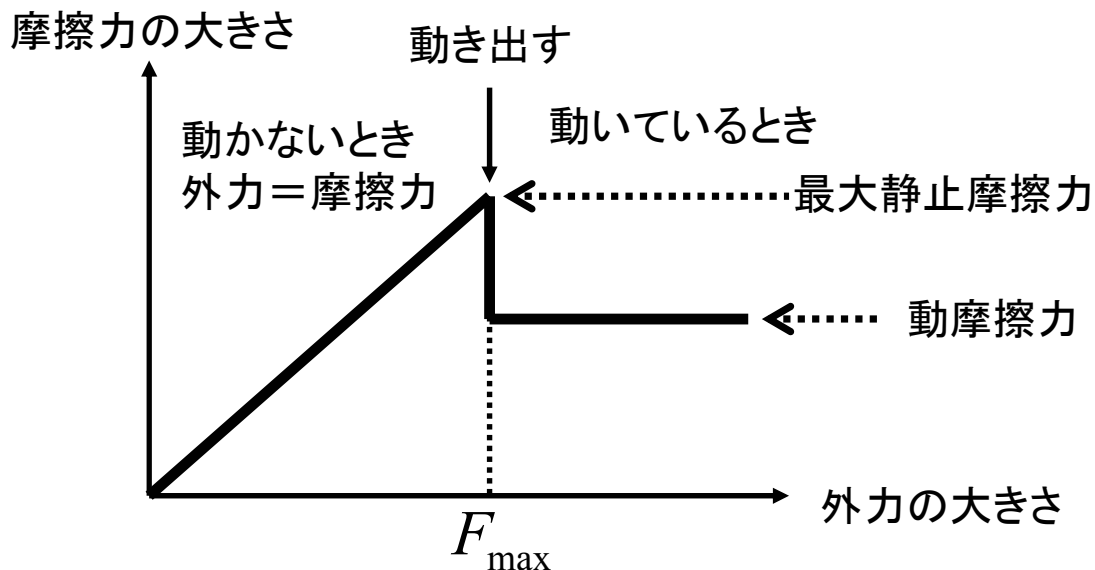
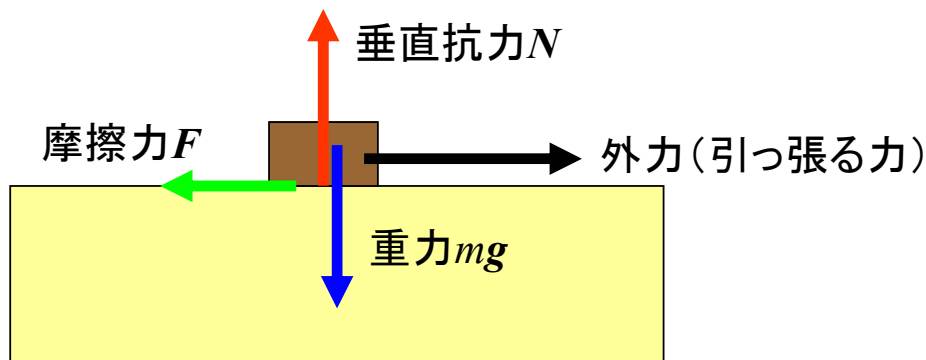
ばねはかりは、フックの法則が成り立つ力の範囲が広いばねを利用して重さを測る道具

束縛力(張力・垂直抗力) (物体の位置を束縛する弾性力)



摩擦力

物質の移動を妨げる分子・原子間力？



静止摩擦係数

$$F_{\max} = \mu N$$

クーロンの第1法則

$$F = \mu' N$$

クーロンの第2法則

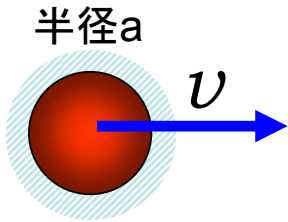
動摩擦係数

$$\mu < \mu'$$

クーロンの第3法則

抵抗力 (粘性抵抗、慣性抵抗)

粘性抵抗: 物体が近傍の流体を引きずることによって受ける反作用

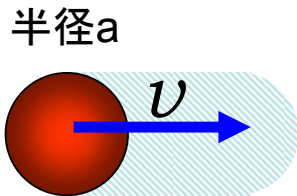


ストークスの法則

$$F_V = 6\pi a \eta v$$

η : 流体の粘性係数

慣性抵抗: 物体が通過する空間にある流体との衝突によって受ける反作用



ニュートンによる経験則

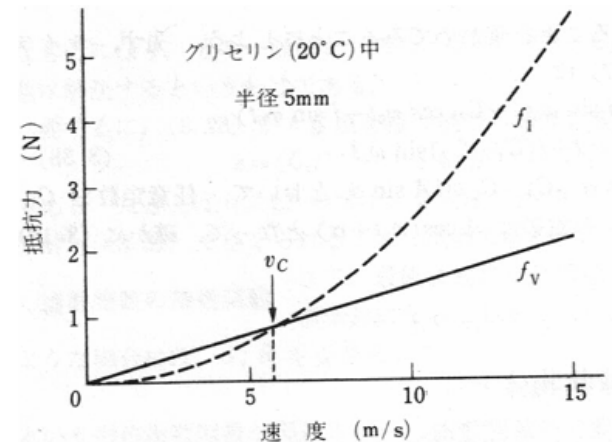
$$F_I = \frac{1}{4} \pi \rho a^2 v^2$$

ρ : 流体の密度

表 3.1 流体の粘性係数と密度 (巻末文献 38 による)

物質	粘性係数 ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$)	密度 (kg/m^3)
空気 (20°C, 1気圧)	1.809×10^{-5}	1.205
空気 (30°C, 1気圧)	1.857×10^{-5}	1.165
水 (20°C)	1.002×10^{-3}	9.982×10^2
グリセリン (20°C)	1.495	1.264×10^3
グリセリン (30°C)	6.22×10^{-1}	—

藤原「物理学序論としての力学」p.49



藤原「物理学序論としての力学」p.50

第4章

運動方程式の解法

定数係数の線形常微分方程式

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{2\text{階}} \\
 a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{1\text{階}} \\
 \left. \begin{array}{l} = 0 \\ \neq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{せいじ} \\ \text{非せいじ} \end{array} \\
 \begin{array}{l} \text{齊次(同次)} \\ \text{非齊次(非同次)} \end{array}
 \end{array}$$

1階齊次方程式

(例) 放射性崩壊、複利の借金(預金)額

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

$$\frac{dN}{dt} = +\alpha N$$

Γ : 1秒間に崩壊する確率 α : 金利 N : 借金(預金)

2階齊次方程式

(例) 単振動、減衰振動

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

復元力

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - kx$$

粘性抵抗

k : ばね定数

2階非齊次方程式

(例) 自由落下、強制振動

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - kx + F_0 \cos \omega t$$

周期的な外力

1 階線形常微分方程式

常微分方程式の解法: 2つの方針

<解の形を予測して代入(発見的手法)>

$$a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

解は微分して同じ関数形になる指数関数で表現されるのではないかな?

$$x(t) = Ae^{\alpha t}$$

うまくいかなければ、定数部分Aも時間の関数としてみよう(定数変化法)

$$x(t) = A(t)e^{\alpha t}$$

力学B(運動方程式)では、こちらの手法でOK

<変数分離して両辺を積分(解析的手法)>

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

$f(t) = 0$ のとき

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x \left(\alpha \equiv \frac{a_1}{a_0} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} dx = \alpha dt$$

両辺を積分して

$$\log x = \alpha t + C$$

$$\therefore x = Ae^{\alpha t} \quad (A = e^C)$$

$a_0 = 0$ のとき

$$\frac{dx}{dt} = g(t) \left(g(t) \equiv \frac{f(t)}{a_0} \right)$$

$$\Leftrightarrow dx = g(t)dt$$

両辺を積分して

$$x = \int g(t)dt + C$$

解ける方程式の形が限られている

放射性元素の崩壊

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

ΓN : 1秒間あたりに崩壊する原子の数
単位はベクレル[Bq]

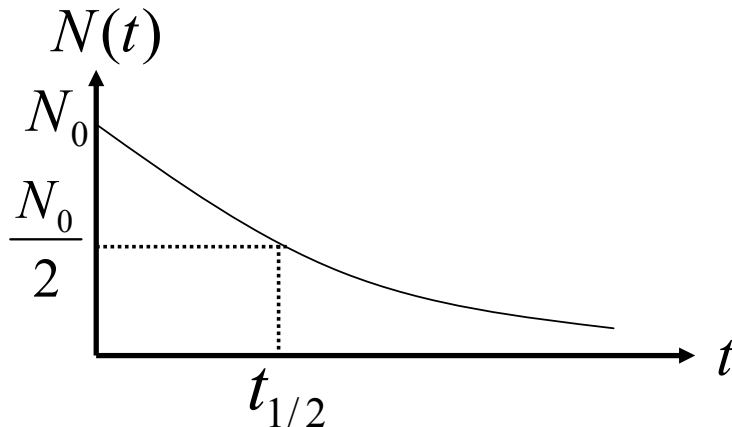
原子1個あたり、1秒間あたりの崩壊確率

初期の原子数を N_0 とすると、

$$N(t) = N_0 e^{-\Gamma t}$$

半減期を $t_{1/2}$ とすると、

$$\Gamma = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{0.693}{t_{1/2}}$$



^{40}K の場合、半減期は12.8億年 $=4.04 \times 10^{16}$ 秒

$$\Gamma = \frac{0.693}{4.04 \times 10^{16} \text{ s}} = 1.72 \times 10^{-17} \text{ s}^{-1}$$

複利で借金してはいけない

■ 500万円を単利 (5%) と複利 (5%) で運用した場合、
どうなるか?

単利

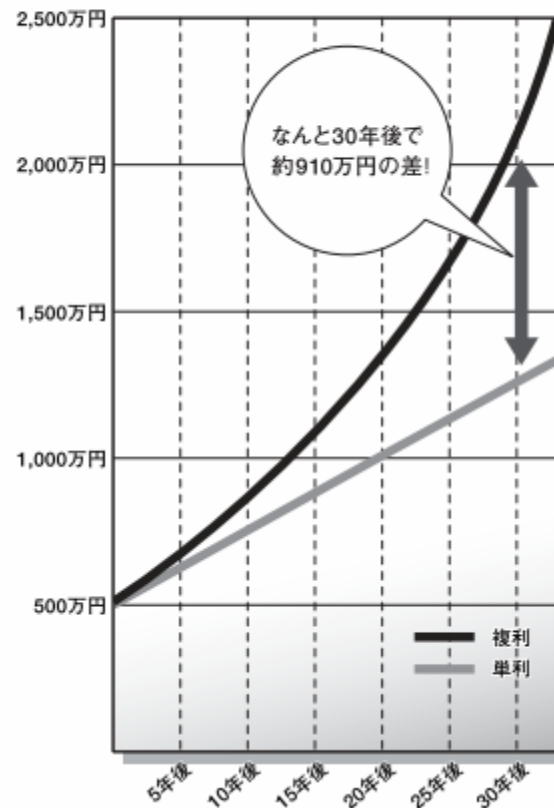
$$\frac{dN}{dt} = +\alpha N_0 \rightarrow N(t) = N_0(1 + \alpha t)$$

初期の借金額

複利

$$\frac{dN}{dt} = +\alpha N \rightarrow N(t) = N_0 e^{\alpha t}$$

その瞬間の借金額 = 初期の借金額 + 累積利息



http://money.monex.co.jp/archives/20070225_2.html

「数学の歴史上、最大の発見は何か?」「それは複利である」(byアインシュタイン)

e の発見、それは複利計算から

1年後に発生する利息が元本の α 倍とすると $N_0 \xrightarrow{1\text{年後}} N_0(1+\alpha)$

利息は毎月発生していると考えると

$$N_0 \xrightarrow{1\text{年後}} N_0 \left(1 + \frac{\alpha}{12}\right)^{12}$$

利息は毎日発生していると考えると

$$N_0 \xrightarrow{1\text{年後}} N_0 \left(1 + \frac{\alpha}{365}\right)^{365}$$

利息は連続的に発生していると考えると

$$N_0 \xrightarrow{1\text{年後}} N_0 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^\alpha = N_0 e^\alpha$$

α	e^α	$(1+\alpha)$
0.1	1.105	1.1
0.5	1.65	1.5
1	2.7	2
2	7.4	3
3	20	4

$$e \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

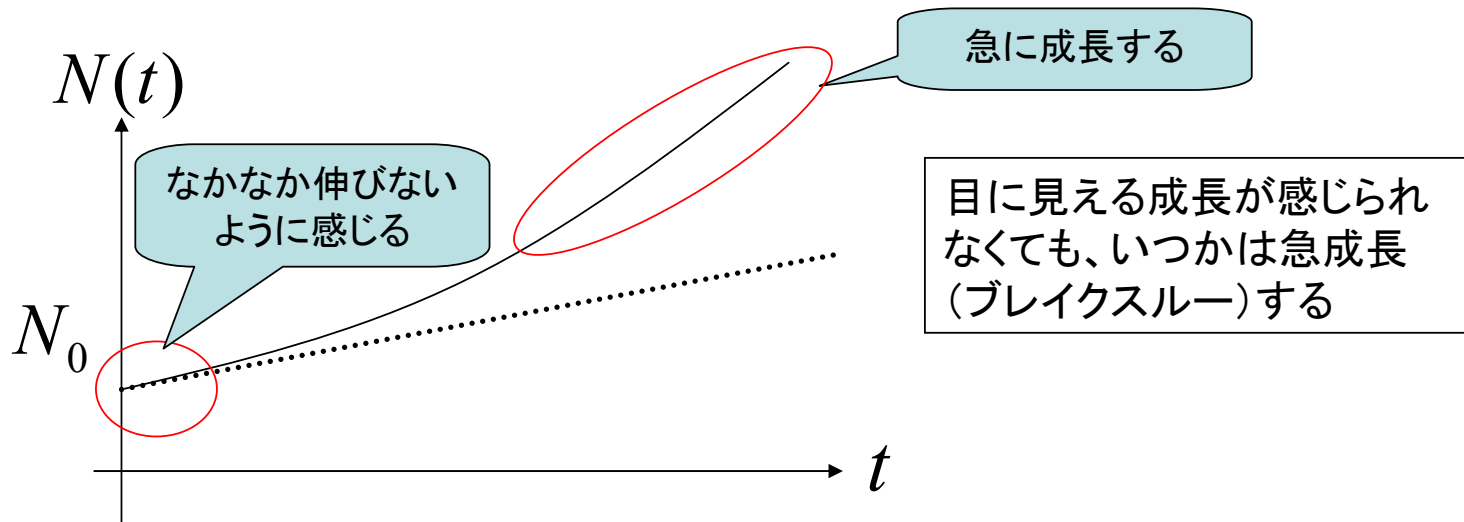
ヤコブ・ベルヌーイ(1683)

人間の知的能力の成長

学習の効率 学習時間

$$dN = \alpha N dt \rightarrow N(t) = N_0 e^{\alpha t}$$

獲得する知能 その時の知能



2階線形常微分方程式

数学的準備① マクローリン展開

無限回微分可能な関数 $f(x)$ が、以下のようにべき級数展開できるとする:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

係数 a_n を求めるには、上式の両辺を n 回微分して、 $x=0$ を代入すればよい

$$\left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^n}{dx^n} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots) \right|_{x=0} = n!a_n$$

よって、

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \left(f^{(n)}(x) \equiv \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right)$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots$$

テイラー展開と近似

$x = a$ を新しい原点とする関数

$$g(x) = f(a + x)$$

を考えて $g(x)$ をマクローリン展開すると

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2!}g''(0)x^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

x は「原点からの差異」を表すので、これを Δx と書き換えて、 g を f で表すと

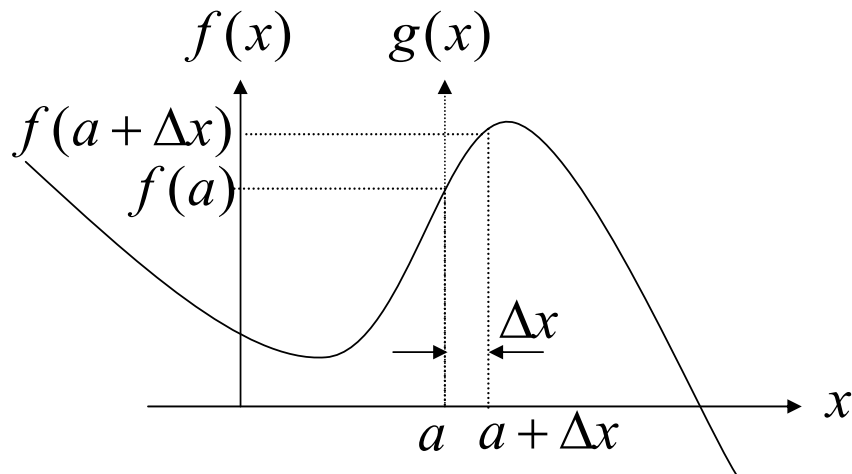
$$f(a + \Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(a)(\Delta x)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(\Delta x)^n + \dots$$

0次近似

1次近似

2次近似

n次近似



指数関数・三角関数のべき級数展開

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

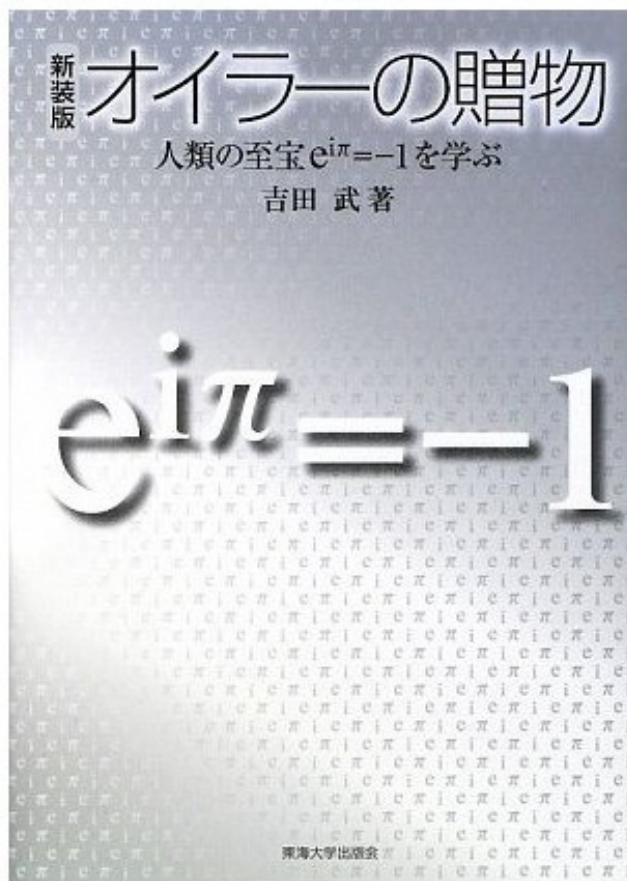
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(ix)^n$$

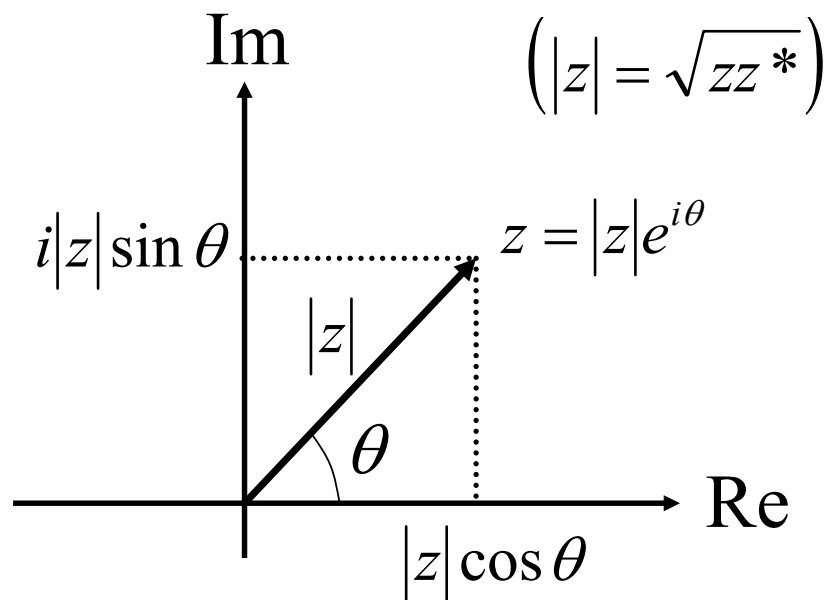
$$= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots\right) + i\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right) = \boxed{\cos x + i \sin x}$$

数学的準備② オイラーの公式



$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|\cos \theta + i|z|\sin \theta$$



指数関数の性質

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}$$

$$\frac{d}{d\theta} e^{i\theta} = i e^{i\theta}$$

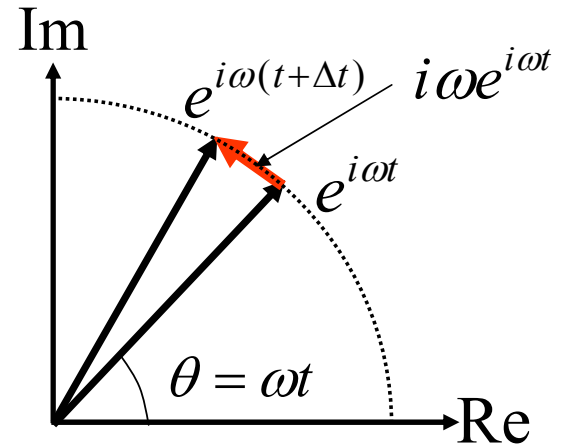
特に $\theta = \omega t$ と表されるとき

$$\frac{d}{dt} e^{i\omega t} = \frac{de^{i\theta}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = i\omega e^{i\omega t}$$

cf. 三角関数の加法定理

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$



(注意) 指数関数の微分では、実部と虚部は混じらない

$$\operatorname{Re} \left[\frac{de^{i\omega t}}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \operatorname{Re} [e^{i\omega t}] \quad \operatorname{Im} \left[\frac{de^{i\omega t}}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \operatorname{Im} [e^{i\omega t}]$$

単振動

ばね定数 k のばねに質量 m のおもりがついているとする。自然長からの伸びを x とすると、運動方程式は

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

解の形として、指数関数 $x = e^{\alpha t}$ を仮定して代入すると

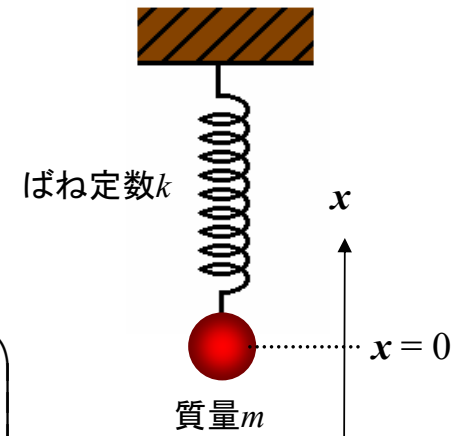
$$\left(\alpha^2 + \frac{k}{m} \right) e^{\alpha t} = 0 \rightarrow \alpha = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i \omega_0 \quad \left(\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$$

よって、一般解は

$$x(t) = A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t}$$

初期条件として、 $t=0$ のとき $x = x_0, \dot{x} = 0$ の場合、

$$A = B = \frac{x_0}{2} \rightarrow x(t) = \frac{x_0}{2} e^{i\omega_0 t} + \frac{x_0}{2} e^{-i\omega_0 t} = x_0 \cos \omega_0 t$$



空気抵抗は \propto 速度、それとも \propto 速度²

粘性抵抗ならば

$$F_V = -bv \rightarrow m \frac{dv}{dt} = -bv + mg \xrightarrow{\text{無限の時間}} v_t = \frac{mg}{b}$$

終端速度

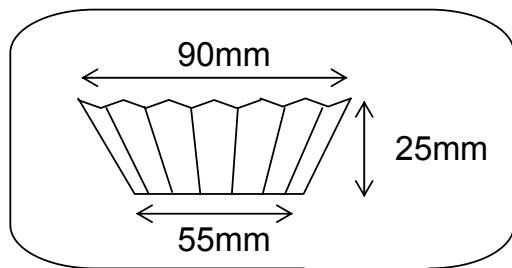
慣性抵抗ならば

$$F_I = -bv^2 \rightarrow m \frac{dv}{dt} = -bv^2 + mg \xrightarrow{\text{無限の時間}} v_t = \sqrt{\frac{mg}{b}}$$

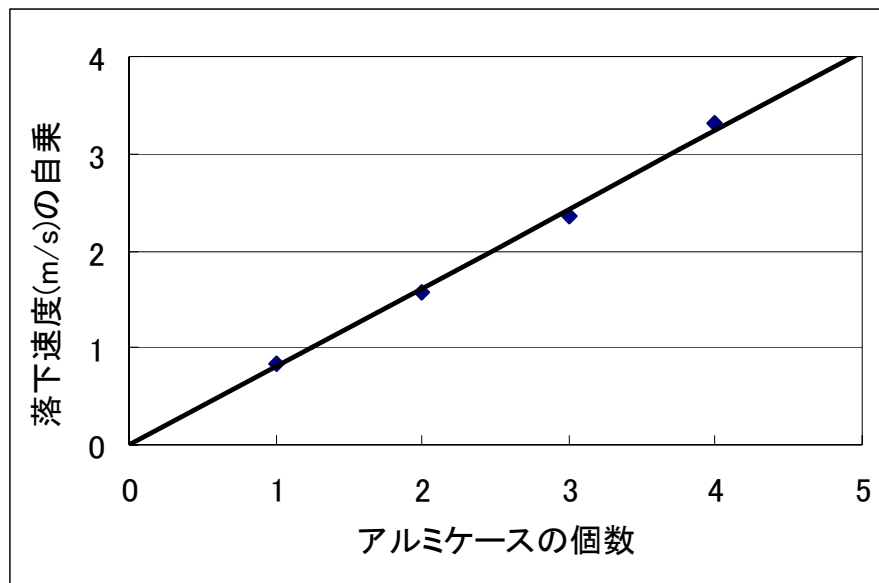
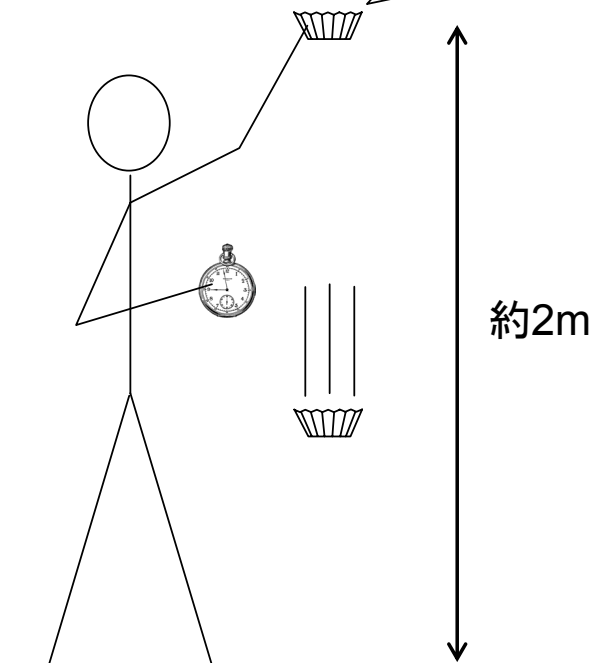
終端速度

同じ形状で、質量の異なる物体を落下させたとき、終端速度が質量に比例すれば粘性抵抗、質量の平方根に比例すれば慣性抵抗

実験：アルミカップの終端速度

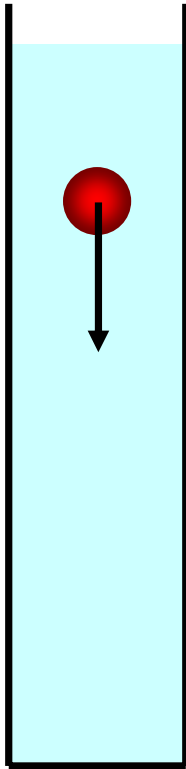


アルミカップの個数	1個	2個	3個	4個
2mの落下時間(s)	2.2	1.6	1.3	1.1
落下速度(m/s)	0.91	1.3	1.5	1.8
落下速度の自乗(m ² /s ²)	0.83	1.6	2.4	3.3



終端速度の自乗は質量に比例→慣性抵抗

粘性抵抗が働く物体の速度変化



$$m \frac{dv}{dt} = -bv + mg \rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{b}{m}v = g$$

↑
非齊次

＜非齊次方程式の一般的解法＞

①まず特殊解を求める(探す)

今の場合、終端速度 $v_t = \frac{mg}{b}$ が特殊解。

②右辺=0とにおいて(齊次方程式にして)一般解を求める

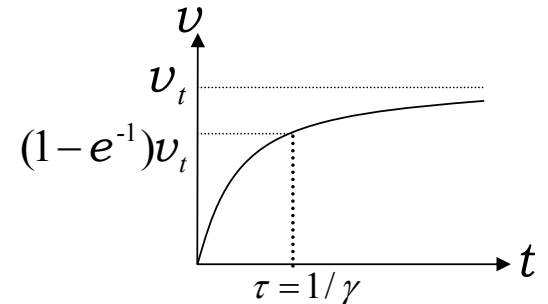
$$\frac{dv}{dt} + \frac{b}{m}v = 0 \rightarrow v = Ae^{-\gamma t} \left(\gamma \equiv \frac{b}{m} \right)$$

③(本当の一般解) = (齊次方程式の一般解) + (特殊解)

$$v = Ae^{-\gamma t} + v_t$$

初速度をゼロとすると、 $A = -v_t$

$$v = (1 - e^{-\gamma t})v_t$$



減衰振動

速度に比例する抵抗力(粘性抵抗)が働くの単振動の運動方程式は

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - kx \rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

ただし、 $\gamma \equiv b/2m$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ とおいた。

解の形として、指数関数 $x = e^{\alpha t}$ を仮定して代入すると

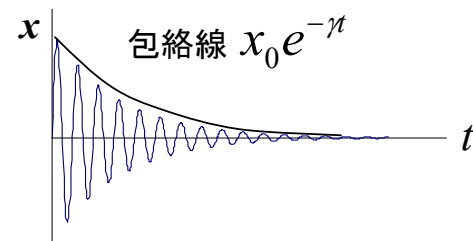
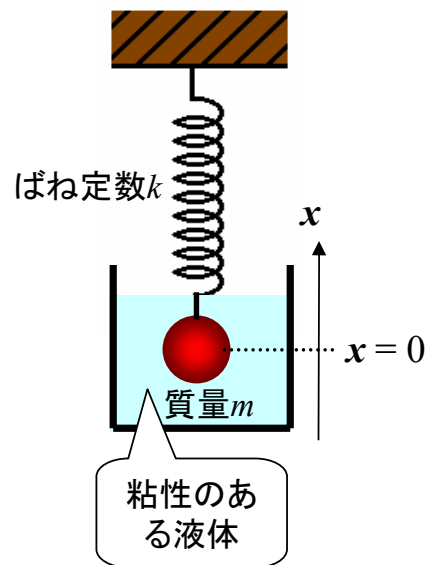
$$(\alpha^2 + 2\gamma + \omega_0^2)e^{\alpha t} = 0 \rightarrow \alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$\gamma < \omega_0$ の場合、 $\alpha_{\pm} = -\gamma \pm i\omega$ ($\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$)

一般解は $x(t) = Ae^{\alpha_+ t} + Be^{\alpha_- t} = e^{-\gamma t} (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t})$

初期条件として、 $t=0$ のとき $x = x_0$, $\dot{x} = 0$ の場合、

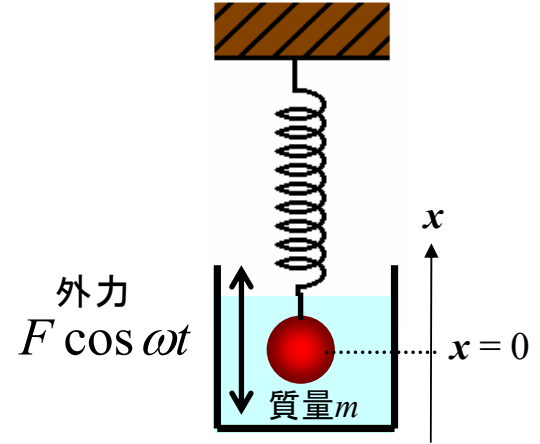
$$A = B = \frac{x_0}{2} \rightarrow x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \cos \omega t$$



強制振動

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - kx + F \cos \omega t$$

$$\rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \cos \omega t \leftarrow \text{非斉次}$$



非斉次方程式の一般的解法(斉次方程式の一般解+特殊解)でも解ける。
その方法は教科書に譲り、ここでは定常解(十分時間が経った後の解)を
求めよう。

<解法のテクニック>

- ① 実部にのみ意味があると約束して、周期関数を複素表示する

$$\frac{F}{m} \cos \omega t = \frac{F}{m} \operatorname{Re}[e^{i\omega t}] \rightarrow \frac{F}{m} e^{i\omega t}$$

- ② $x(t)$ は(定常状態では)外力と同じ角周波数 ω で振動する周期関数と仮定する。

$$x(t) = x(\omega) e^{i\omega t}$$

共鳴・共振 (Resonance)

運動方程式に代入して、 $x(\omega)$ について解くと

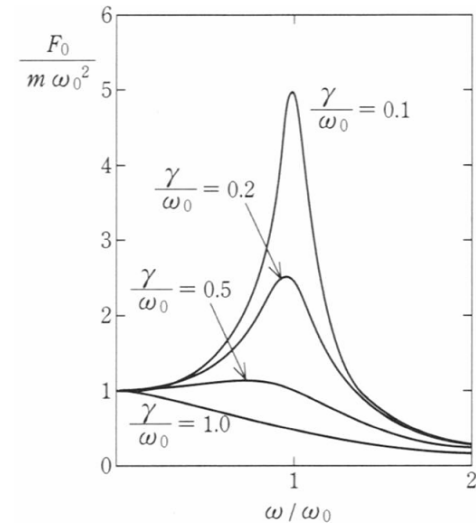
$$x(\omega) = \frac{F}{m} \cdot \frac{1}{-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2}$$

振動の振幅の大きさは、

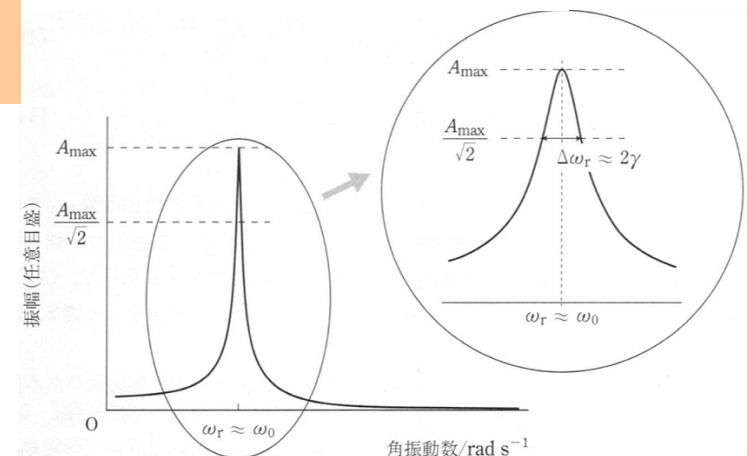
$$|x(\omega)| = \frac{F}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

特に、 $\gamma \ll \omega_0$ の場合、 $\omega \sim \omega_0$ では、

$$|x(\omega)| = \frac{F}{2\omega_0 m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}}$$



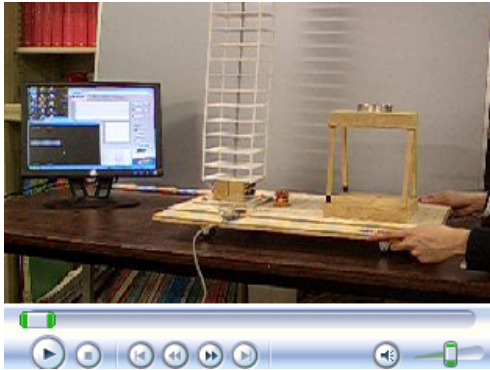
兵頭「考える力学」p77 図4.10



基礎物理学実験テキスト「振動・波動Ⅱ」p140 図5

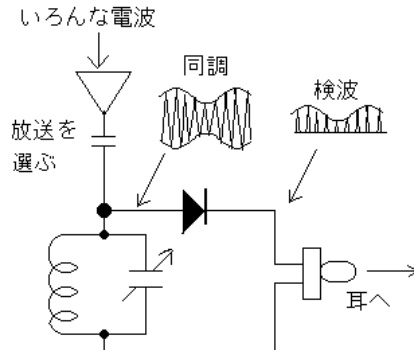
様々な共鳴現象

<地震波の共鳴>



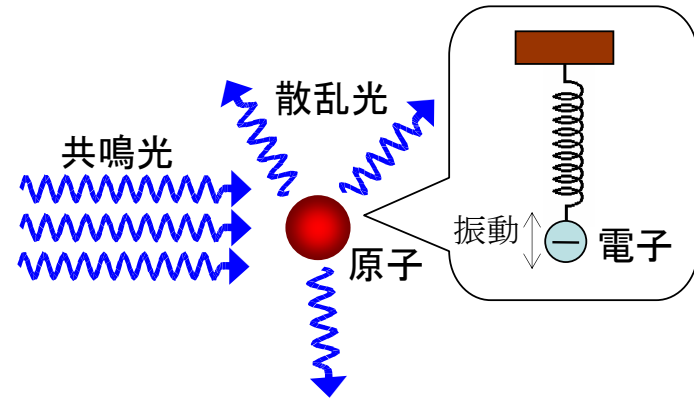
<http://www.kz.tsukuba.ac.jp/~sakai/dsn.htm>

<ラジオ(LC並列共振回路)>

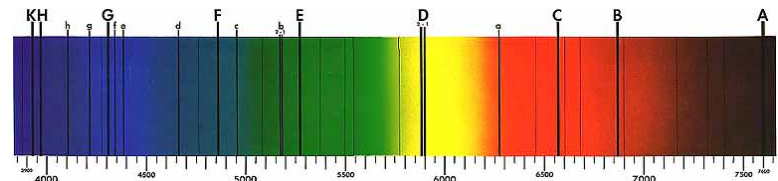


<http://www9.wind.ne.jp/fujin/diy/radio/radio02.htm>

<原子・分子による光の吸収>



共鳴する原子 原子・分子の共鳴周波数に等しい光(共鳴光)を照射すると、原子内の電子が振動し、光は散乱される。



太陽光スペクトルの暗線(フラウンホーファー線)
太陽の大気中に存在する様々な原子・分子が、固有の共鳴周波数の光を吸収するため、多数の暗線が生じる。

第5章

極座標による 運動の記述

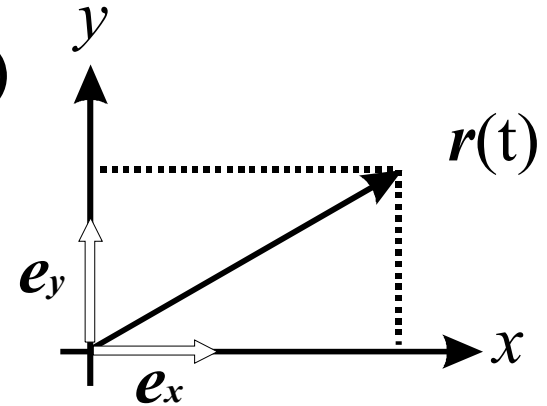
2次元極座標表示

デカルト座標表示

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y = (x(t), y(t))$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y = (\dot{x}, \dot{y})$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y = (\ddot{x}, \ddot{y})$$



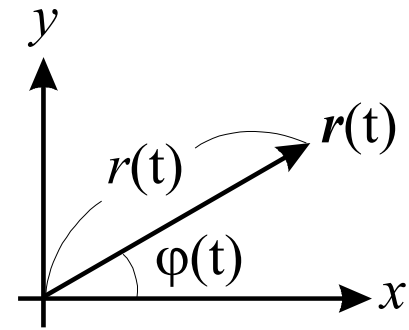
2次元極座標表示

$$\mathbf{r}(t) = (r(t), \varphi(t))$$

~~$$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{r}, \dot{\varphi})$$~~

~~$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r}, \ddot{\varphi})$$~~

間違い



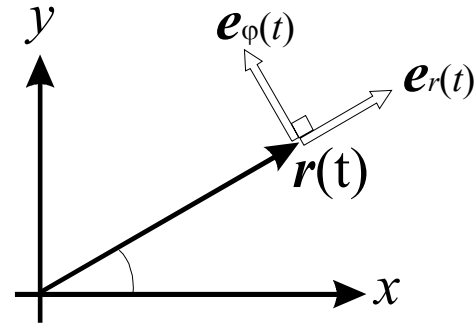
2次元極座標の基底ベクトル

$$\mathbf{r}(t) = r(t) \mathbf{e}_r(t)$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (r(t) \mathbf{e}_r(t))$$

$$= \frac{dr(t)}{dt} \mathbf{e}_r(t) + r(t) \frac{d\mathbf{e}_r(t)}{dt}$$

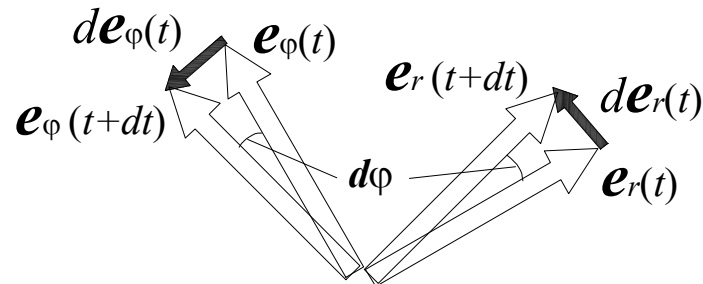
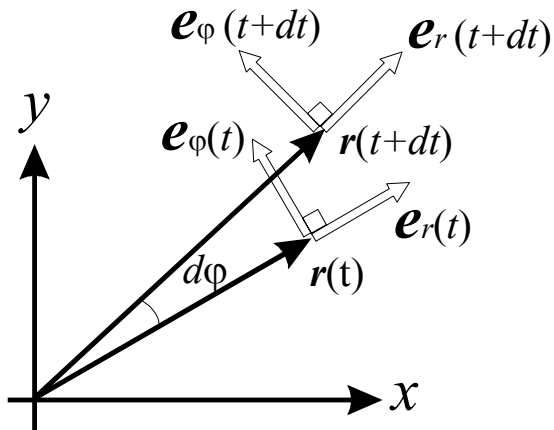
?



$$\mathbf{e}_r(t) \parallel \mathbf{r}(t)$$

$$\mathbf{e}_r(t) \perp \mathbf{e}_\phi(t)$$

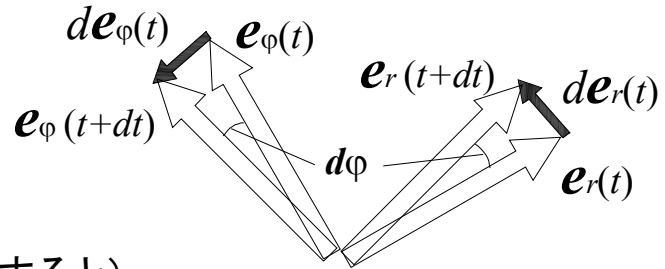
$$|\mathbf{e}_r(t)| = |\mathbf{e}_\phi(t)| = 1$$



基底ベクトルの時間微分

$$d\mathbf{e}_r(t) = d\varphi \mathbf{e}_\varphi(t)$$

$$d\mathbf{e}_\varphi(t) = -d\varphi \mathbf{e}_r(t)$$



両辺を dt で割ると(単位時間あたりの変化にすると)

$$\frac{d\mathbf{e}_r(t)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_\varphi(t) \quad (\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\varphi(t)}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_r(t) \quad (\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r)$$

したがって、

$$\mathbf{v}(t) = \frac{dr(t)}{dt} \mathbf{e}_r(t) + r(t) \frac{d\mathbf{e}_r(t)}{dt} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi = \boxed{(\dot{r}, r\dot{\varphi})}$$

$(\dot{r}, \dot{\varphi})$ ではない!

極座標表示における 速度および加速度ベクトル

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt} \mathbf{e}_r(t) + r(t) \frac{d\mathbf{e}_r(t)}{dt} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi) = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r + (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

極座標表示の運動方程式は、

$$\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r + F_\varphi \mathbf{e}_\varphi = m \mathbf{a}(t) \rightarrow \begin{cases} F_r = m(\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \\ F_\varphi = m \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) \end{cases}$$

等速円運動

$$\mathbf{r}(t) = (r(t), \varphi(t)) = (r, \omega t)$$

r 成分の運動方程式は、

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r(t)$$

r は一定なので

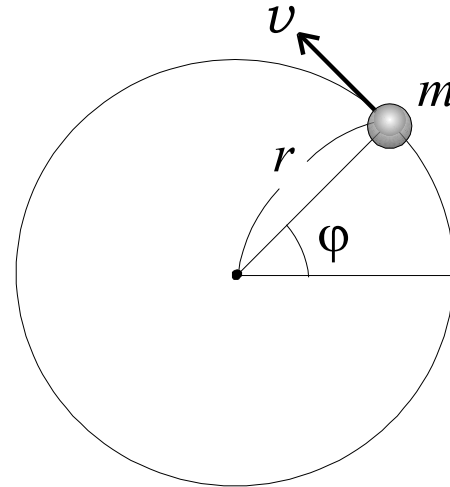
$$F_r(t) = -mr\omega^2 \quad \text{向心力(一定)}$$

ϕ 成分の運動方程式は、

$$m \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) \right] = F_\varphi(t)$$

r も ϕ も一定なので、

$$F_\varphi(t) = 0 \quad \text{円運動している物体には進行方向の力は働いていない}$$



角速度 ω で回転

単振り子

運動方程式より

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = mg \cos \varphi - T \dots \textcircled{1}$$

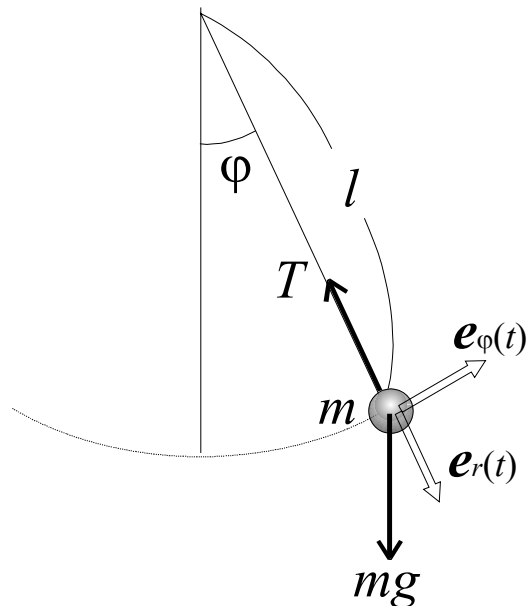
$$m \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = -mg \sin \varphi \dots \textcircled{2}$$

①より

$$\begin{aligned} -ml\dot{\varphi}^2 &= mg \cos \varphi - T \\ \rightarrow T &= mg \cos \varphi + ml\dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

②より

$$\begin{aligned} ml\ddot{\varphi} &= -mg \sin \varphi \\ \rightarrow \ddot{\varphi} &= -\frac{g}{l} \sin \varphi \cong -\frac{g}{l} \varphi \quad (\varphi \ll 1) \end{aligned}$$



$$F_r = mg \cos \varphi - T$$

$$F_\varphi = -mg \sin \varphi$$

第6章

角運動量

数学的準備：ベクトルの外積

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \equiv |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta \cdot \mathbf{e}_\perp$$

<主な性質>

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

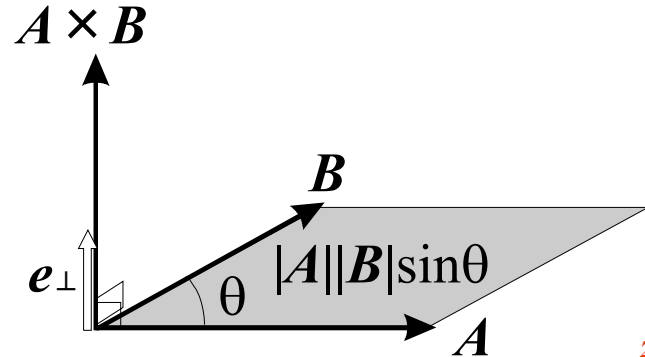
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

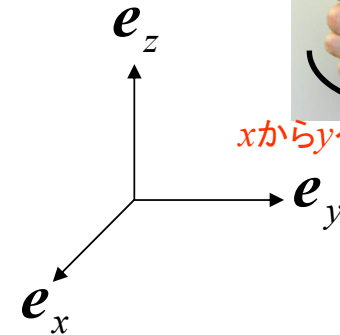


右手系では

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x$$

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$$



zの向き

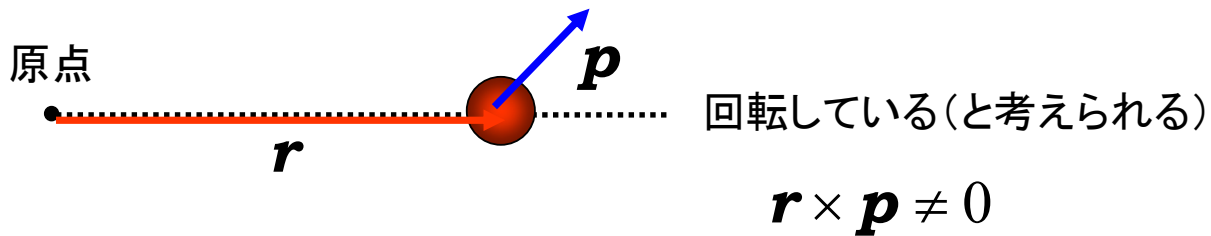
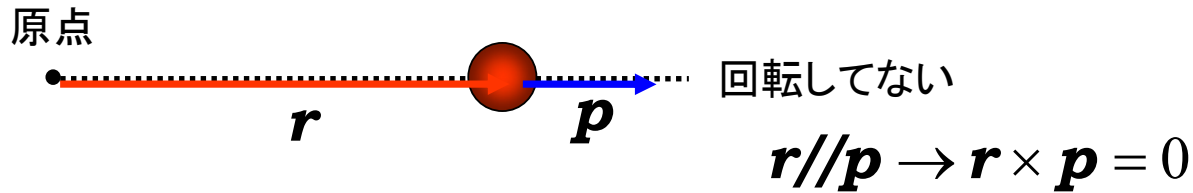
右手

xからyへ回す向き

$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$, $\mathbf{B} = B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z$ とすると、

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z$$

物体の「回転」をどう表現するか？



$r \times p$ は、原点まわりの物体の回転の度合いを表す指標になっている？

$r \times p \equiv L$ と定義して、これを角運動量と名付けよう

角運動量と力のモーメント

角運動量の時間微分(単位時間あたりの変化)を考えよう。

これは物体に働いている力

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \boxed{m\ddot{\mathbf{r}}}$$

($\because \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}} = m(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0$)

したがって、物体に働いている力を F とすると、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$\mathbf{N} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ を力のモーメント(もしくはトルク)という。

(注意)角運動量も力のモーメントも、原点の位置を変えれば、その向きも大きさも変わる

トルクレンチ



トルクの大きさの単位 (SI) はNm
(kgf·mやkgf·cmも使われている)

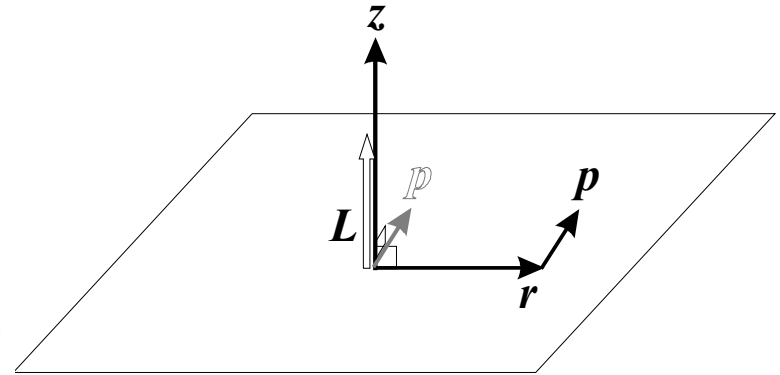
角運動量の保存

万有引力は中心力なので、太陽を原点とすると、惑星に働く力のモーメントは

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$$

したがって、

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = 0 \quad (\text{力が中心力の場合})$$



これは、角運動量が時間的に変化しない(一定である)ことを意味する。
「**中心力が働く物体の(中心力を原点とする)角運動量は保存する**」
とすることができる。

また、物体のLが変化しないということは、物体はLに垂直な一つの平面内で運動を続ける(二次元極座標表示で運動を記述できる)。

面積速度一定の法則 (ケプラーの第2法則)

2次元極座標表示

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{r}\mathbf{e}_r + mr\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$$

角運動量は

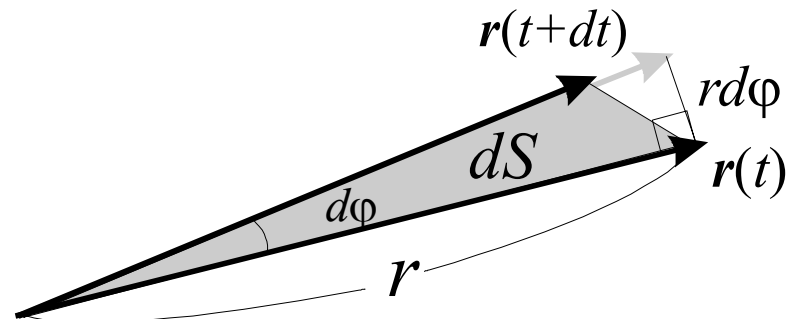
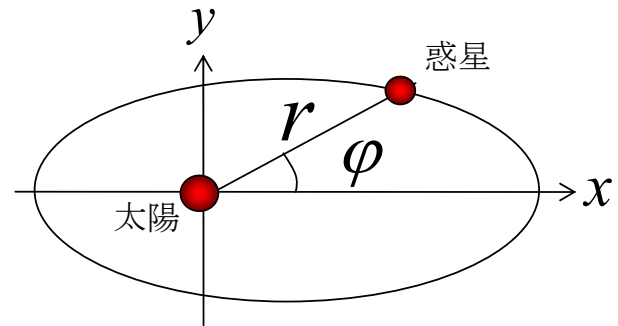
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = r\mathbf{e}_r \times (m\dot{r}\mathbf{e}_r + mr\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi)$$

$$= mr^2\dot{\phi}(\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\phi)$$

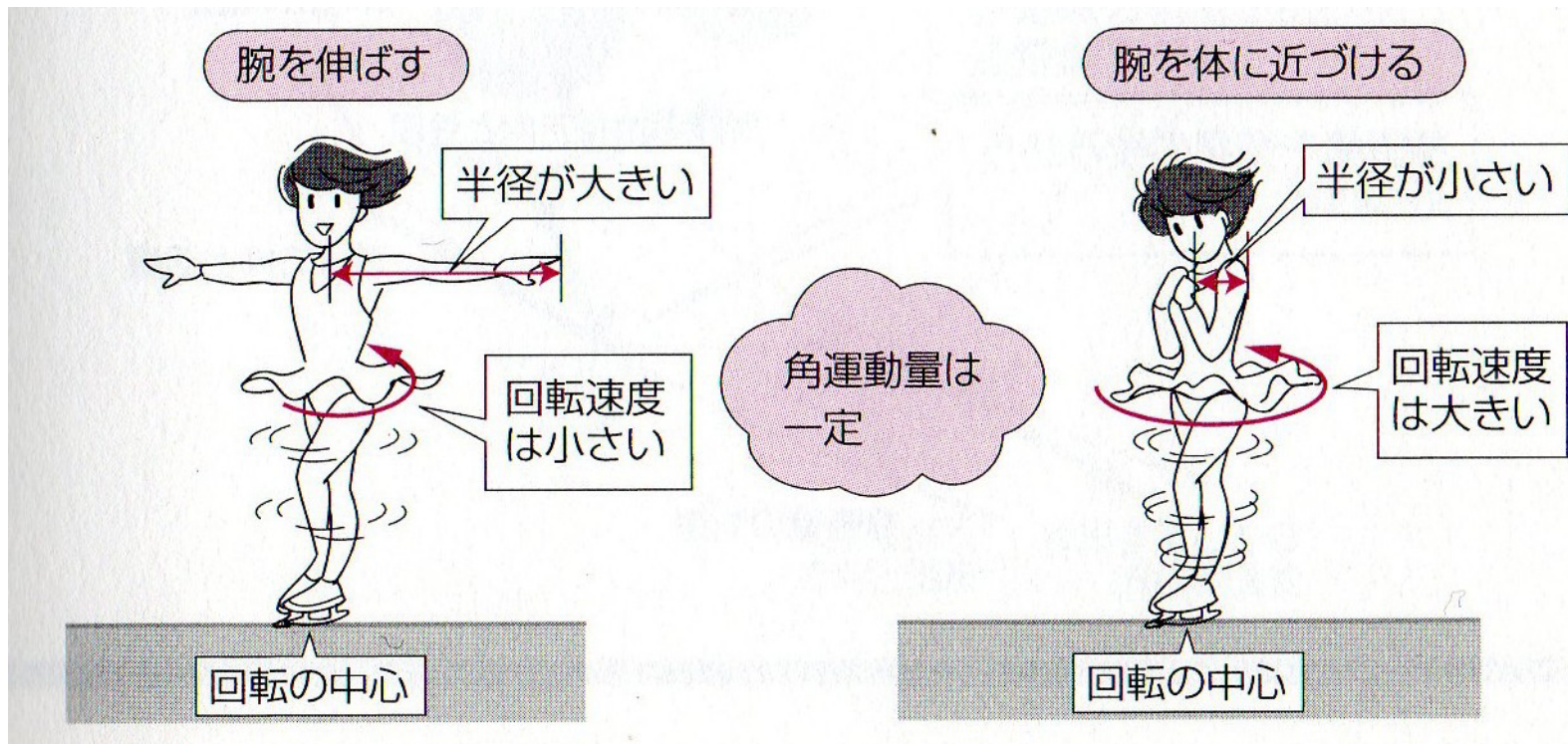
$$= mr^2\dot{\phi}\mathbf{e}_z$$

面積速度は

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi} = \frac{L}{2m}$$



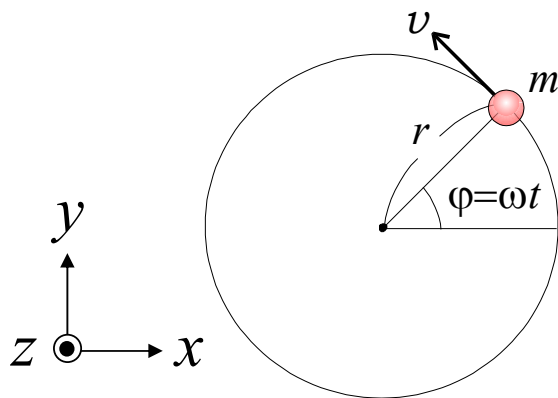
フィギュアスケートのスピン



出典:「やりなおし高校の物理」野田学(2005年、ナツメ社)

回転体の角運動量と慣性モーメント

<質点の場合>



$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = mr^2\boldsymbol{\omega} = I\boldsymbol{\omega}$$

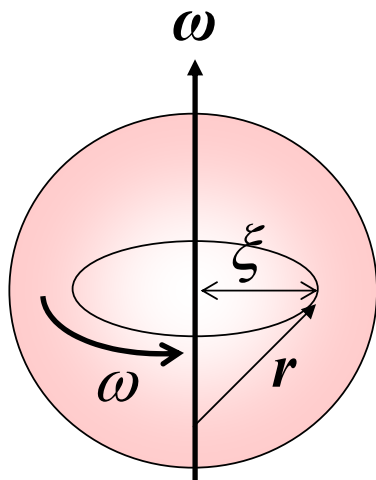
$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$$

角速度ベクトル(大きさは角速度、向きは回転軸と平行(右ねじの進む向き))

$$I \equiv mr^2$$

慣性モーメント(角速度ベクトルをかけると角運動量になる量)

<回転対称性のある物体(剛体)の場合>



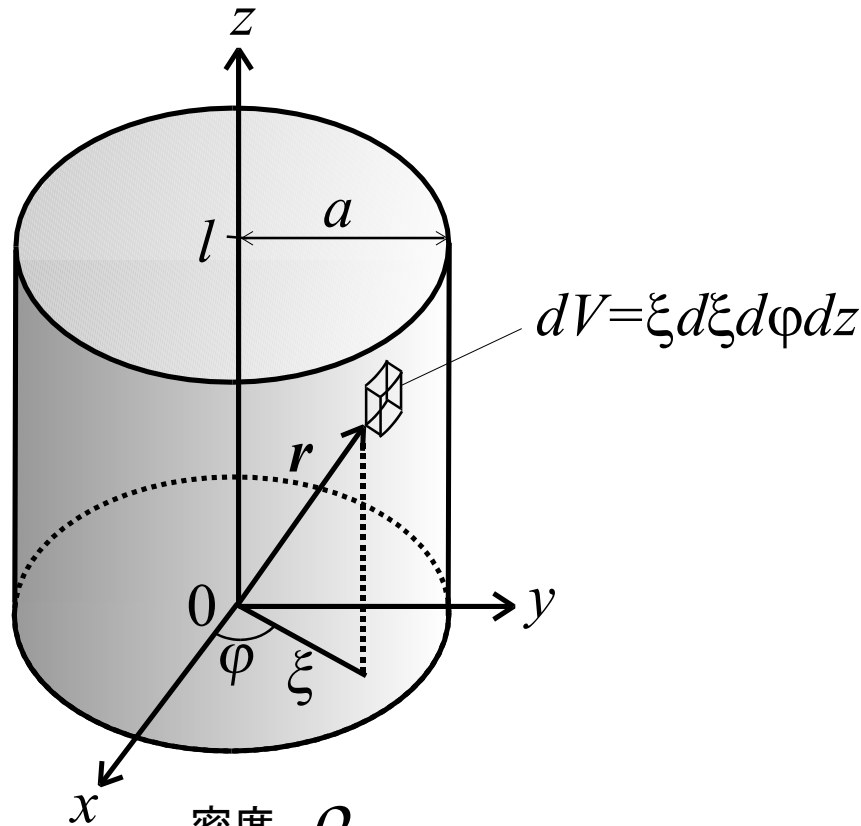
$$\mathbf{L} = \int \mathbf{r} \times \rho(\mathbf{r}) \dot{\mathbf{r}} dV = I\boldsymbol{\omega}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$I = \int \xi^2 \rho(\mathbf{r}) dV$$

ξ : 回転軸からの距離

円柱の慣性モーメントの計算

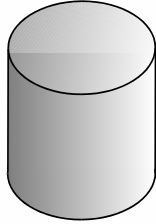
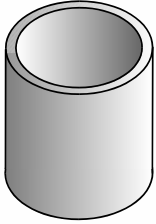
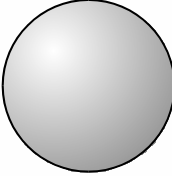
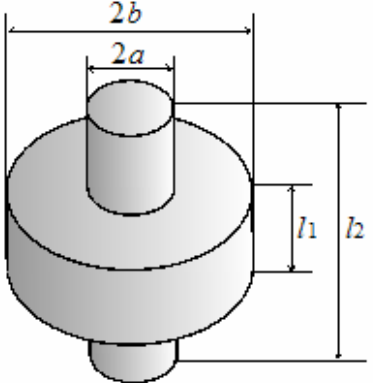


密度 ρ

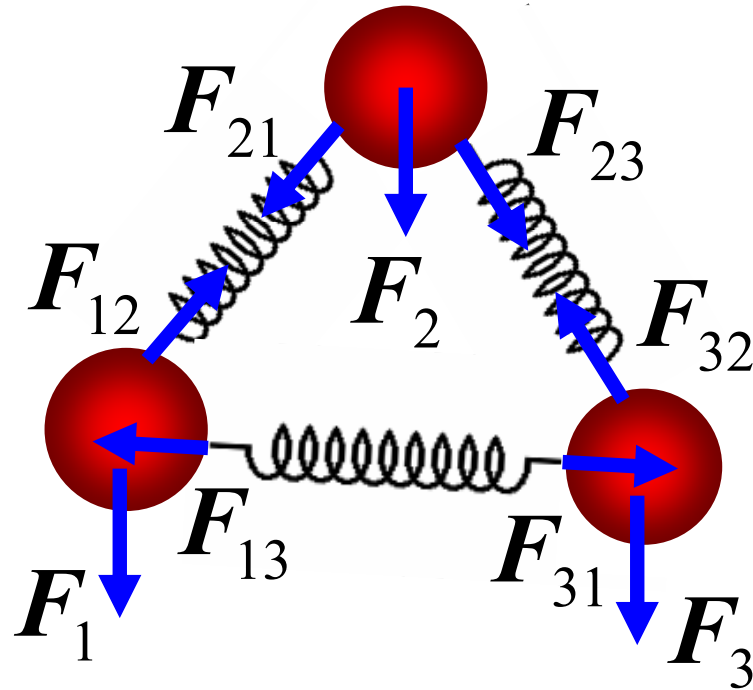
質量 $M = \pi a^2 l \rho$

$$\begin{aligned} I &= \int \xi^2 \rho(\mathbf{r}) dV \\ &= \rho \iiint \xi^2 \xi d\xi d\varphi dz \\ &= \rho \int_0^a \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^l dz \\ &= 2\pi l \rho \left[\frac{1}{4} \xi^4 \right]_0^a \\ &= \frac{\pi a^4 l \rho}{2} = M \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

さまざまな回転体の慣性モーメント

形状	円柱 (円盤)	パイプ	球	軸付き円盤
大きさの パラメタ	 直径 $2a$	 外径 $2a$ 内径 $2b$	 直径 $2a$	
慣性モーメント	$M \frac{a^2}{2}$	$M \frac{a^2 + b^2}{2}$	$M \frac{2a^2}{5}$	$M \frac{b^2}{2} \frac{l_1 + (l_2 - l_1)\epsilon^4}{l_1 + (l_2 - l_1)\epsilon^2} \left(\epsilon \equiv \frac{a}{b} \right)$

内力と外力



各質点に働く力の合計は

$$\begin{aligned} & \sum_i \left(F_i + \sum_{j \neq i} F_{ij} \right) \\ &= \sum_i F_i + \sum_i \sum_{j \neq i} F_{ij} \\ &= \sum_i F_i \end{aligned}$$

質点系に働く力の和は、外力のみの和(内力の和は、作用・反作用の法則より相殺)

剛体の角運動量とトルク

物体のその箇所に働いている力

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum (\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}) = \sum (\dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}}) + \sum (\mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}}) = \sum \mathbf{r} \times \boxed{m\ddot{\mathbf{r}}}$$

計算してみると、作用反作用の法則および内力が中心力であるため、内力の効果は相殺され(兵頭「考える力学」p211参照) 結果的に外力のトルクが残る、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{r}_{\text{作用点}} \times \mathbf{F}_{\text{外力}} = \sum \mathbf{N}_{\text{外力のトルク}}$$

ニュートンの運動方程式

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

作用反作用の法則

内力は中心力

物体の角運動量の時間変化

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$$

\mathbf{N} は外力のトルク之和

内力のトルクが無視できることの証明

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i) = \sum_i \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i) = \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i)$$

$$\parallel$$

$$\mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \left[\mathbf{r}_i \times \left(\mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} \right) \right] = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + \sum_i \sum_{j \neq i} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}) = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)$$

あからさまに書くと

$$\sum_i \sum_{j > i} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = 0$$

内力は中心力
なので

$\sum_i \sum_{j \neq i} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}) =$	$+\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12}$	$+\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{13}$	\cdots	$+\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{1,n-1}$	$+\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{1n}$
$-$	$\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{12}$	$+\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{23}$	\cdots	$+\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{2,n-1}$	$+\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{2n}$
$-$	$\mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{13}$	$-\mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{23}$	\cdots	$+\mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{2,n-1}$	$+\mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{2n}$
\vdots					
$-$	$\mathbf{r}_{n-1} \times \mathbf{F}_{1,n-1}$	$-\mathbf{r}_{n-1} \times \mathbf{F}_{2,n-1}$	\cdots		$+\mathbf{r}_{n-1} \times \mathbf{F}_{n-1,n}$
$-$	$\mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_{1n}$	$-\mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_{2n}$	\cdots	$-\mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_{n-1,n}$	

作用反作用の
法則を適用



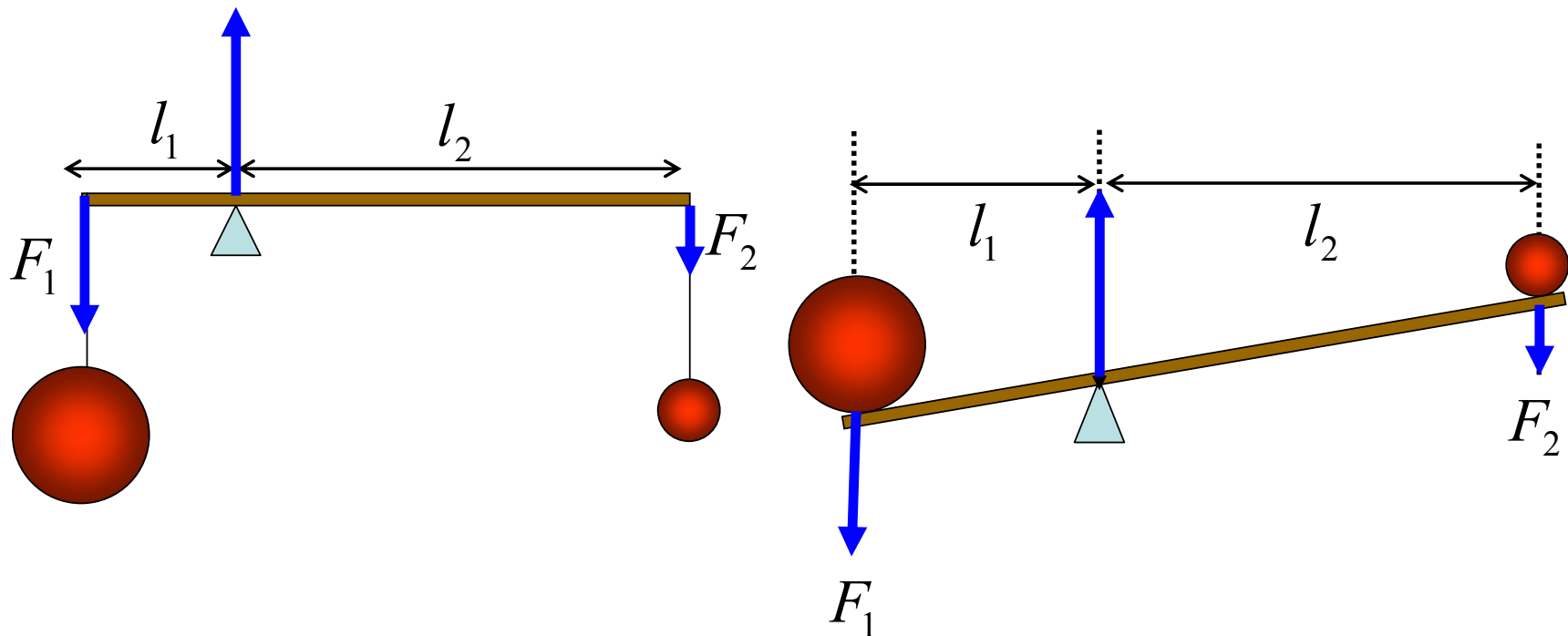
$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$$

運動量と角運動量のアナロジー

	運動量 (momentum)	角運動量 (angular momentum)
定義	$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$	$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = I\boldsymbol{\omega}$
時間変化させる 要因	\mathbf{F} 力(force)	$\mathbf{N} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ トルク(torque)
時間変化のしにくさ を表す量(慣性)	m (慣性)質量 ((inertial) mass)	I 慣性モーメント (moment of inertia)
運動方程式	$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$	$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{N}$

物体のつりあいと「てこの原理」

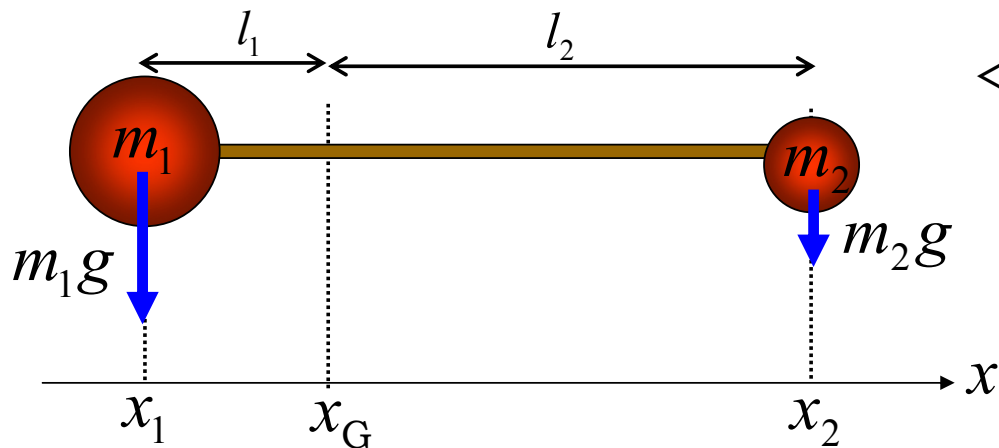
静止している物体は回転していない(角運動量がゼロのまま変化しない)
→外力のトルク(原点は任意)の和はゼロ



$$F_1 l_1 = F_2 l_2$$

重心(質量中心)

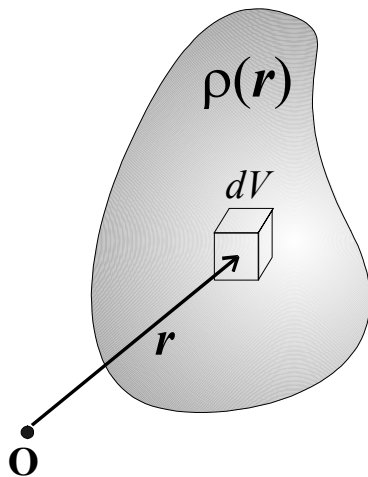
質量の重みをつけた位置の平均



<2質点の場合>

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

<一般の剛体>



$$\mathbf{r}_G = \frac{\sum \mathbf{r}_i m_i}{M} = \frac{\int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV}{\int \rho(\mathbf{r}) dV}$$

重力のモーメント

$$N = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g}$$

$$= \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) \times \mathbf{g}$$

$$= \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M} \times M \mathbf{g}$$

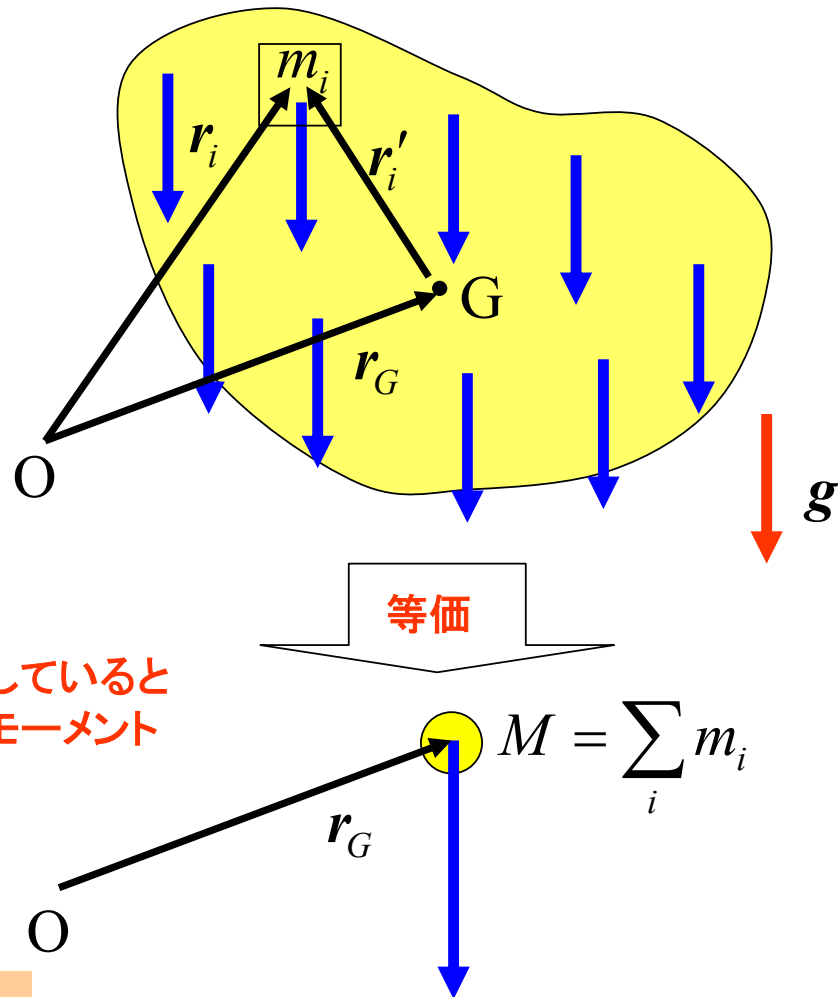
$$= \mathbf{r}_G \times M \mathbf{g}$$

全質量が重心に集中していると
考えた場合の重力のモーメント

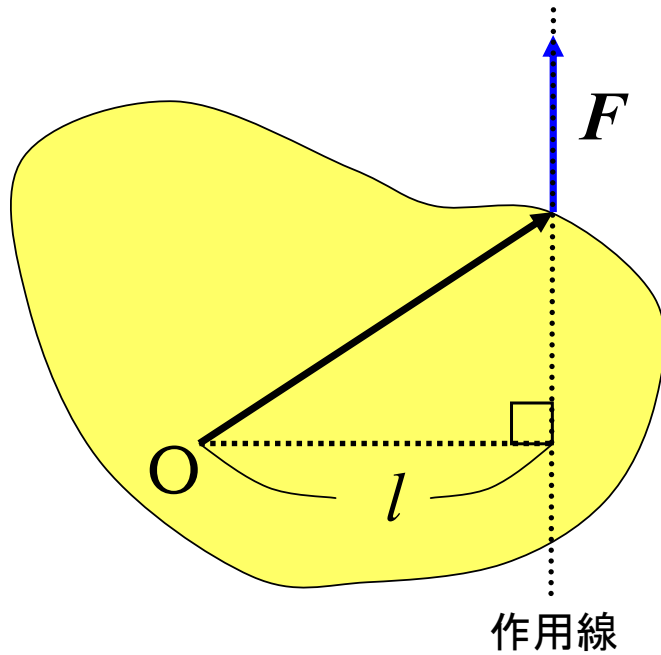
重心を原点とすれば $\mathbf{r}_G = 0$ であるから

$$N = 0 \quad (\text{重心が原点の場合})$$

重心を支点とすると、物体は回転しない



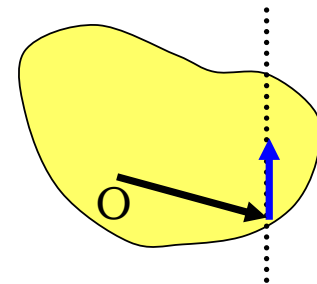
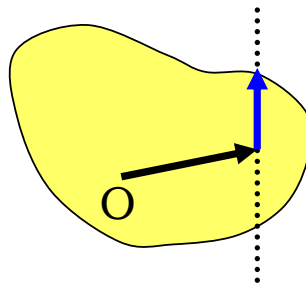
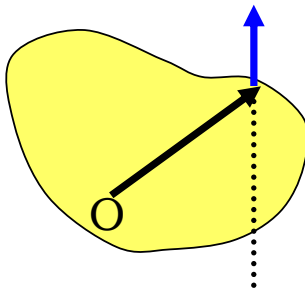
力の作用線



$$|\mathbf{N}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = rF \sin \theta = Fl$$

l : 作用線から原点までの距離

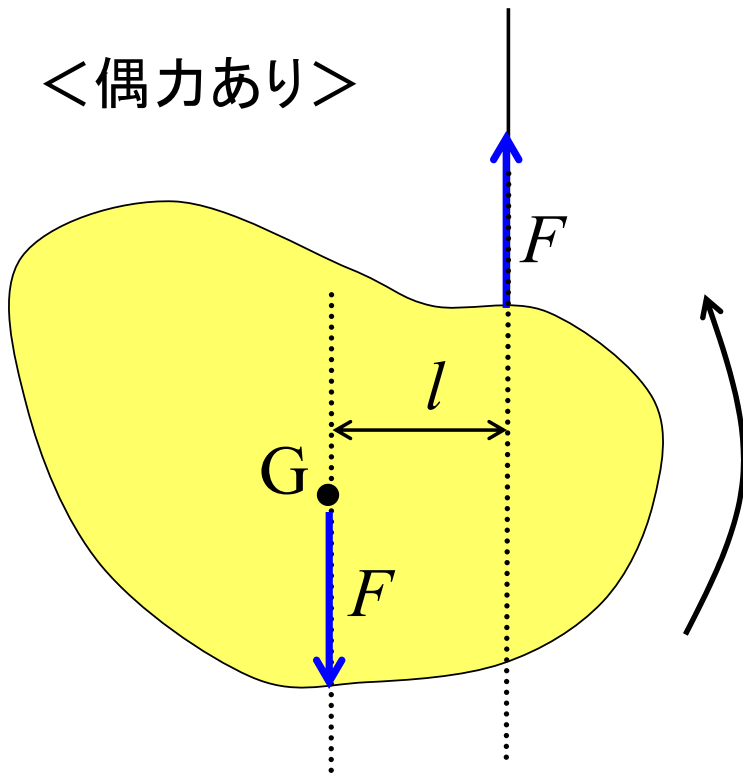
作用点を作用線上で移動しても、剛体に加わるトルクは等しい



偶力 (couple)

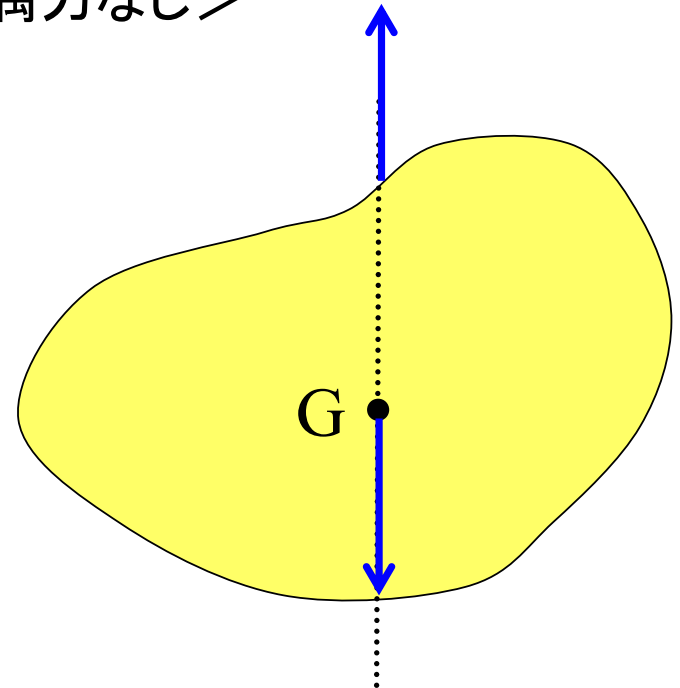
作用線の一致しない大ききの等しい二つの力

<偶力あり>



$$\frac{dL}{dt} = N = Fl \neq 0 \quad \text{回転する}$$

<偶力なし>

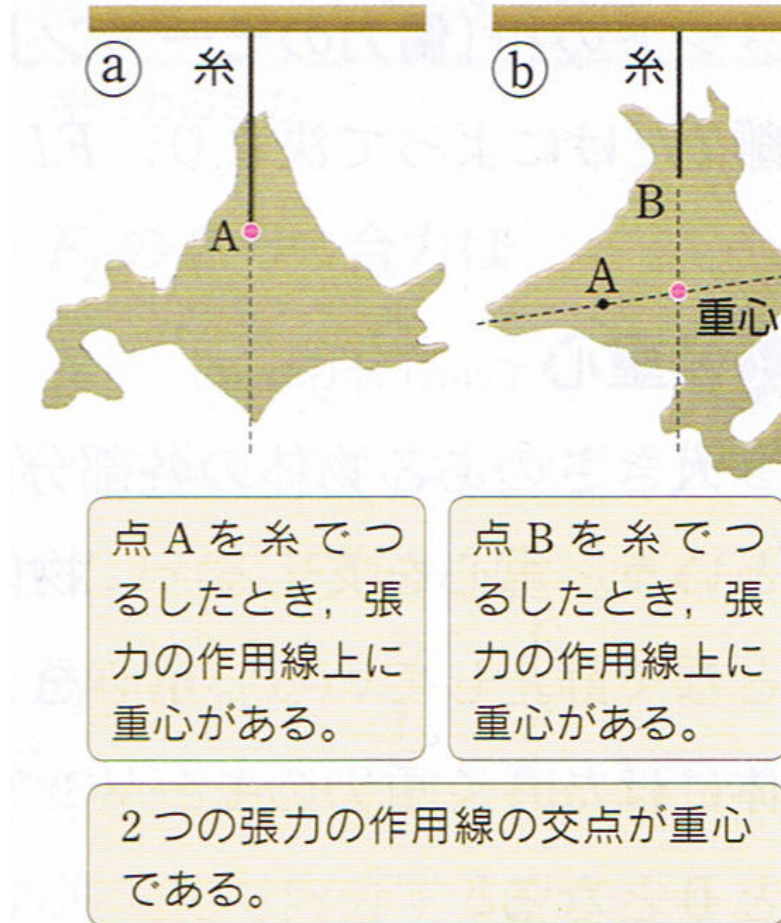


$$\frac{dL}{dt} = N = Fl = 0 \quad \text{回転しない}$$

様々なワインホルダー

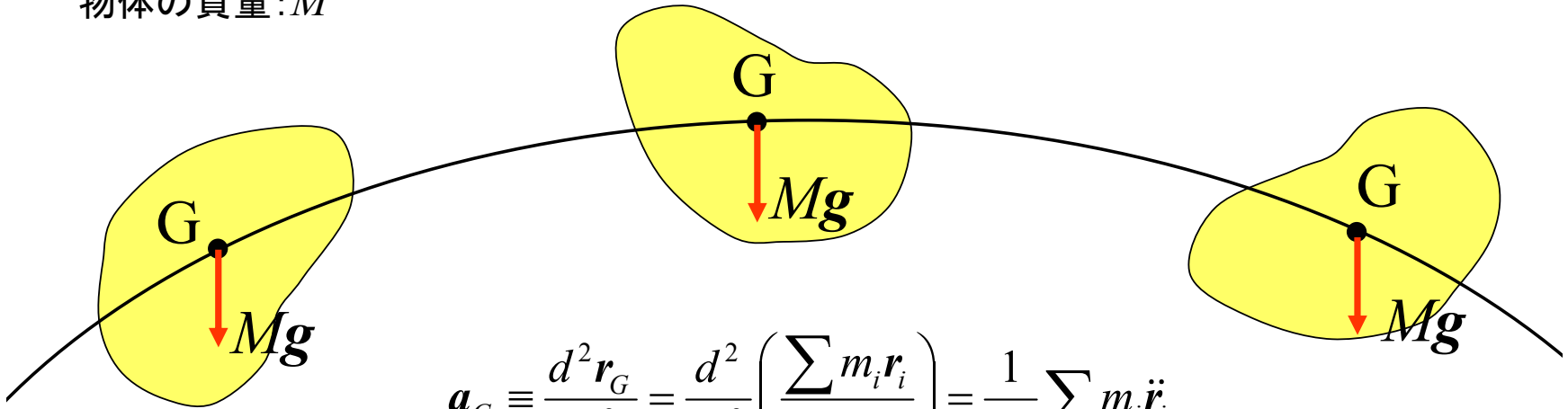


物体の重心を求める



重心の運動

物体の質量: M



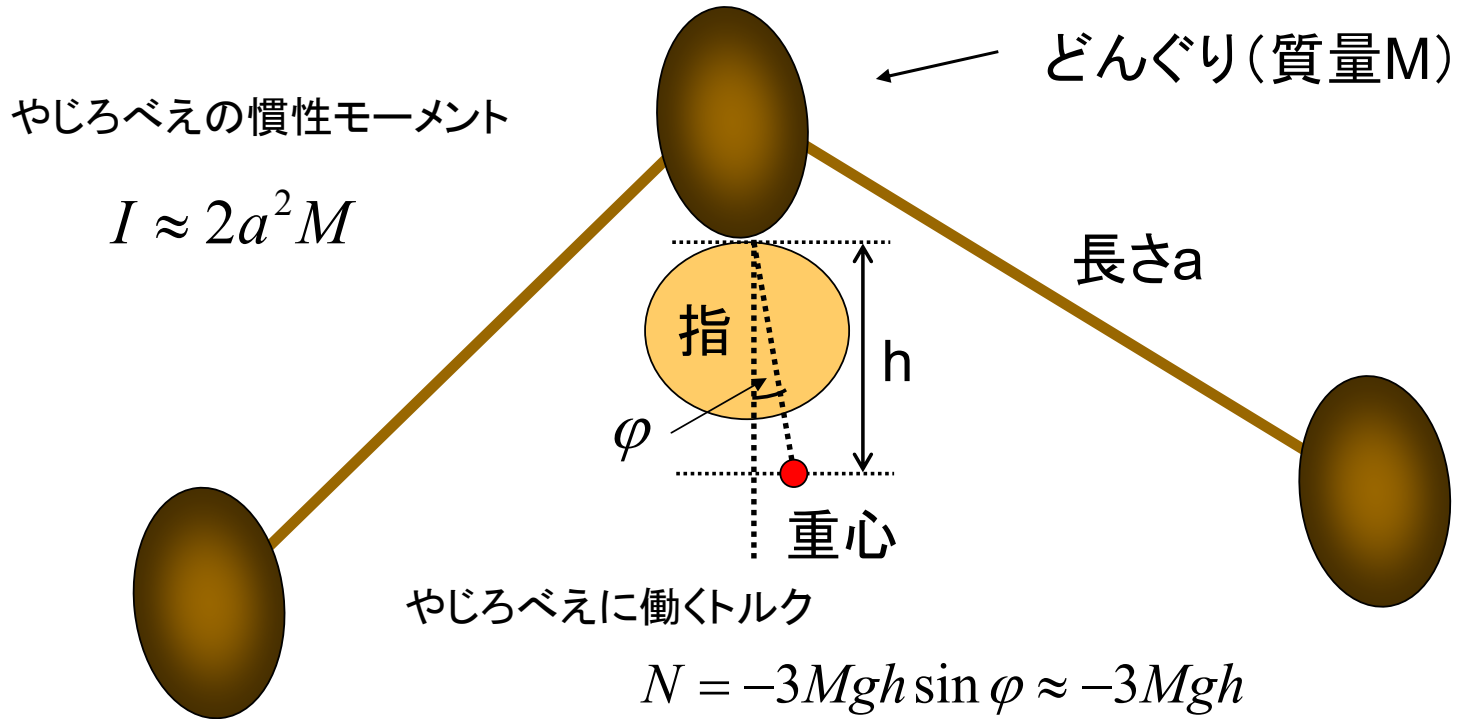
$$\begin{aligned} \mathbf{a}_G &\equiv \frac{d^2 \mathbf{r}_G}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M} \right) = \frac{1}{M} \sum m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \\ &= \frac{\sum_i (\mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij})}{M} = \frac{\sum_i \mathbf{F}_i}{M} \end{aligned}$$

重心の運動方程式

$$\mathbf{F}_{\text{外力の和}} = M \mathbf{a}_G$$

重心の運動方程式は、質量 M の質点の運動方程式に等しい

やじろべえ (実体振り子)

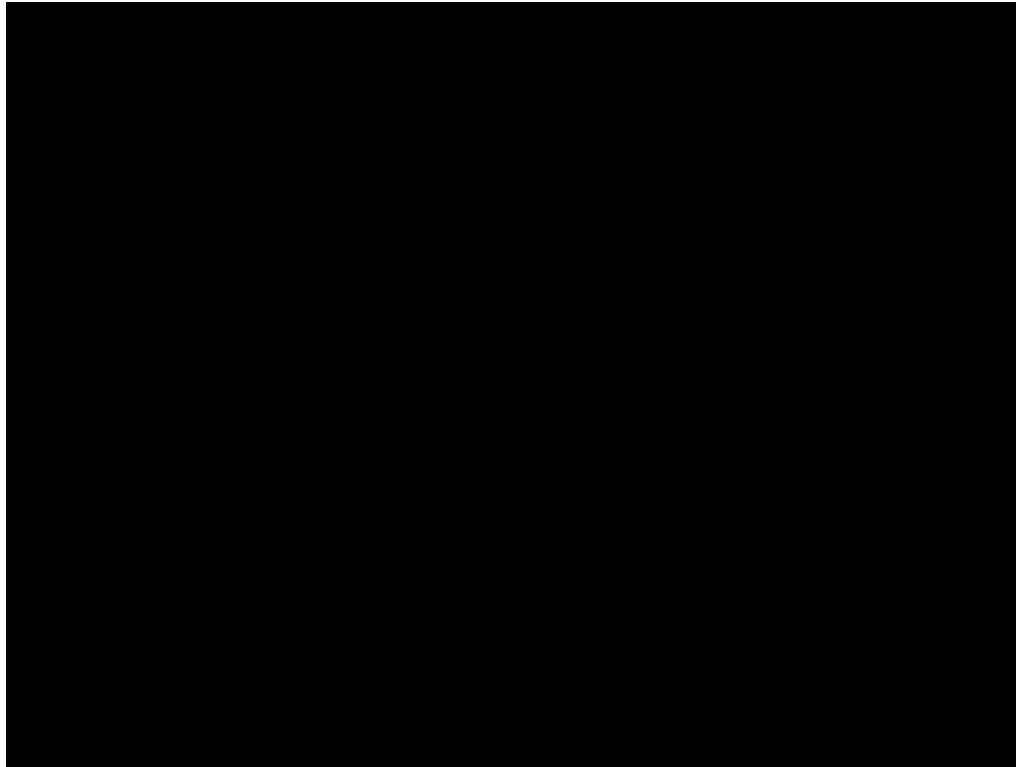


$$\frac{dL}{dt} = N, L = I\omega = 2a^2 M \dot{\varphi} \quad \text{より、}$$

$$2a^2 M \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = -3Mgh \rightarrow \ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{3hg}{2a^2}} \right)$$

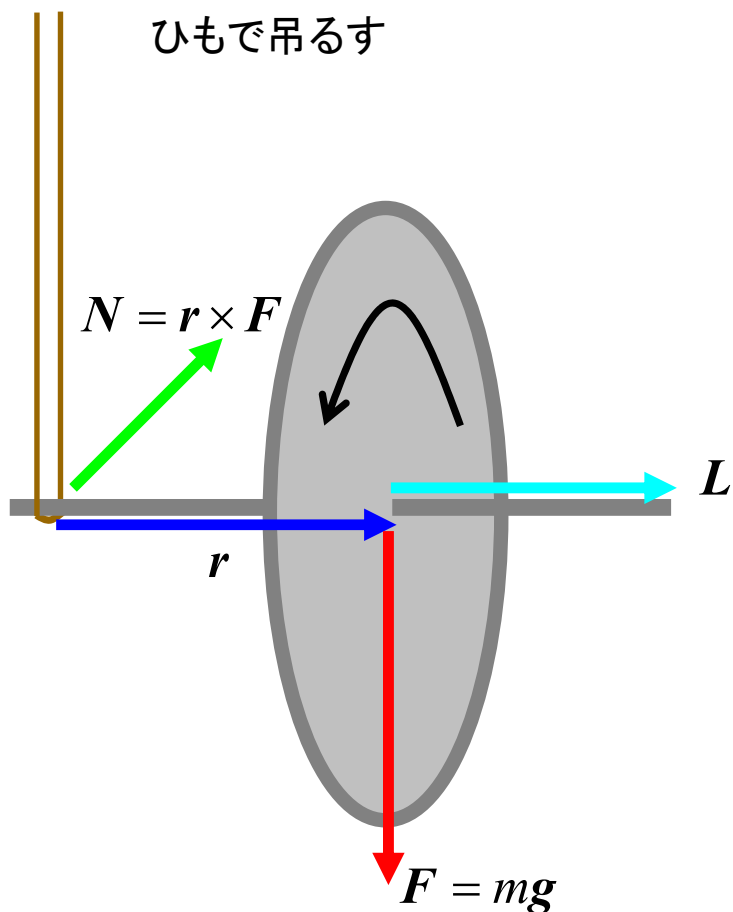
単振動

地球ゴマ (gyroscope)



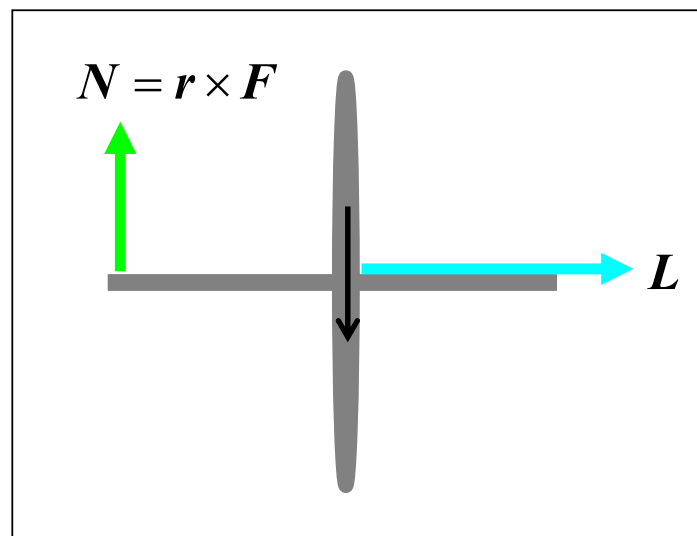
<http://www.youtube.com/watch?v=V4duz17JVvY>

回転する車輪の軸はどちらに回る？

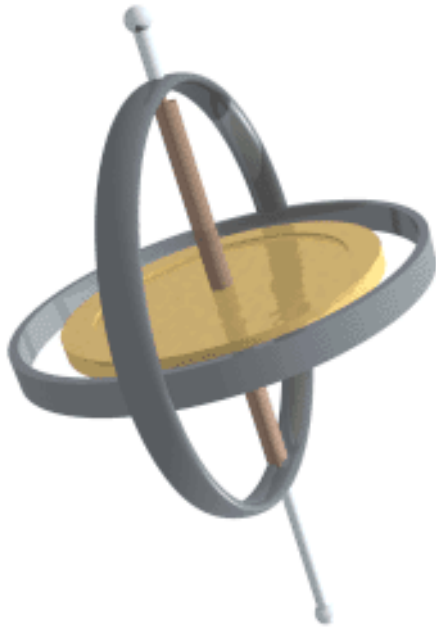


$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$$

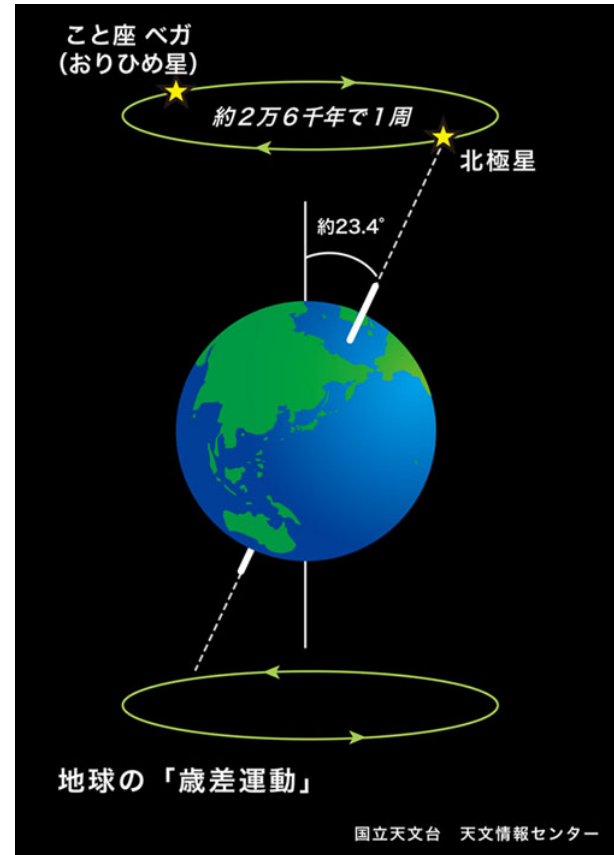
上から見た図



歳差運動 (precession)



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/82/Gyroscope_precession.gif



<http://www.nao.ac.jp/QA/image/img0907.jpg>

斜面上を転がる回転体

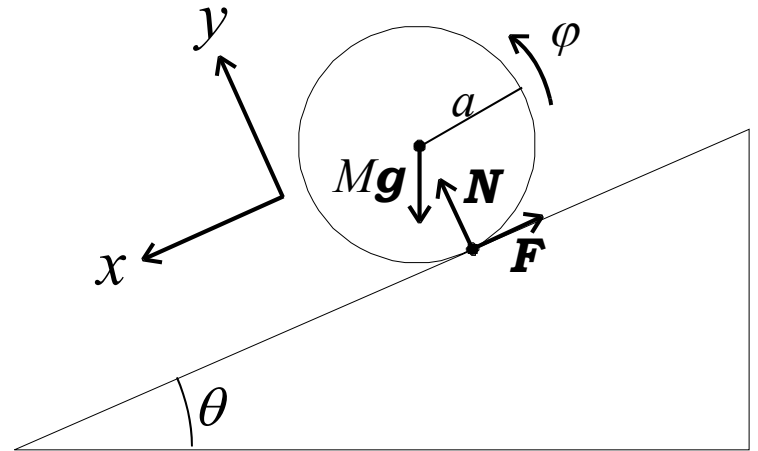
回転体の重心の運動

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}_G}{dt^2} = M\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}$$

垂直抗力 摩擦力

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = Mg \sin \theta - F$$

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = -Mg \cos \theta + N$$



基礎物理学実験テキスト「剛体の力学」より

回転体の回転運動

$$I \frac{d\omega}{dt} = aF$$

$$x = a\phi$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{1 + (k/a)^2} g \sin \theta$$

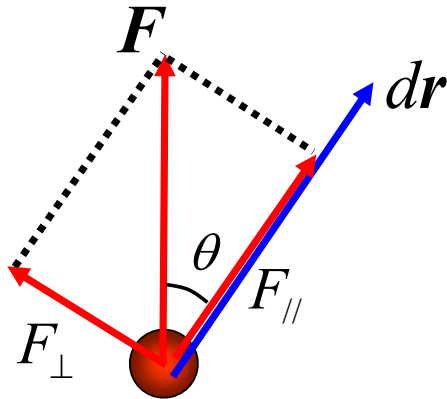
$$I = Mk^2 \quad k : \text{回転半径}$$

第7章

仕事とエネルギー

仕事 (work) の定義

(仕事) = (力の移動方向成分) × (移動距離)

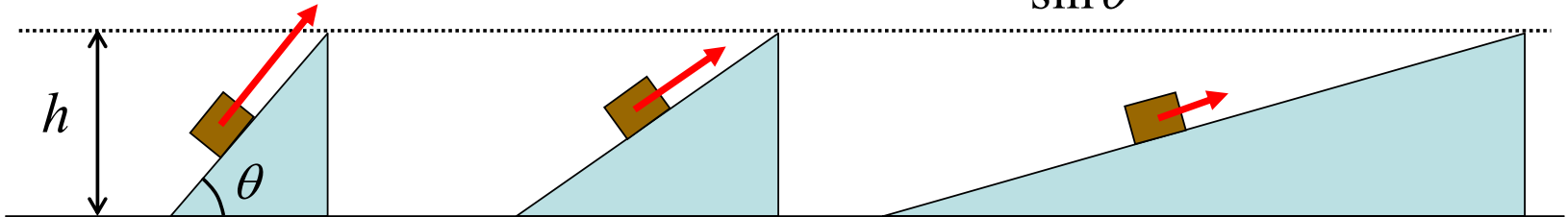


$$dW = F_{\parallel} dr$$
$$= F \cdot dr$$

仕事の単位は $\text{N} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2 = \text{J}$ (ジュール)

押す力 $F = mg \sin \theta$

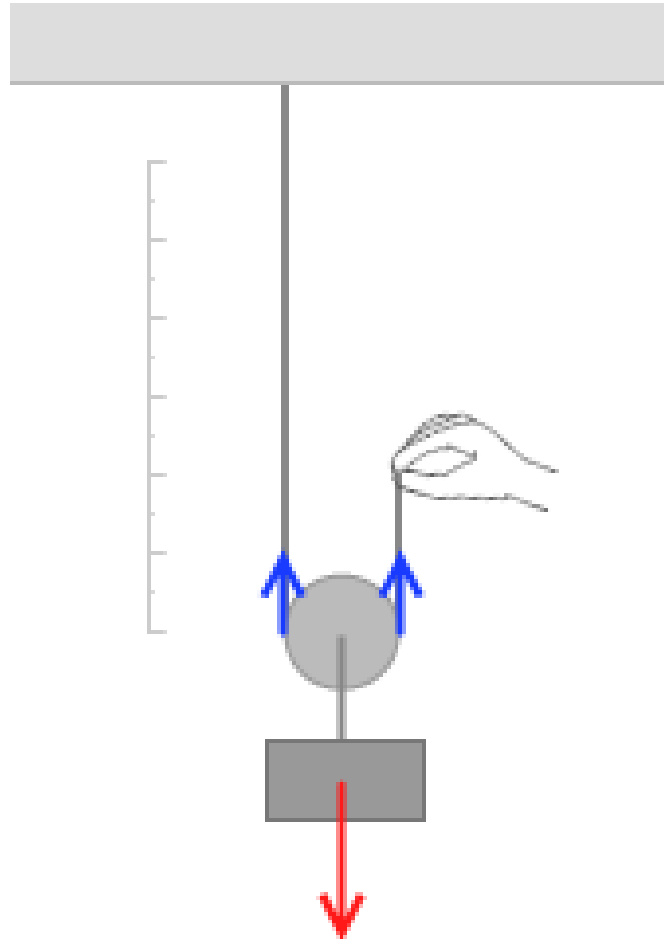
移動距離 $l = \frac{h}{\sin \theta}$



$$W = Fl = mgh$$

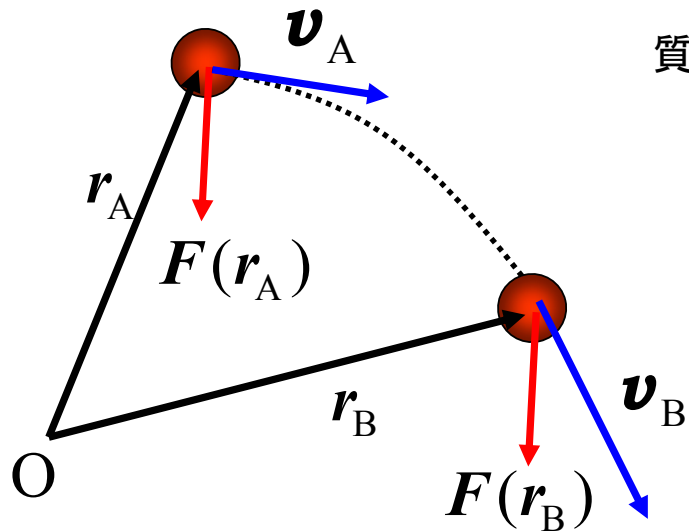
物体を高さ h だけ持ち上げる仕事は、斜面の角度に依存しない (中高で習う **仕事の原理** の一例)

仕事の原理 滑車の例



<http://www.wakariyasui.sakura.ne.jp/4-1-0-0/4-1-1-2sigotonogenri.html>

仕事と運動エネルギー



質点が点Aから点Bへ移動する間に外力がする仕事

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_A}^{r_B} m\ddot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r}$$

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \dot{\mathbf{r}} dt, \quad \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = 2\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \text{ より、}$$

$$W_{AB} = \frac{1}{2} m \int_{v_A}^{v_B} d(v^2) = \frac{1}{2} m [v^2]_{v_A}^{v_B} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

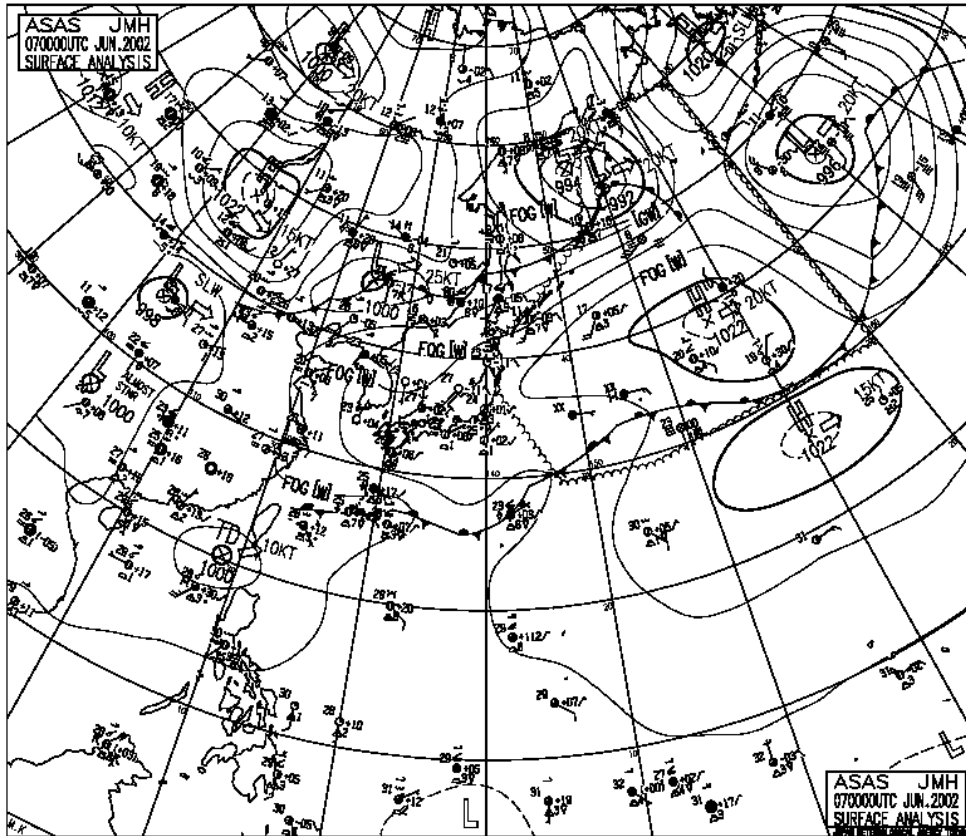
$$K \equiv \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{運動エネルギー} \\ \text{(kinetic energy)}$$

$$W_{AB} = K_B - K_A$$

運動エネルギーの変化は受けた仕事に等しい

場 (field)

空間の各位置で定義(または観測)されるような物理量



スカラー場(物理量がスカラー)

(例)

標高(2次元)

気温、気圧、

物体の密度分布

ポテンシャル(これから学ぶ)

電荷密度(冬学期に学ぶ)

ベクトル場(物理量がベクトル)

(例)

風速

重力の場(これから学ぶ)

電場、磁場、電流密度ベクトル

(冬学期に学ぶ)

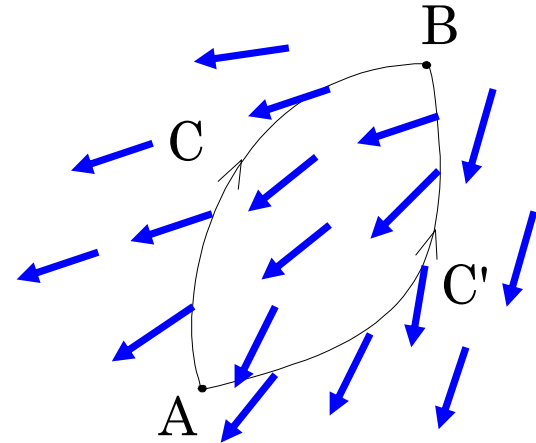
保存力の場合

質点が任意の位置Aから任意の位置Bへ移動する間に力Fの場にする仕事

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{A \rightarrow B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

が、経路Cに依存しないとき、Fを**保存力**という。
このとき、任意に選んだ二つの経路C, C'について

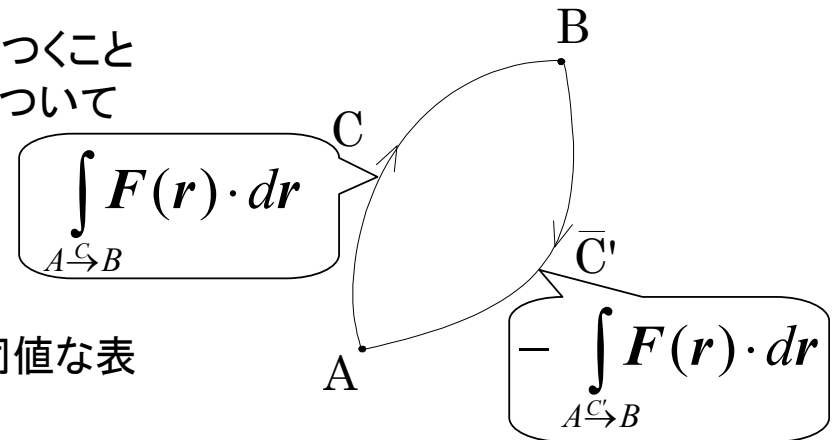
$$\int_{A \rightarrow B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{A \rightarrow B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$



が、成立する。また、経路を逆にすると負号がつくことに注意すると、元の場所に戻る任意の経路について

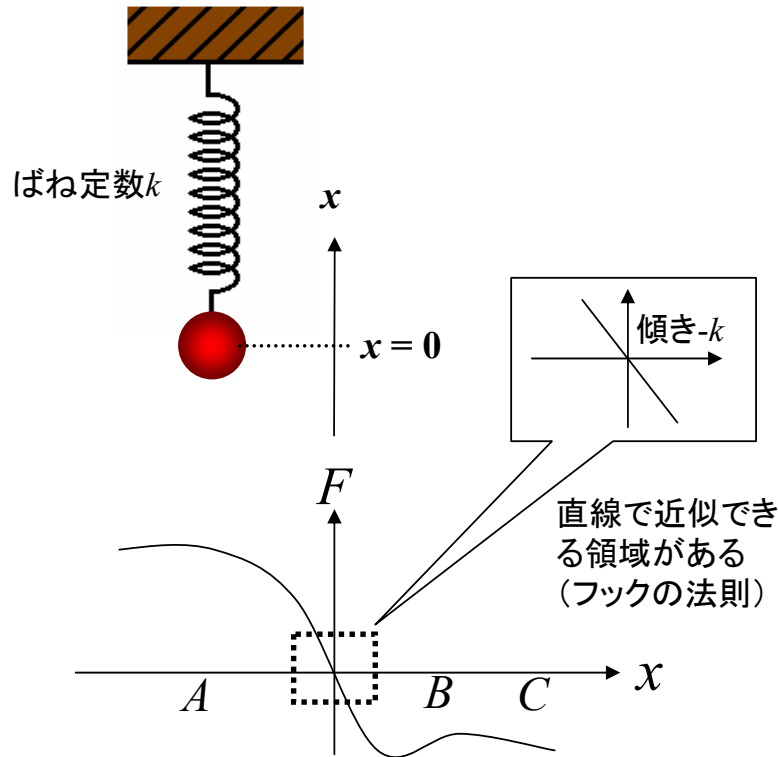
$$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

が、成立する。これはFが保存力であることと同値な表現である。



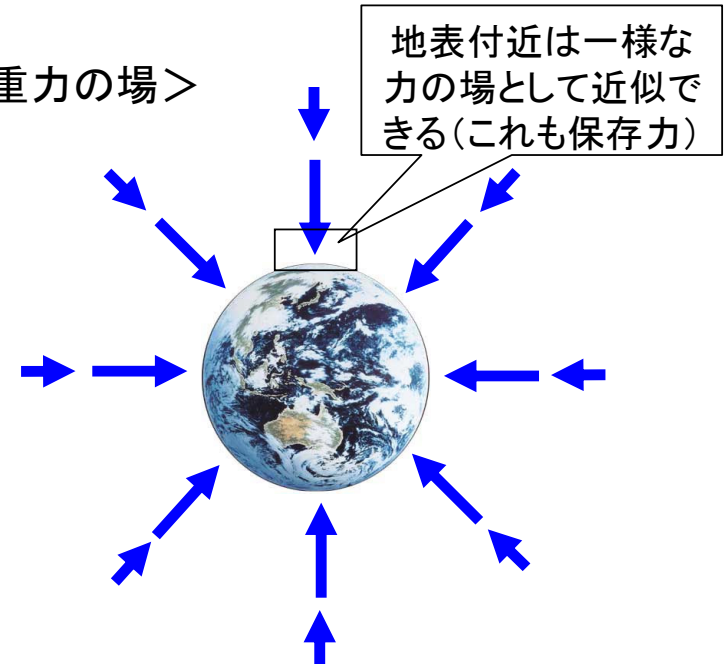
保存力の場の例

<一次元の力>



$$W_{A \rightarrow C \rightarrow B} = \int_A^C F(x) dx + \int_C^B F(x) dx = \int_A^B F(x) dx$$

<重力の場>



$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} f(r) \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_A}^{r_B} f(r) dr$$

一次元の力と同じ形

一般に**中心力**は**保存力**
クーロン力 (静電気力) も同じ

ポテンシャルとエネルギー保存則

力Fの場が保存力の場合、その力とつりあうような力(-F)を加えながら、ある基準点から、別の点まで質点を移動させるために我々がなす仕事は、経路に依存しない。つまりこの仕事をもってスカラー場が定義できる。このスカラー場をポテンシャルという。

$$U(\mathbf{r}) \equiv -\int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

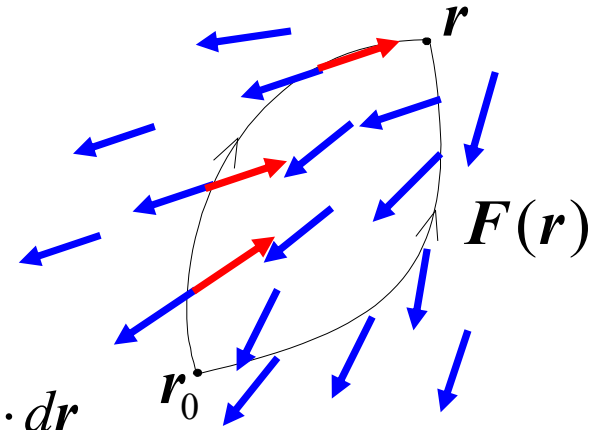
このとき、質点が点Aから点Bへ移動する間に外力がなす仕事は

$$\begin{aligned} W_{AB} &\equiv \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_A}^{r_0} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{r_0}^{r_B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= -\int_{r_0}^{r_A} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - \left(-\int_{r_0}^{r_B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \right) = U(\mathbf{r}_A) - U(\mathbf{r}_B) \end{aligned}$$

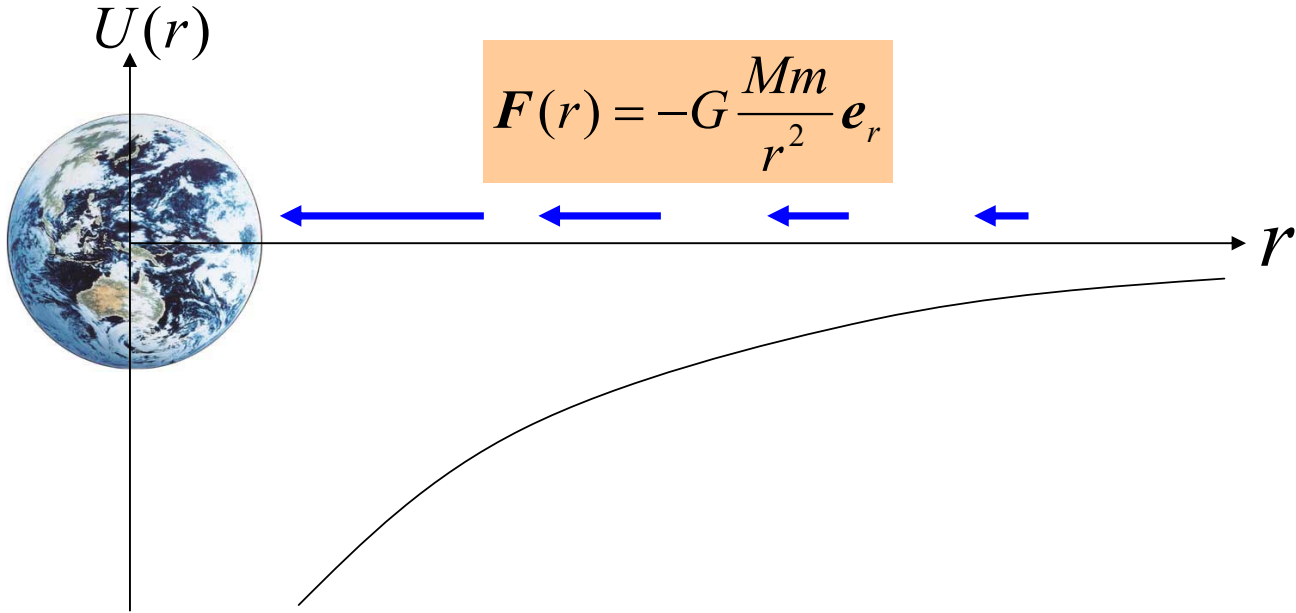
一方、 $W_{AB} = K_B - K_A$ より、

$$U(\mathbf{r}_A) - U(\mathbf{r}_B) = K_B - K_A \Leftrightarrow U(\mathbf{r}_A) + K_A = U(\mathbf{r}_B) + K_B$$

力学的エネルギーの保存則



重力のポテンシャル

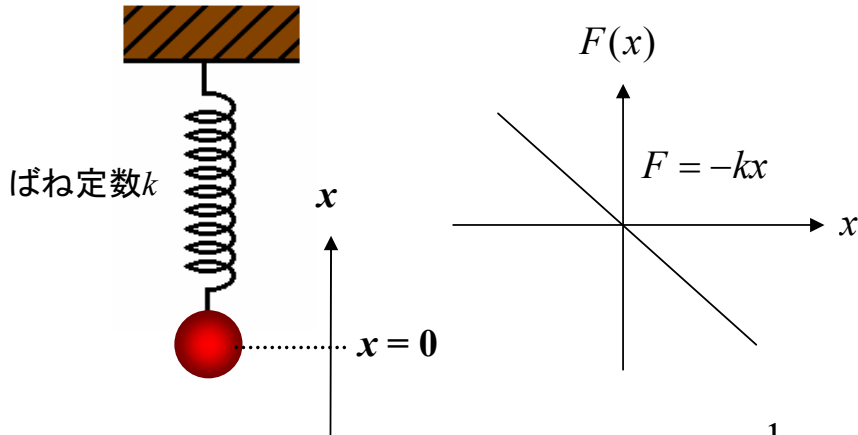


$$U(r) = -\int_{r_0}^r \mathbf{F}(r) \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_0}^r \frac{GMm}{r^2} dr = \left[-\frac{GMm}{r} \right]_{r_0}^r = -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{r_0}$$

基準点を無限遠にとると(慣習)

$$U(r) = -G \frac{Mm}{r}$$

単振動の力学的エネルギー保存則



$$U + K = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} kA^2$$

$$x = A \cos \omega t$$

$$\left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$$

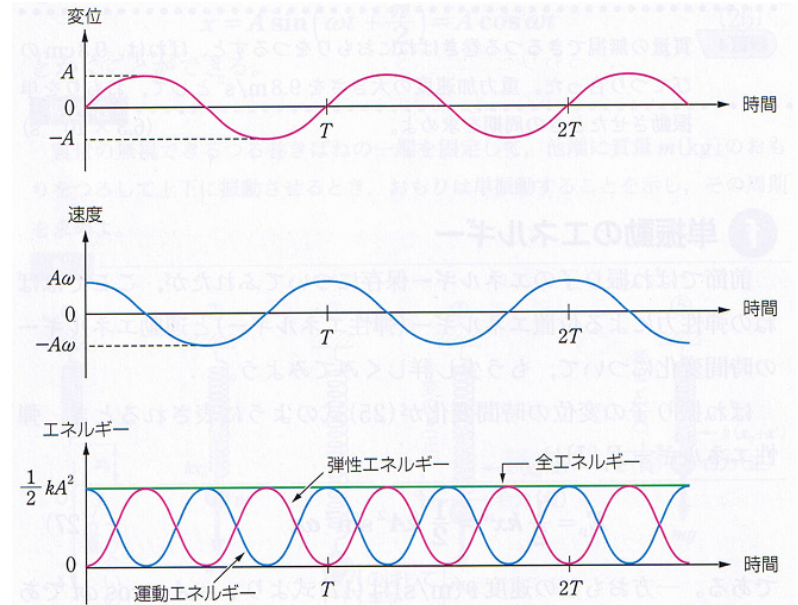
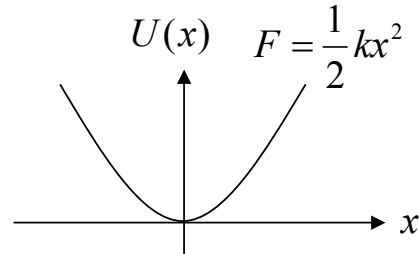


図10 単振動する物体の変位、速度、エネルギーの時間変化

$$v = \dot{x} = -A\omega \sin \omega t$$

ポテンシャルと力の微分関係

<1次元の場合>

$$U(x) \equiv -\int_{x_0}^x F(x) dx \quad U(x + \Delta x) - U(x) = -\int_x^{x+\Delta x} F(x) dx \cong -F(x)\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x + \Delta x) - U(x)}{\Delta x} = -F(x) \Leftrightarrow F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

<3次元の場合>

$$U(\mathbf{r}) \equiv -\int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad U(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \cong -\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \Delta\mathbf{r}$$

成分表示すると

$$U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z) \cong -(F_x(\mathbf{r})\Delta x + F_y(\mathbf{r})\Delta y + F_z(\mathbf{r})\Delta z)$$

$\Delta y=0$ 、 $\Delta z=0$ とおくと、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x} = -F_x(\mathbf{r}) \Leftrightarrow F_x(\mathbf{r}) = -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x}$$

ポテンシャルの勾配 (gradient)

$$F_x(\mathbf{r}) = -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x}, \quad F_y(\mathbf{r}) = -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial y}, \quad F_z(\mathbf{r}) = -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z}$$

これらをまとめて表すと

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (F_x(\mathbf{r}), F_y(\mathbf{r}), F_z(\mathbf{r})) = -\left(\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x}, \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial y}, \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)U(\mathbf{r})$$

ここで**ナブラ演算子**を定義する

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \quad \text{ナブラ演算子}$$

すると、力は簡単に

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$$

と表せる。 ∇ はこの場合「gradient(グラディエント: 勾配)」と読む。

第8章

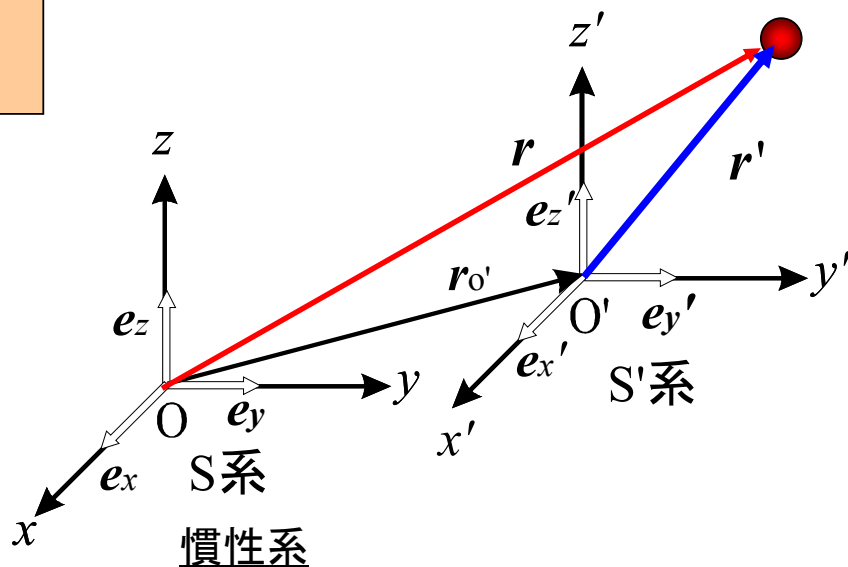
相対運動と慣性力

慣性系に対して移動している座標系

慣性系 = 慣性の法則が成立する系
(力が働かなければ、運動量は変化しない)

S系(慣性系)から見た物体の位置ベクトルを r とする。
S系に対して、移動している座標系をS'系とし、その原点の座標を $r_{O'}$ とする。
S'系から見た物体の位置ベクトルを r' とすると。

$$r = r_{O'} + r'$$



S系は慣性系なので、ニュートンの運動方程式が成立するので、

$$m(\ddot{r}_{O'} + \ddot{r}') = F$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{r}' = F - m\ddot{r}_{O'}$$

「慣性力」と呼ばれる

$\ddot{r}_{O'} = 0 \rightarrow$ S'系も慣性系(なぜなら、力が働かなければ、運動量は変化しないから)

$\ddot{r}_{O'} \neq 0 \rightarrow$ S'系は慣性系ではない。しかし、 $-m\ddot{r}_{O'}$ を力と考えれば、ニュートンの運動方程式が見かけ上成立する。

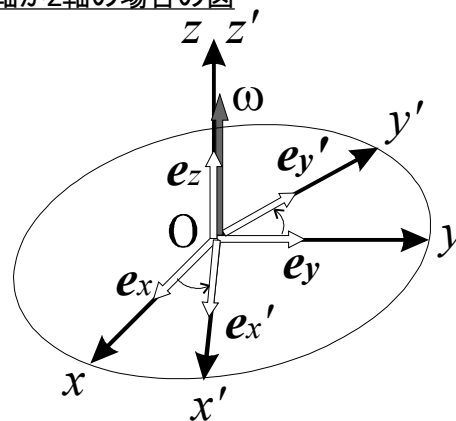
慣性系に対して回転している座標系

慣性系であるS系に対し、S'系が角速度ベクトル ω で回転しているとする。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{d}{dt} (x' \mathbf{e}_{x'} + y' \mathbf{e}_{y'} + z' \mathbf{e}_{z'}) \\ &= \dot{x}' \mathbf{e}_{x'} + \dot{y}' \mathbf{e}_{y'} + \dot{z}' \mathbf{e}_{z'} + x' \dot{\mathbf{e}}_{x'} + y' \dot{\mathbf{e}}_{y'} + z' \dot{\mathbf{e}}_{z'} \\ &= \dot{x}' \mathbf{e}_{x'} + \dot{y}' \mathbf{e}_{y'} + \dot{z}' \mathbf{e}_{z'} + x' (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_{x'}) + y' (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_{y'}) + z' (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_{z'}) \\ &= \dot{x}' \mathbf{e}_{x'} + \dot{y}' \mathbf{e}_{y'} + \dot{z}' \mathbf{e}_{z'} + \boldsymbol{\omega} \times (x' \mathbf{e}_{x'} + y' \mathbf{e}_{y'} + z' \mathbf{e}_{z'}) \\ &= \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d^2}{dt^2} (x' \mathbf{e}_{x'} + y' \mathbf{e}_{y'} + z' \mathbf{e}_{z'}) \\ &= (\text{中略}) \\ &= \ddot{x}' \mathbf{e}_{x'} + \ddot{y}' \mathbf{e}_{y'} + \ddot{z}' \mathbf{e}_{z'} + 2\boldsymbol{\omega} \times (\dot{x}' \mathbf{e}_{x'} + \dot{y}' \mathbf{e}_{y'} + \dot{z}' \mathbf{e}_{z'}) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (x' \mathbf{e}_{x'} + y' \mathbf{e}_{y'} + z' \mathbf{e}_{z'})] \\ &= \ddot{\mathbf{r}}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \end{aligned}$$

回転軸がz軸の場合の図



S'系における位置、速度、加速度ベクトル

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= x' \mathbf{e}_{x'} + y' \mathbf{e}_{y'} + z' \mathbf{e}_{z'} (= \mathbf{r}) \\ \dot{\mathbf{r}}' &= \dot{x}' \mathbf{e}_{x'} + \dot{y}' \mathbf{e}_{y'} + \dot{z}' \mathbf{e}_{z'} (\neq \dot{\mathbf{r}}) \\ \ddot{\mathbf{r}}' &= \ddot{x}' \mathbf{e}_{x'} + \ddot{y}' \mathbf{e}_{y'} + \ddot{z}' \mathbf{e}_{z'} (\neq \ddot{\mathbf{r}}) \end{aligned}$$

遠心力とコリオリ力

S系での加速度を、S'系での加速度、速度、位置ベクトルで表現すると

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

S系では、ニュートンの運動方程式が成立するから

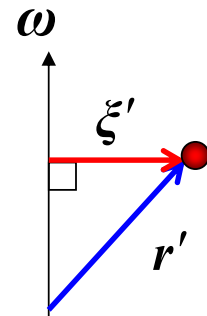
$$m\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$

$$\Leftrightarrow m[\dot{\mathbf{r}}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')] = \mathbf{F}$$

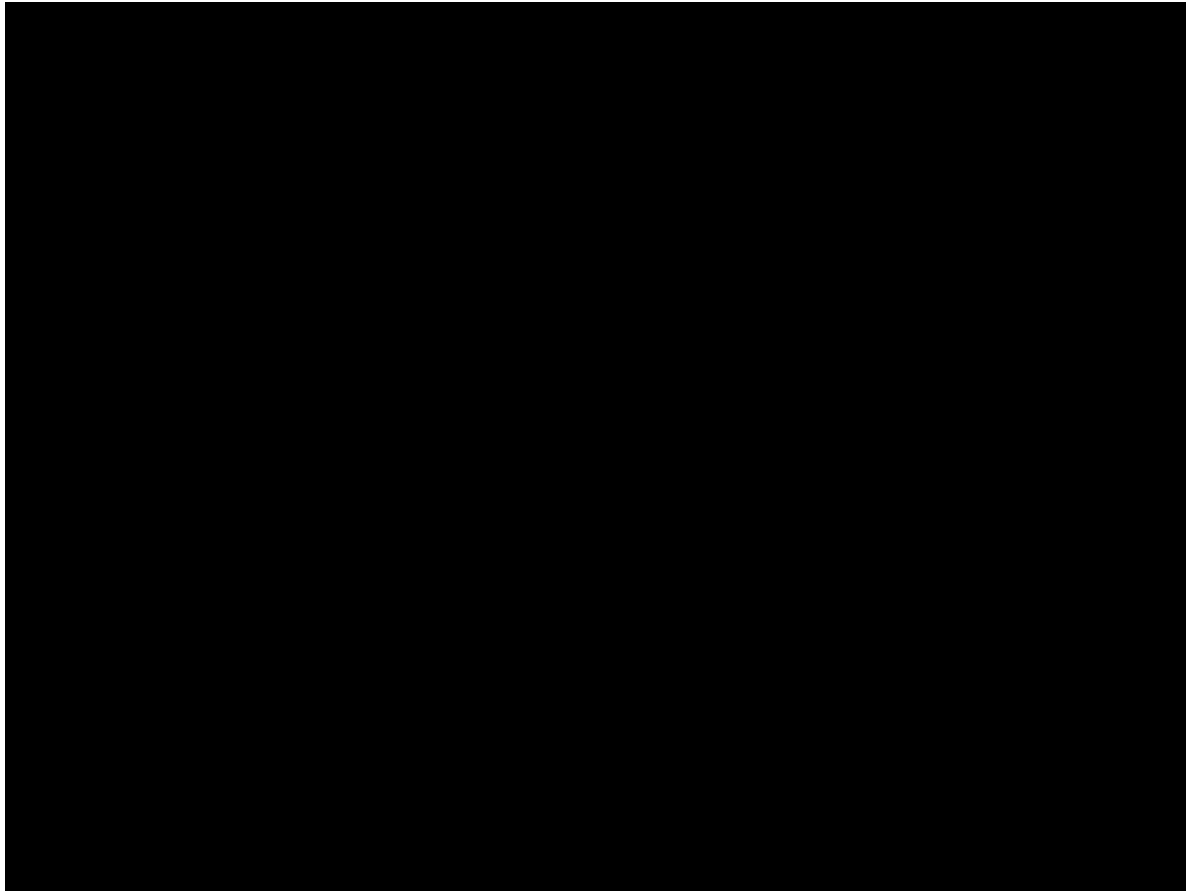
$$\Leftrightarrow m\dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F} - \underbrace{2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'}_{\text{コリオリ力}} - \underbrace{m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')}_{\text{遠心力}}$$

$$\mathbf{F}_{\text{col}} \equiv -2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'$$

$$\mathbf{F}_{\text{cen}} \equiv -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = m\omega^2 \boldsymbol{\xi}'$$



コリオリ力を見る実験

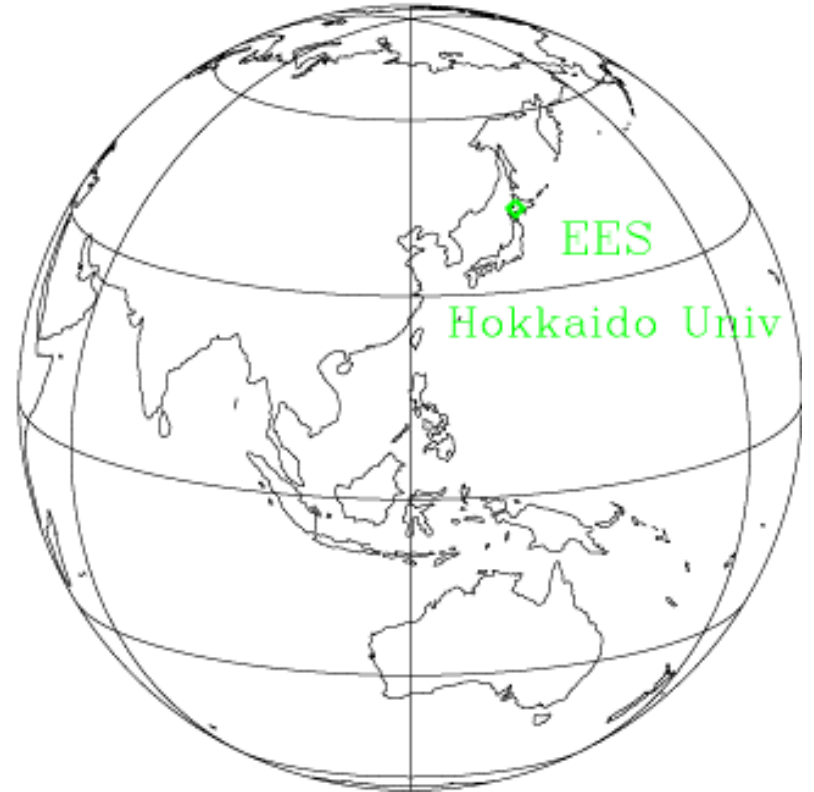


http://coast14.ees.hokudai.ac.jp/osj/umi_no_kyousitu/02coriolis_01.html

Inertial System

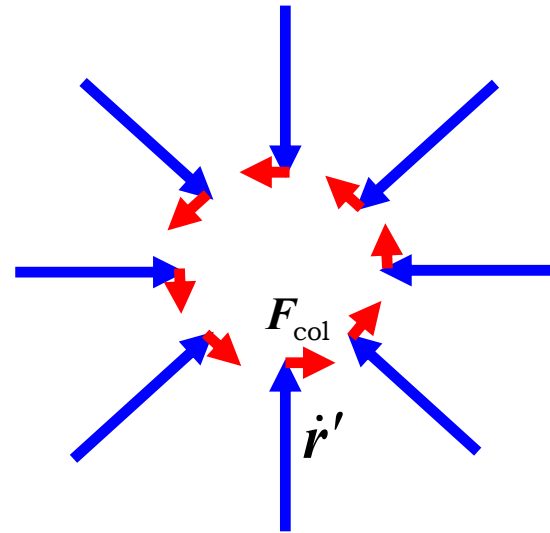
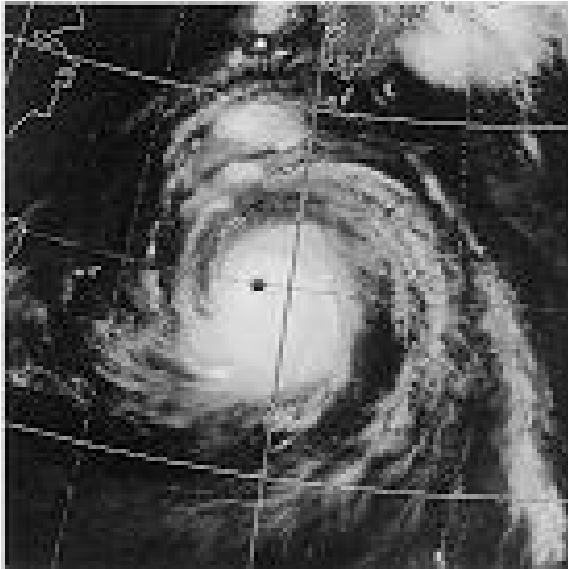


Rotating System

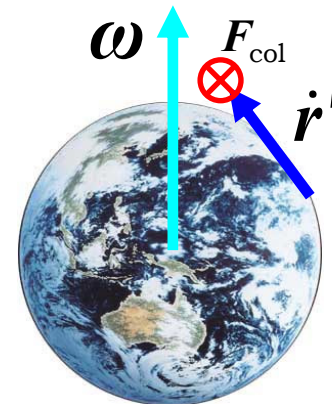


コリオリ力と台風の渦

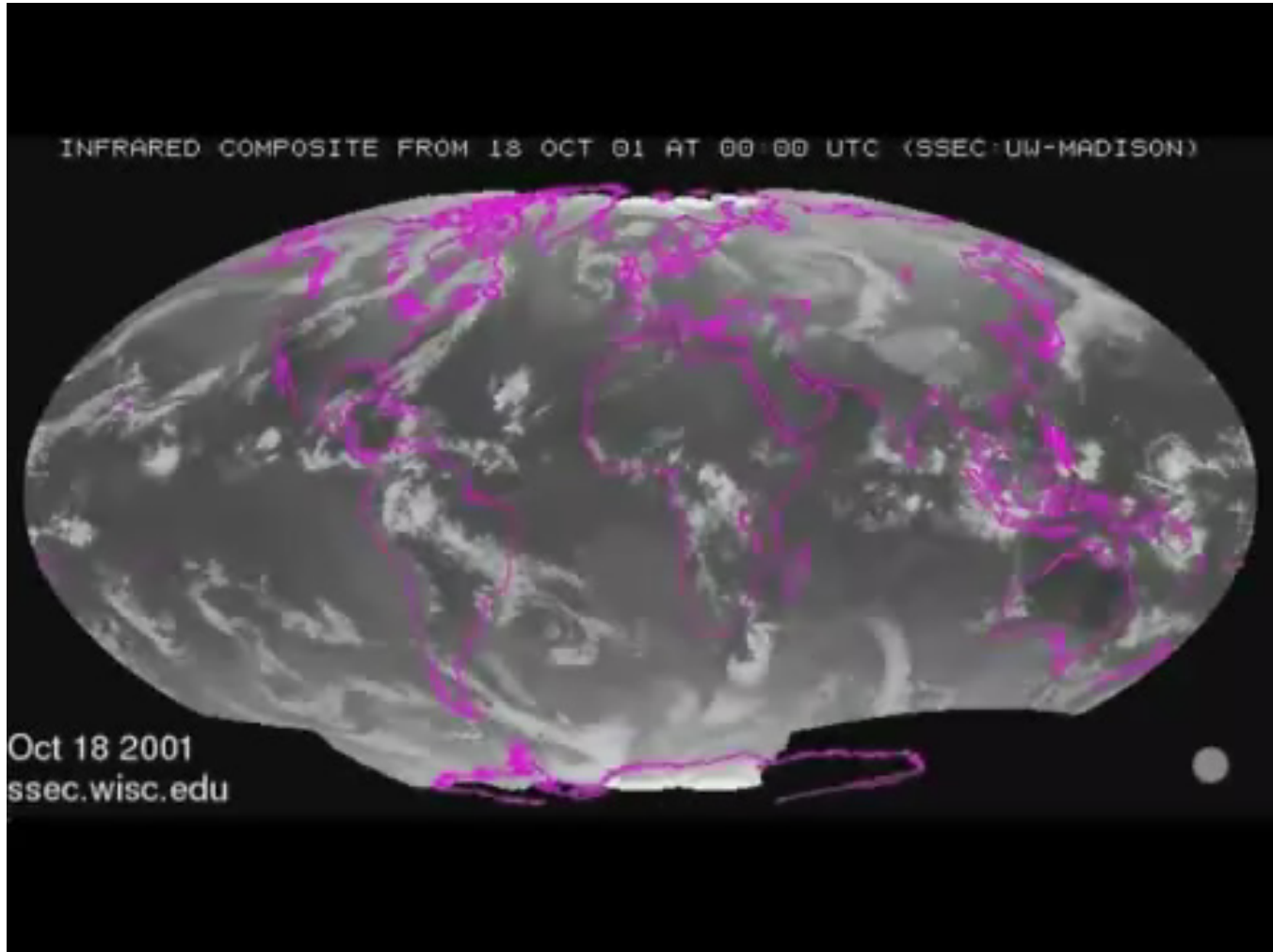
北半球における台風の渦



$$\begin{aligned} F_{col} &= -2m\omega \times \dot{r}' \\ &= 2m\dot{r}' \times \omega \end{aligned}$$

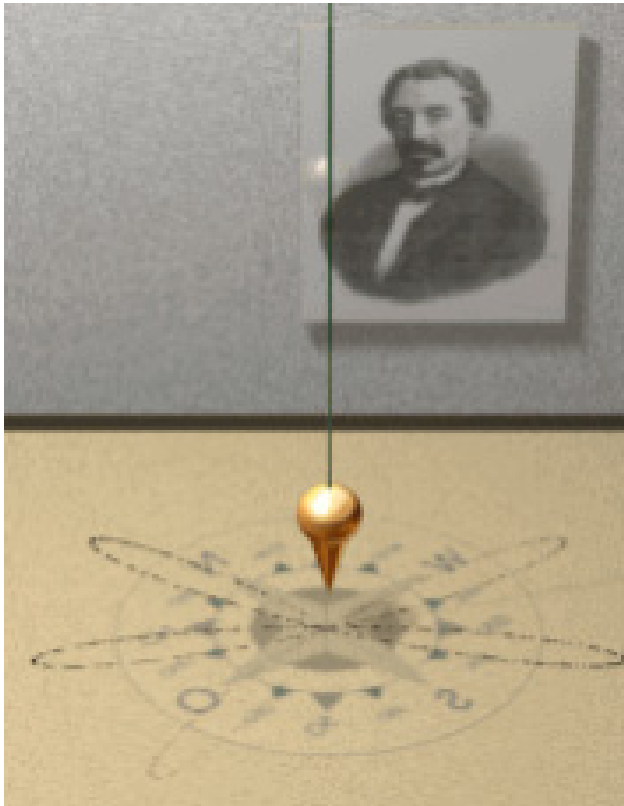


コリオリ力と偏西風



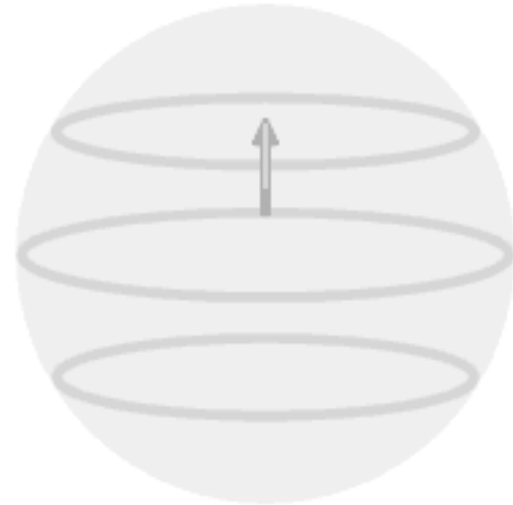
フーコーの振り子 (1851)

北半球におけるフーコーの振り子



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a1/Foucault_pendulum_animated.gif

1周に必要な時間(日) = $1/\sin \theta$
(θ は振り子の場所の緯度)



The animation describes the motion of a Foucault Pendulum at a latitude of 30° N. The plane of oscillation rotates by an angle of -180° during one day, so after two days the plane returns to its original orientation.

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/0/0d/Foucault_pendulum_plane_of_swing_semi3D.gif