

# 第8章

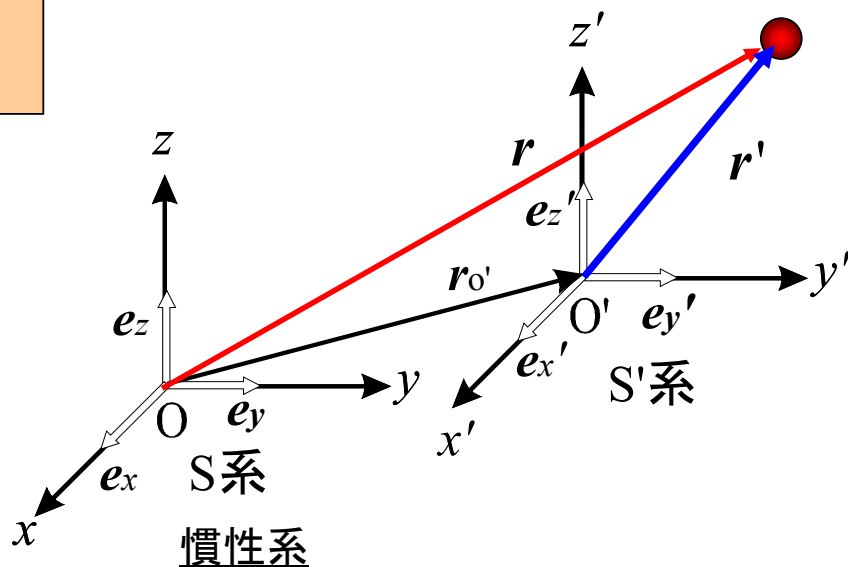
## 相対運動と慣性力

# 慣性系に対して移動している座標系

慣性系 = 慣性の法則が成立する系  
(力が働かなければ、運動量は変化しない)

S系(慣性系)から見た物体の位置ベクトルを  $r$  とする。  
S系に対して、移動している座標系をS'系とし、その原点の座標を  $r_{O'}$  とする。  
S'系から見た物体の位置ベクトルを  $r'$  とすると。

$$r = r_{O'} + r'$$



S系は慣性系なので、ニュートンの運動方程式が成立するので、

$$m(\ddot{r}_{O'} + \ddot{r}') = F$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{r}' = F - m\ddot{r}_{O'}$$

「慣性力」と呼ばれる

$\ddot{r}_{O'} = 0 \rightarrow$  S'系も慣性系(なぜなら、力が働かなければ、運動量は変化しないから)

$\ddot{r}_{O'} \neq 0 \rightarrow$  S'系は慣性系ではない。しかし、 $-m\ddot{r}_{O'}$  を力と考えれば、ニュートンの運動方程式が見かけ上成立する。

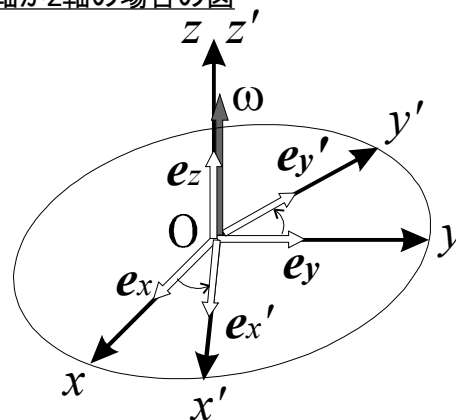
# 慣性系に対して回転している座標系

慣性系であるS系に対し、S'系が角速度ベクトル $\omega$ で回転しているとする。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{d}{dt} (x' \mathbf{e}_{x'} + y' \mathbf{e}_{y'} + z' \mathbf{e}_{z'}) \\ &= \dot{x}' \mathbf{e}_{x'} + \dot{y}' \mathbf{e}_{y'} + \dot{z}' \mathbf{e}_{z'} + x' \dot{\mathbf{e}}_{x'} + y' \dot{\mathbf{e}}_{y'} + z' \dot{\mathbf{e}}_{z'} \\ &= \dot{x}' \mathbf{e}_{x'} + \dot{y}' \mathbf{e}_{y'} + \dot{z}' \mathbf{e}_{z'} + x' (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_{x'}) + y' (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_{y'}) + z' (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_{z'}) \\ &= \dot{x}' \mathbf{e}_{x'} + \dot{y}' \mathbf{e}_{y'} + \dot{z}' \mathbf{e}_{z'} + \boldsymbol{\omega} \times (x' \mathbf{e}_{x'} + y' \mathbf{e}_{y'} + z' \mathbf{e}_{z'}) \\ &= \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d^2}{dt^2} (x' \mathbf{e}_{x'} + y' \mathbf{e}_{y'} + z' \mathbf{e}_{z'}) \\ &= (\text{中略}) \\ &= \ddot{x}' \mathbf{e}_{x'} + \ddot{y}' \mathbf{e}_{y'} + \ddot{z}' \mathbf{e}_{z'} + 2\boldsymbol{\omega} \times (\dot{x}' \mathbf{e}_{x'} + \dot{y}' \mathbf{e}_{y'} + \dot{z}' \mathbf{e}_{z'}) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (x' \mathbf{e}_{x'} + y' \mathbf{e}_{y'} + z' \mathbf{e}_{z'})] \\ &= \ddot{\mathbf{r}}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \end{aligned}$$

回転軸がz軸の場合の図



S'系における位置、速度、加速度ベクトル

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= x' \mathbf{e}_{x'} + y' \mathbf{e}_{y'} + z' \mathbf{e}_{z'} (= \mathbf{r}) \\ \dot{\mathbf{r}}' &= \dot{x}' \mathbf{e}_{x'} + \dot{y}' \mathbf{e}_{y'} + \dot{z}' \mathbf{e}_{z'} (\neq \dot{\mathbf{r}}) \\ \ddot{\mathbf{r}}' &= \ddot{x}' \mathbf{e}_{x'} + \ddot{y}' \mathbf{e}_{y'} + \ddot{z}' \mathbf{e}_{z'} (\neq \ddot{\mathbf{r}}) \end{aligned}$$

# 遠心力とコリオリ力

S系での加速度を、S'系での加速度、速度、位置ベクトルで表現すると

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

S系では、ニュートンの運動方程式が成立するから

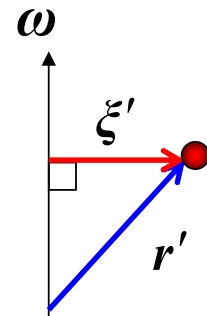
$$m\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$

$$\Leftrightarrow m[\dot{\mathbf{r}}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')] = \mathbf{F}$$

$$\Leftrightarrow m\dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F} - \underbrace{2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'}_{\text{コリオリ力}} - \underbrace{m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')}_{\text{遠心力}}$$

$$\mathbf{F}_{\text{col}} \equiv -2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'$$

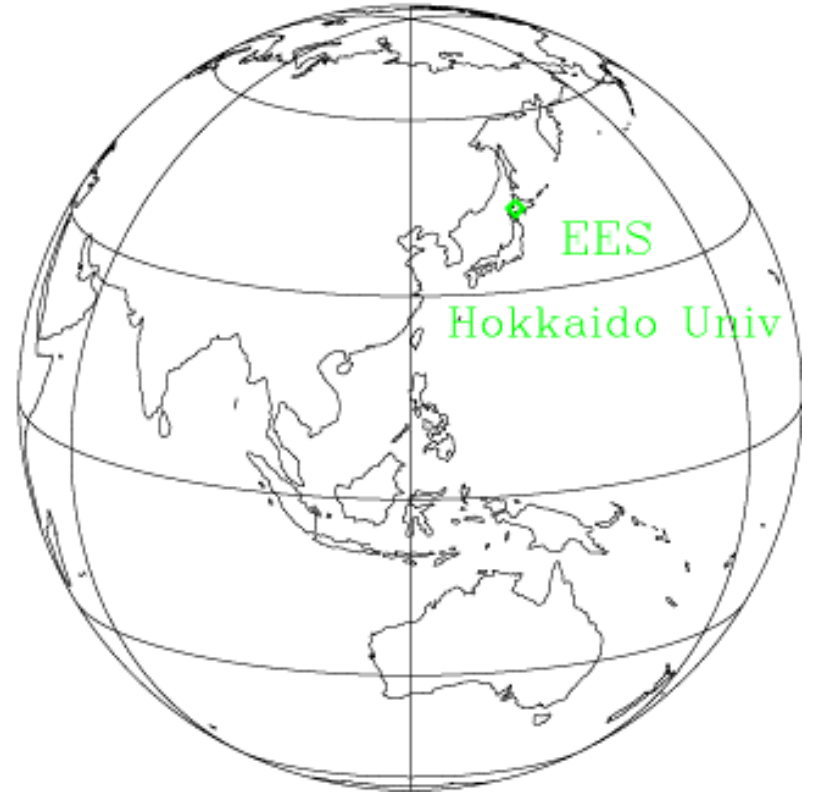
$$\mathbf{F}_{\text{cen}} \equiv -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = m\omega^2 \boldsymbol{\xi}'$$



Inertial System

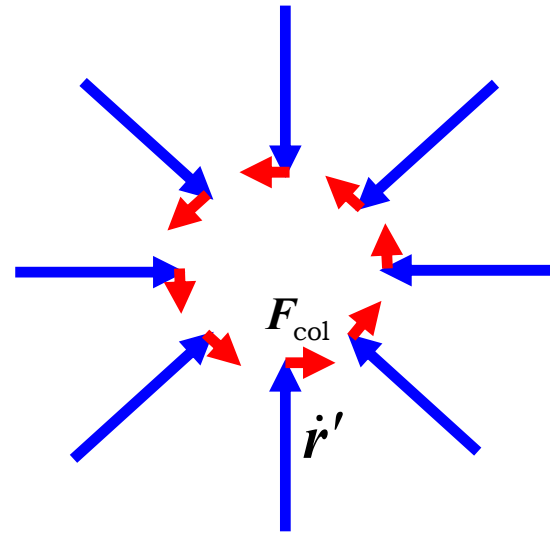
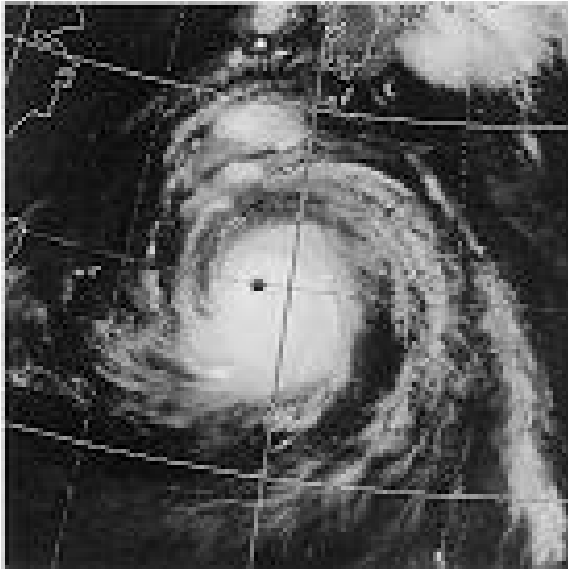


Rotating System

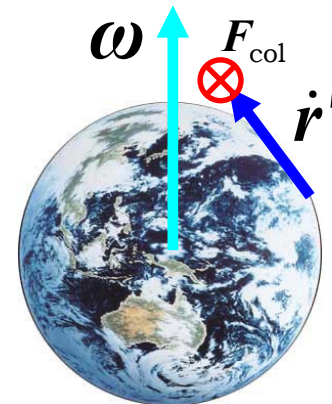


# コリオリ力と台風の渦

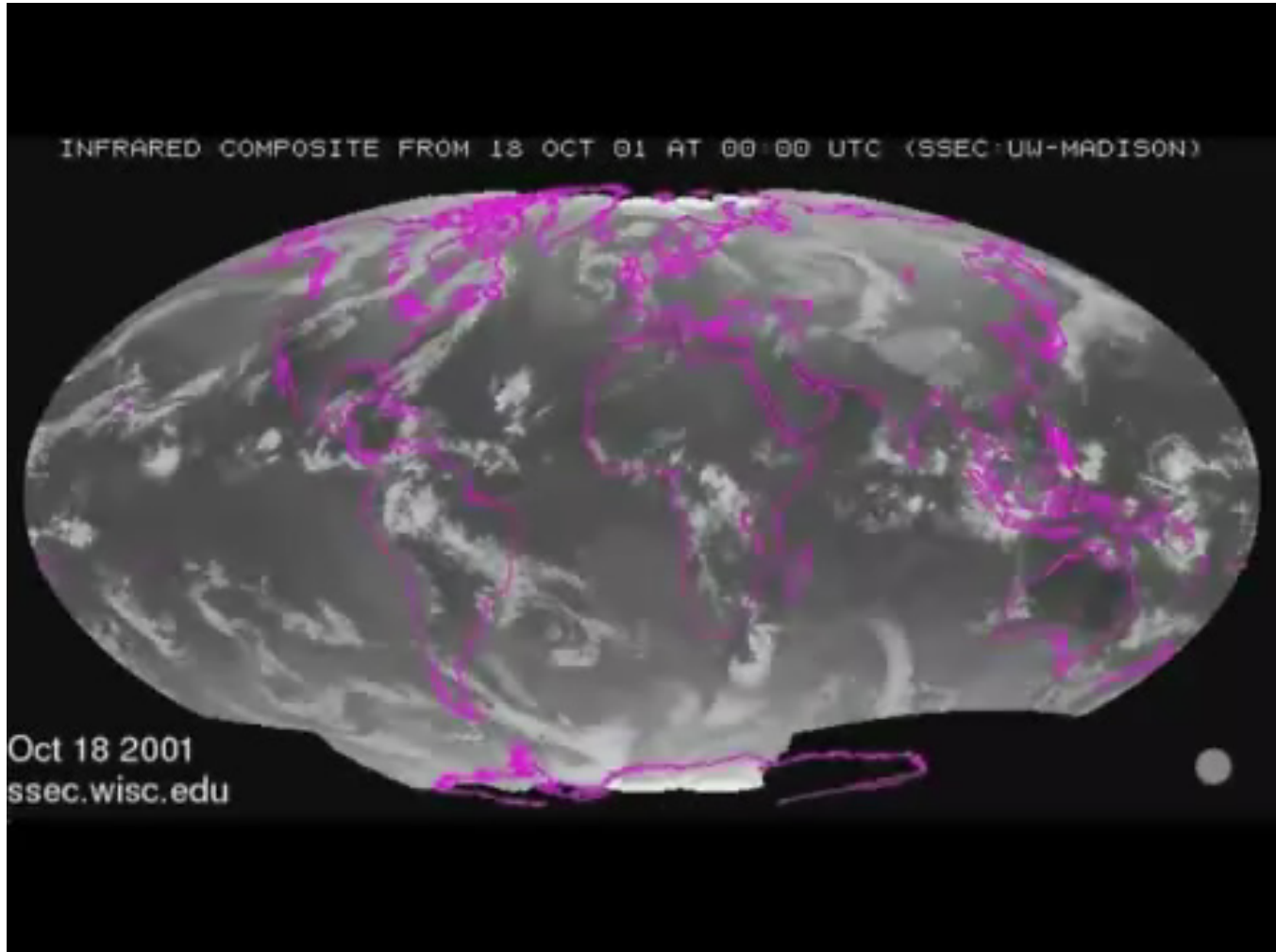
北半球における台風の渦



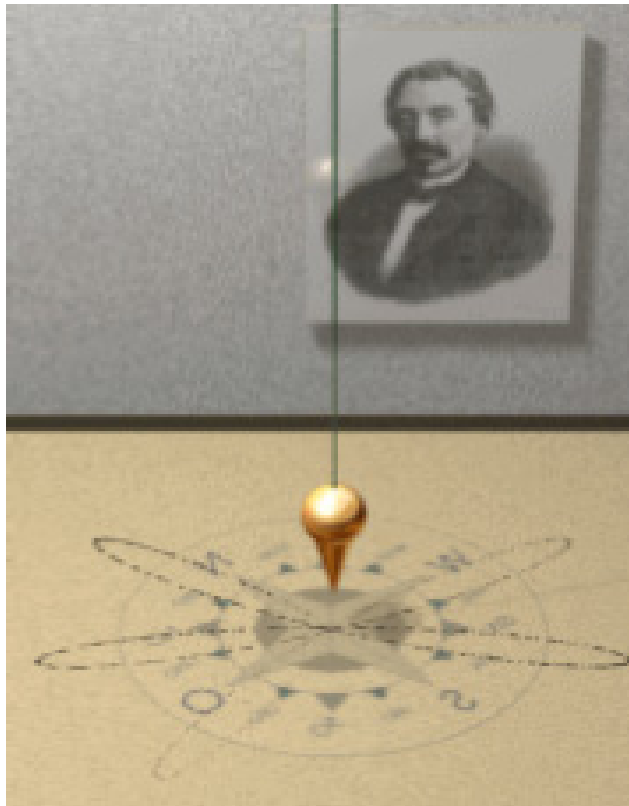
$$\begin{aligned} F_{col} &= -2m\omega \times \dot{r}' \\ &= 2m\dot{r}' \times \omega \end{aligned}$$



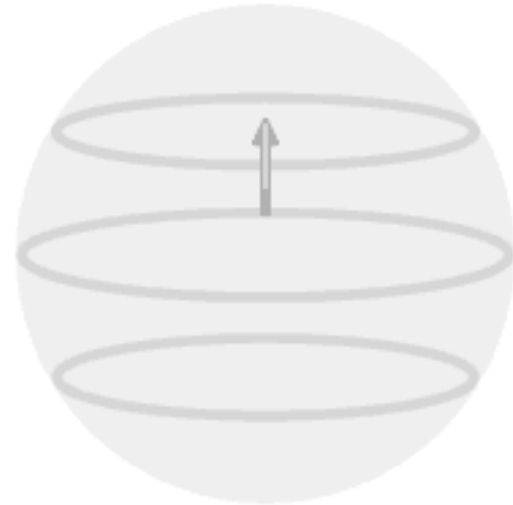
# コリオリ力と偏西風



# フーコーの振り子 (1851)



1周に必要な時間(日) =  $1/\sin \theta$   
( $\theta$  は振り子の場所の緯度)



The animation describes the motion of a Foucault Pendulum at a latitude of  $30^\circ$  N. The plane of oscillation rotates by an angle of  $-180^\circ$  during one day, so after two days the plane returns to its original orientation.

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a1/Foucault\\_pendulum\\_animated.gif](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a1/Foucault_pendulum_animated.gif)

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/0/0d/Foucault\\_pendulum\\_plane\\_of\\_swing\\_semi3D.gif](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/0/0d/Foucault_pendulum_plane_of_swing_semi3D.gif)