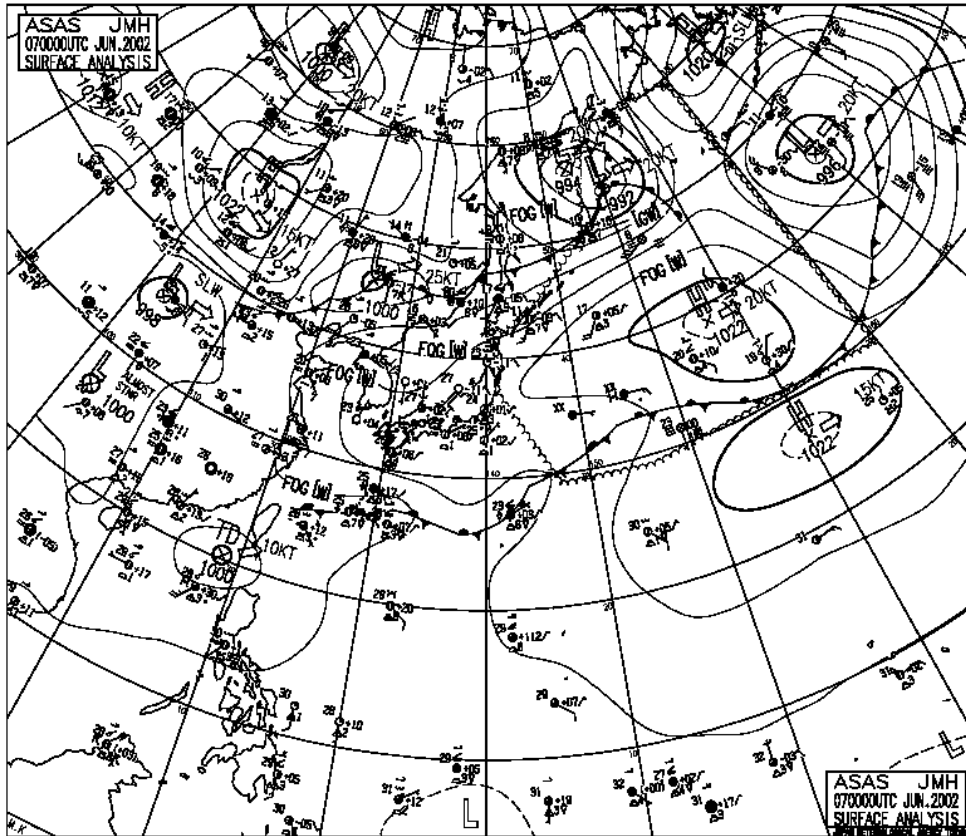


場 (field)

空間の各位置で定義(または観測)されるような物理量



スカラー場(物理量がスカラー)

(例)

標高(2次元)

気温、気圧、

物体の密度分布

ポテンシャル(これから学ぶ)

電荷密度(冬学期に学ぶ)

ベクトル場(物理量がベクトル)

(例)

風速

重力の場(これから学ぶ)

電場、磁場、電流密度ベクトル

(冬学期に学ぶ)

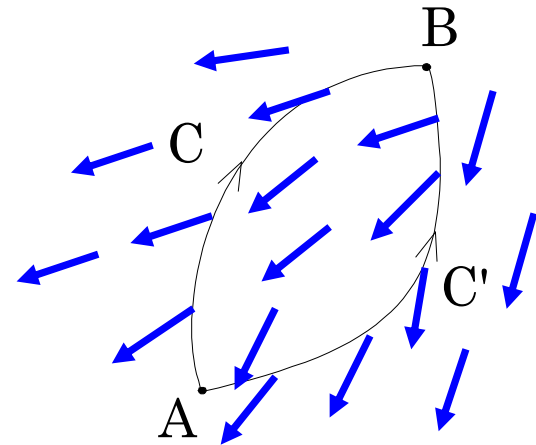
保存力の場合

質点が任意の位置Aから任意の位置Bへ移動する間に力Fの場にする仕事

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{A \rightarrow B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

が、経路Cに依存しないとき、Fを**保存力**という。
このとき、任意に選んだ二つの経路C, C'について

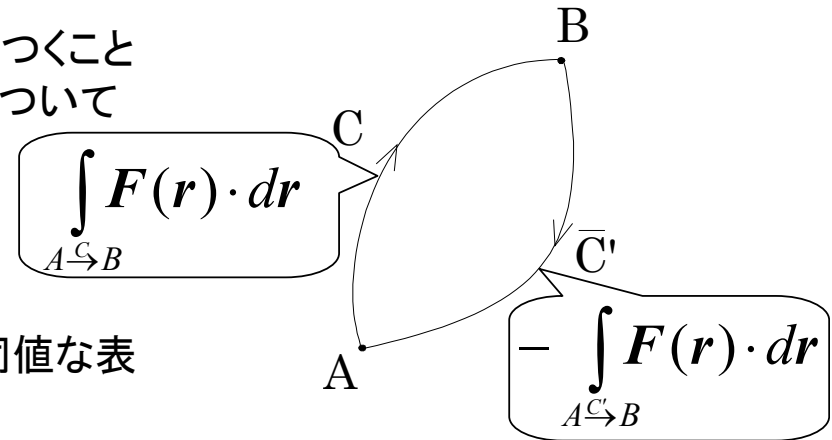
$$\int_{A \rightarrow B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{A \rightarrow B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$



が、成立する。また、経路を逆にすると負号がつくことに注意すると、元の場所に戻る任意の経路について

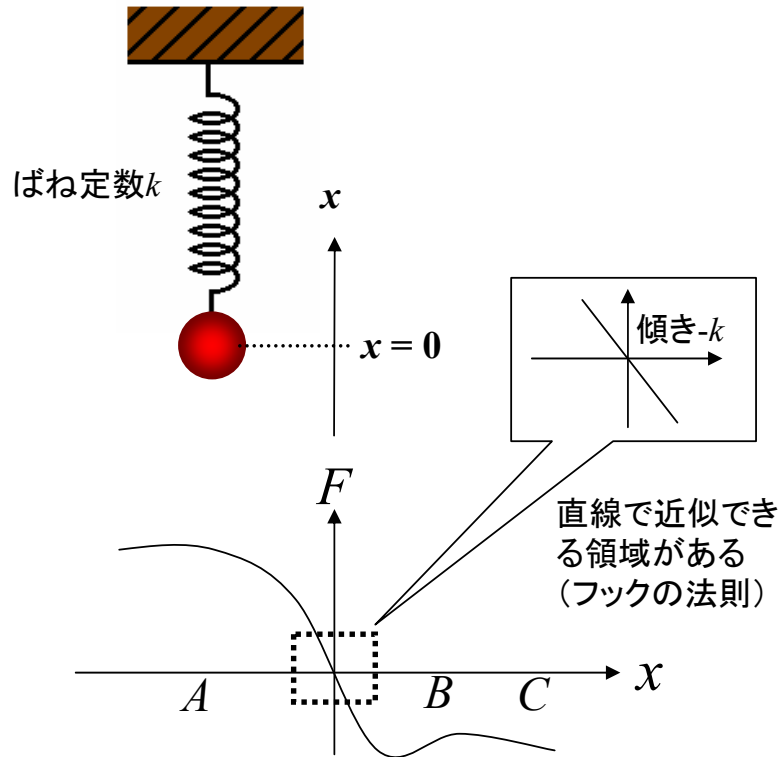
$$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

が、成立する。これはFが保存力であることと同値な表現である。



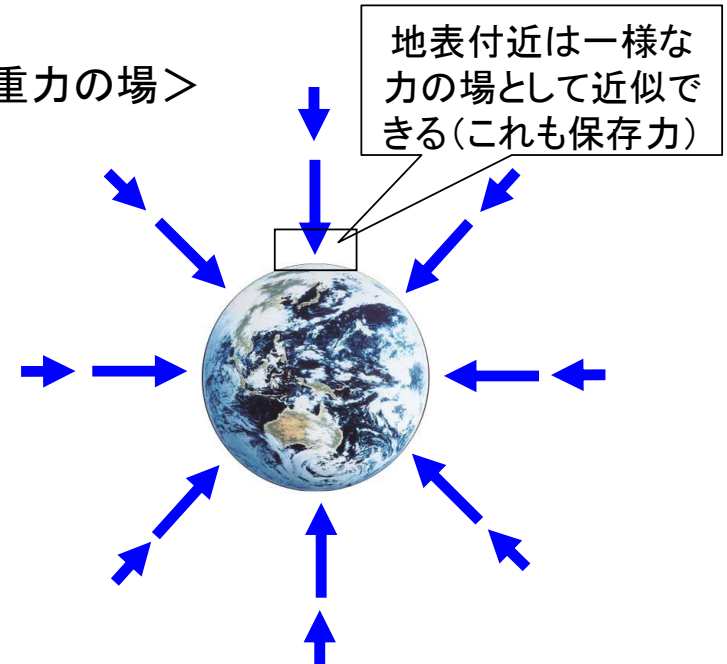
保存力の場の例

<一次元の力>



$$W_{A \rightarrow C \rightarrow B} = \int_A^C F(x) dx + \int_C^B F(x) dx = \int_A^B F(x) dx$$

<重力の場>



$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} f(r) \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_A}^{r_B} f(r) dr$$

一次元の力と同じ形

一般に**中心力**は**保存力**
クーロン力 (静電気力) も同じ

ポテンシャルとエネルギー保存則

力 F の場が保存力の場合、その力とつりあうような力($-F$)を加えながら、ある基準点から、別の点まで質点を移動させるために我々がなす仕事は、経路に依存しない。つまりこの仕事をもってスカラー場が定義できる。このスカラー場をポテンシャルという。

$$U(\mathbf{r}) \equiv -\int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

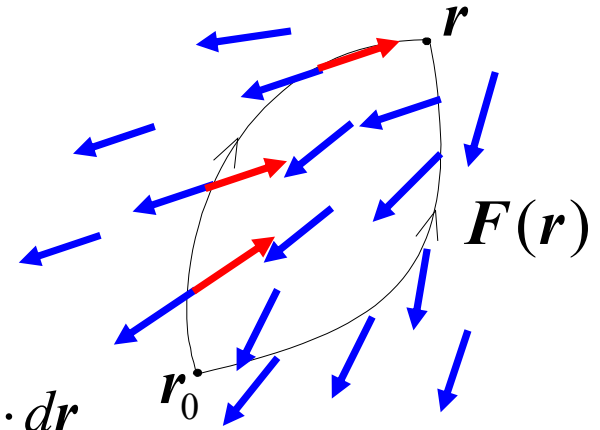
このとき、質点が点Aから点Bへ移動する間に外力がなす仕事は

$$\begin{aligned} W_{AB} &\equiv \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_A}^{r_0} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{r_0}^{r_B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= -\int_{r_0}^{r_A} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - \left(-\int_{r_0}^{r_B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \right) = U(r_A) - U(r_B) \end{aligned}$$

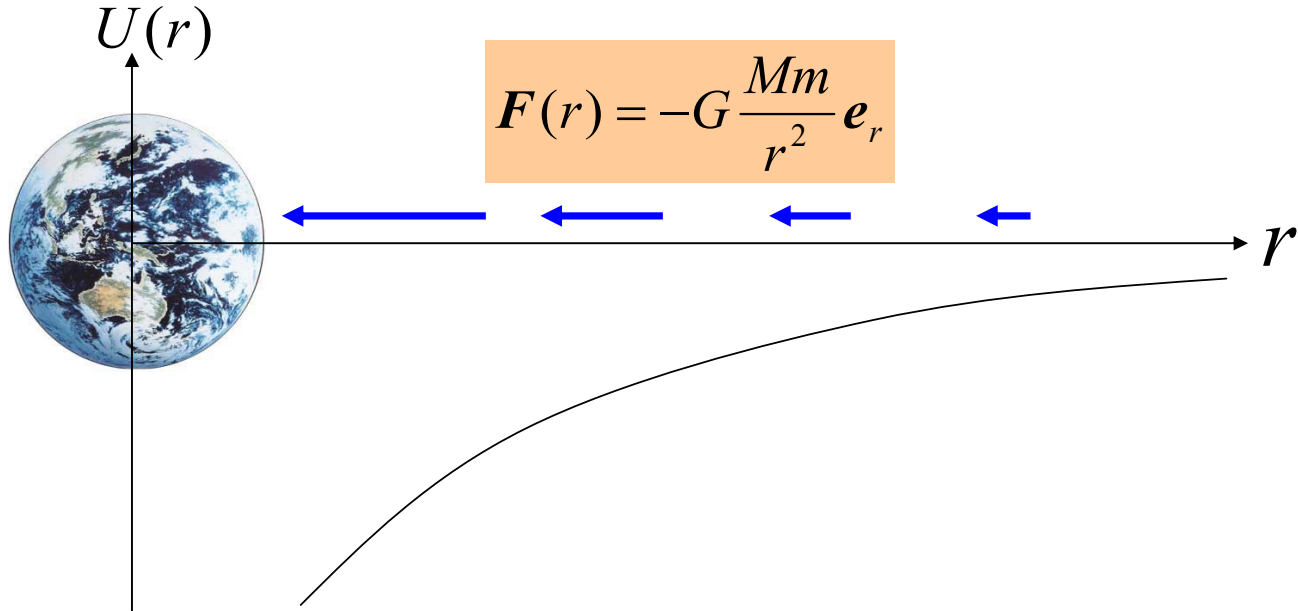
一方、 $W_{AB} = K_B - K_A$ より、

$$U(r_A) - U(r_B) = K_B - K_A \Leftrightarrow U(r_A) + K_A = U(r_B) + K_B$$

力学的エネルギーの保存則



重力のポテンシャル

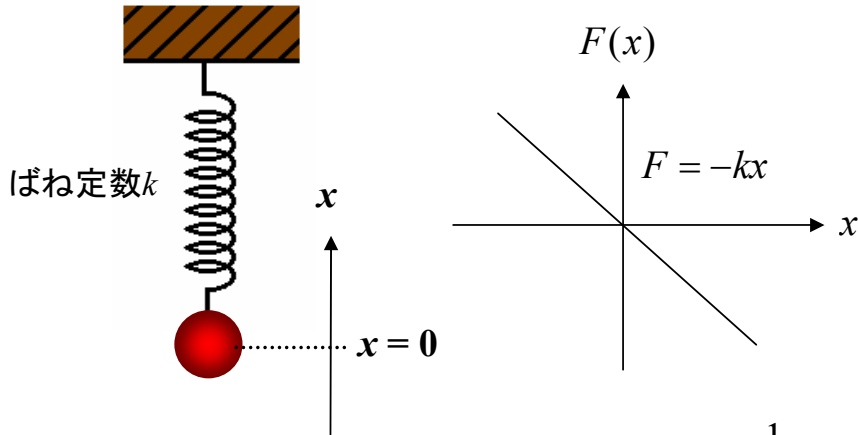


$$U(r) = -\int_{r_0}^r \mathbf{F}(r) \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_0}^r \frac{GMm}{r^2} dr = \left[-\frac{GMm}{r} \right]_{r_0}^r = -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{r_0}$$

基準点を無限遠にとると(慣習)

$$U(r) = -G \frac{Mm}{r}$$

単振動の力学的エネルギー保存則



$$U + K = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} kA^2$$

$$x = A \cos \omega t$$

$$\left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$$

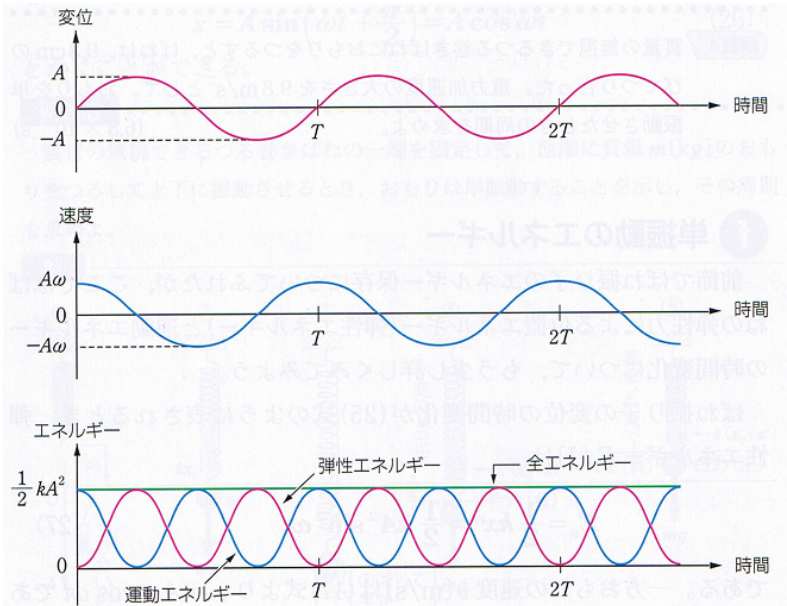
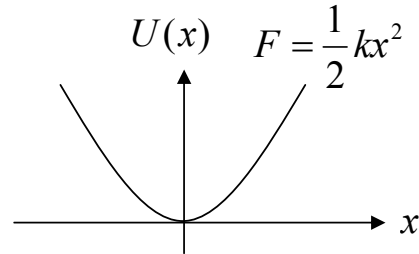


図10 単振動する物体の変位、速度、エネルギーの時間変化

$$v = \dot{x} = -A\omega \sin \omega t$$

ポテンシャルと力の微分関係

<1次元の場合>

$$U(x) \equiv -\int_{x_0}^x F(x) dx \quad U(x + \Delta x) - U(x) = -\int_x^{x+\Delta x} F(x) dx \cong -F(x)\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x + \Delta x) - U(x)}{\Delta x} = -F(x) \Leftrightarrow F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

<3次元の場合>

$$U(\mathbf{r}) \equiv -\int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad U(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+\Delta \mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \cong -\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \Delta \mathbf{r}$$

成分表示すると

$$U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z) \cong -(F_x(\mathbf{r})\Delta x + F_y(\mathbf{r})\Delta y + F_z(\mathbf{r})\Delta z)$$

$\Delta y=0$ 、 $\Delta z=0$ とおくと、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x} = -F_x(\mathbf{r}) \Leftrightarrow F_x(\mathbf{r}) = -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x}$$

ポテンシャルの勾配 (gradient)

$$F_x(\mathbf{r}) = -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x}, \quad F_y(\mathbf{r}) = -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial y}, \quad F_z(\mathbf{r}) = -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z}$$

これらをまとめて表すと

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (F_x(\mathbf{r}), F_y(\mathbf{r}), F_z(\mathbf{r})) = -\left(\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x}, \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial y}, \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)U(\mathbf{r})$$

ここで**ナブラ演算子**を定義する

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \quad \text{ナブラ演算子}$$

すると、力は簡単に

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$$

と表せる。 ∇ はこの場合「gradient(グラディエント: 勾配)」と読む。