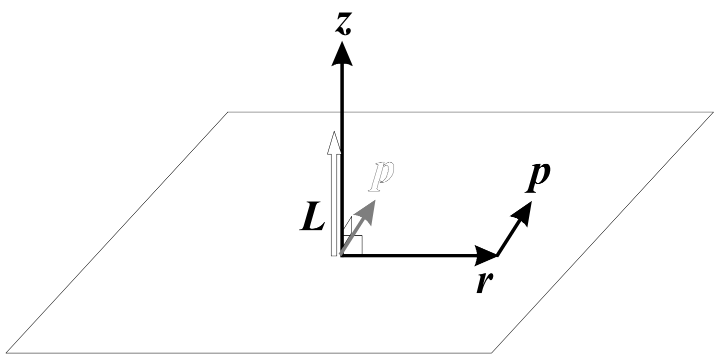
角運動量の保存

万有引力は中心力なので、太陽を原点とすると、惑星に働く力のモーメントは

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = 0$$

したがって、

$$\boxed{\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = 0}$$ （力が中心力の場合）



これは、角運動量が時間的に変化しない（一定である）ことを意味する。
「中心力が働く物体の（中心力を原点とする）角運動量は保存する」
と言うことができる。

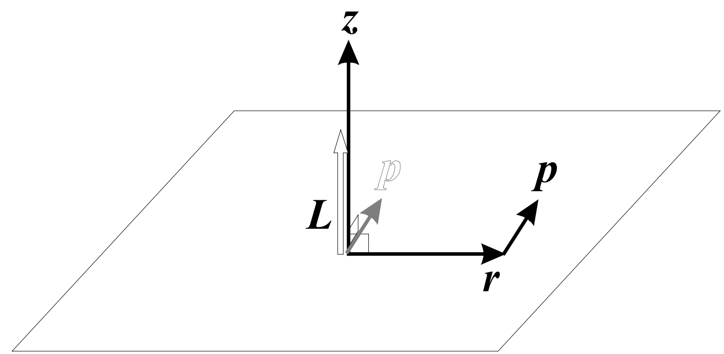
また、物体のLが変化しないということは、物体はLに垂直な一つの平面内で運動を続ける（二次元極座標表示で運動を記述できる）。

面積速度一定の法則（ケプラーの第２法則）

２次元極座標表示

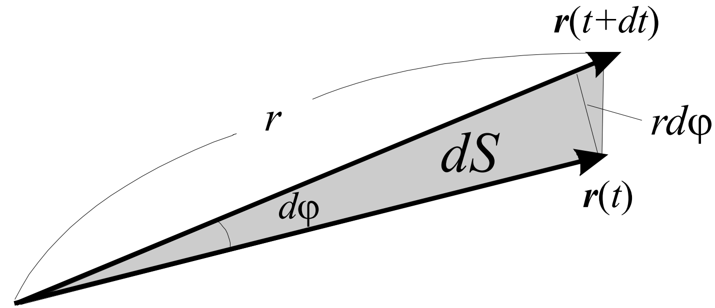
$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m\dot{r}\boldsymbol{e}_r + mr\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi$$



角運動量は

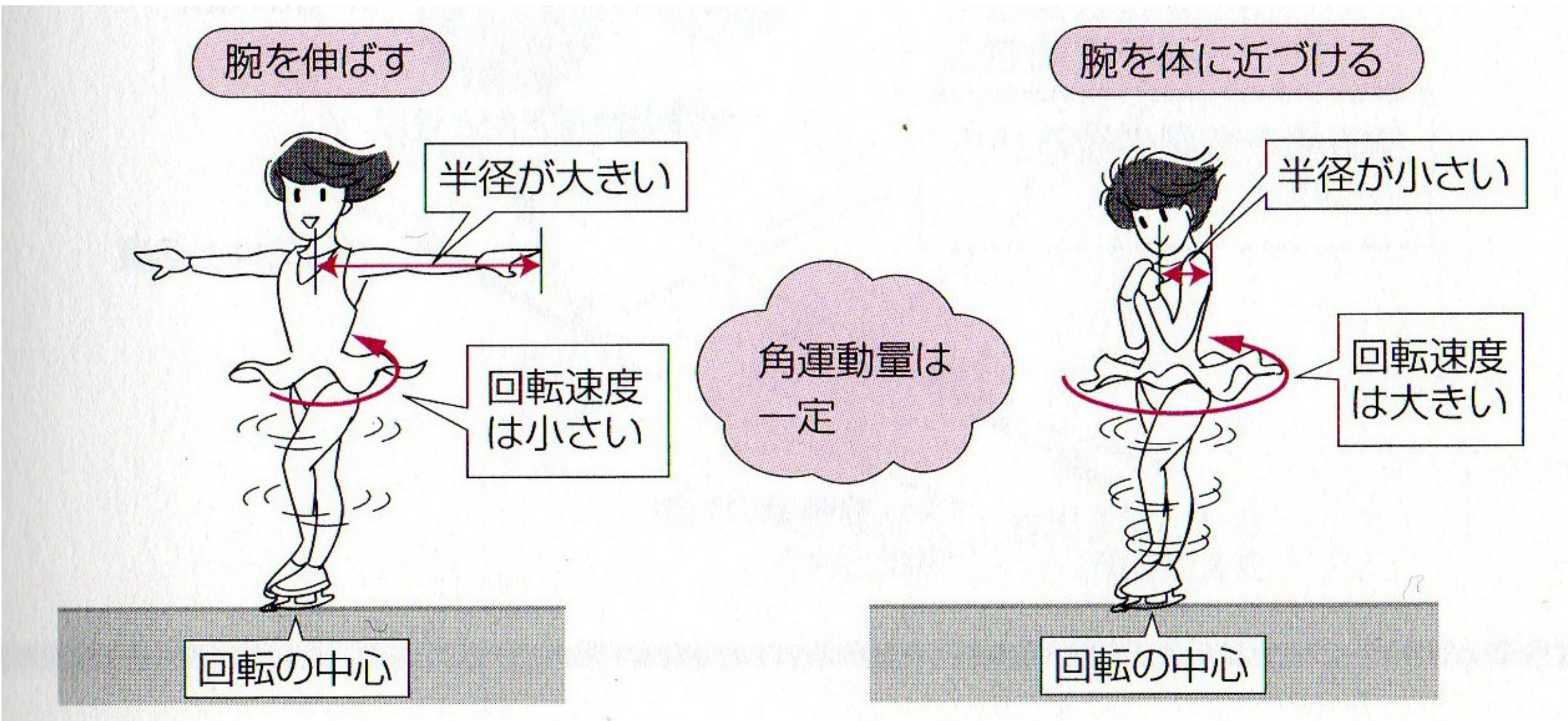
$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} &= r\boldsymbol{e}_r \times \left(mr\boldsymbol{e}_r + mr\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi\right)\\ &= mr^2\dot{\varphi}\left(\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\varphi\right)\\ &= mr^2\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$



面積速度は

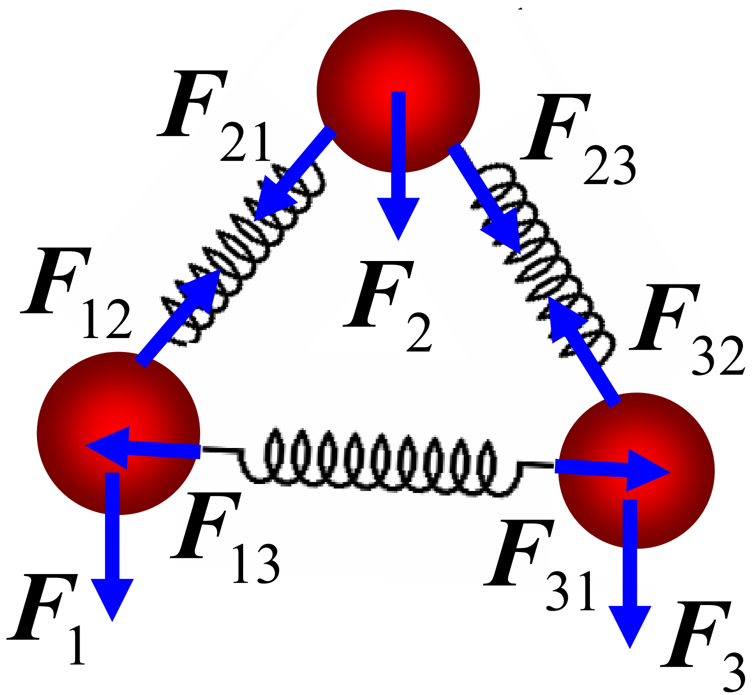
$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{L}{2m}$$

フィギュアスケートのスピン



出典：「やりなおし高校の物理」野田学（２００５年、ナツメ社）

内力と外力



各質点に働く力の合計は

$$\sum_i \left(F_i + \sum_{j \neq i} F_{ij} \right)$$

$$= \sum_i F_i + \sum_i \sum_{j \neq i} F_{ij}$$

$$= \sum_i F_i$$

質点系に働く力の和は外力の和（内力の和は、作用・反作用の法則より相殺）

剛体の角運動量とトルク

物体のその箇所に働いている力

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum\left(\boldsymbol{r}\times m\dot{\boldsymbol{r}}\right) = \sum\left(\dot{\boldsymbol{r}}\times m\dot{\boldsymbol{r}}\right) + \sum\left(\boldsymbol{r}\times m\ddot{\boldsymbol{r}}\right) = \sum \boldsymbol{r}\times \boxed{m\ddot{\boldsymbol{r}}}$$

計算してみると、作用反作用の法則および内力が中心力であるため、内力の効果は相殺され（兵頭「考える力学」p211参照） 結果的に外力のトルクが残る、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum \boldsymbol{r}_{\text{作用点}} \times \boldsymbol{F}_{\text{外力}} = \sum \boldsymbol{N}_{\text{外力のトルク}}$$

ニュートンの運動方程式

物体の角運動量の時間変化

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \quad \xrightarrow[\text{内力は中心力}]{\text{作用反作用の法則}} \quad \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$$

$\boldsymbol{N}$は外力のトルクの和

内力のトルクが無視できることの証明

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_i\left(\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{r}_i\right)=\sum_i\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{r}_i\right)=\sum_i\left(\boldsymbol{r}_i\times\boxed{m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i}\right)$$

$$||$$

$$\boldsymbol{F}_i+\sum_{j\neq i}\boldsymbol{F}_{ij}$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\sum_i\left[\boldsymbol{r}_i\times\left(\boldsymbol{F}_i+\sum_{j\neq i}\boldsymbol{F}_{ij}\right)\right]=\sum_i\left(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i\right)+\boxed{\sum_i\sum_{j\neq i}\left(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij}\right)}=\sum_i\left(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i\right)$$

あからさまに書くと

$$\sum_i\sum_{j>i}\left(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j\right)\times\boldsymbol{F}_{ij}=0$$

内力は中心力なので

$$||$$

$$\boxed{\begin{array}{llllll}
\displaystyle\sum_i\sum_{j\neq i}\left(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij}\right)= & & +\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_{12} & +\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_{13} & \cdots\ +\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_{1,n-1} & +\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_{1n}\\
 & -\ \boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_{12} & & +\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_{23} & \cdots\ +\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_{2,n-1} & +\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_{2n}\\
 & -\ \boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{F}_{13} & -\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{F}_{23} & & \cdots\ +\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{F}_{2,n-1} & +\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{F}_{2n}\\
 & \vdots & & & & \\
 & -\ \boldsymbol{r}_{n-1}\times\boldsymbol{F}_{1,n-1} & -\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_{2,n-1} & & \cdots & +\boldsymbol{r}_{n-1}\times\boldsymbol{F}_{n-1,n}\\
 & -\ \boldsymbol{r}_n\times\boldsymbol{F}_{1n} & -\boldsymbol{r}_n\times\boldsymbol{F}_{2n} & & \cdots\ -\boldsymbol{r}_n\times\boldsymbol{F}_{n-1,n} &
\end{array}}$$

作用反作用の法則を適用

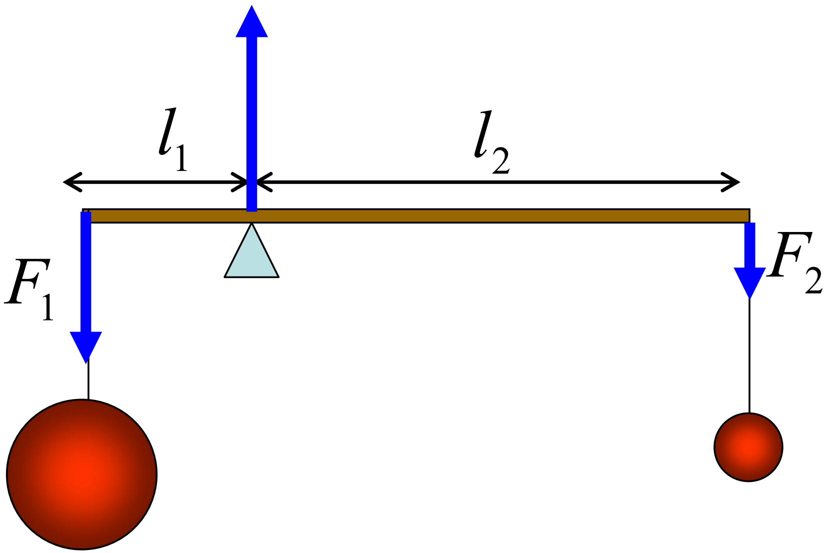
$$\boxed{\boldsymbol{F}_{ij}=-\boldsymbol{F}_{ji}}$$

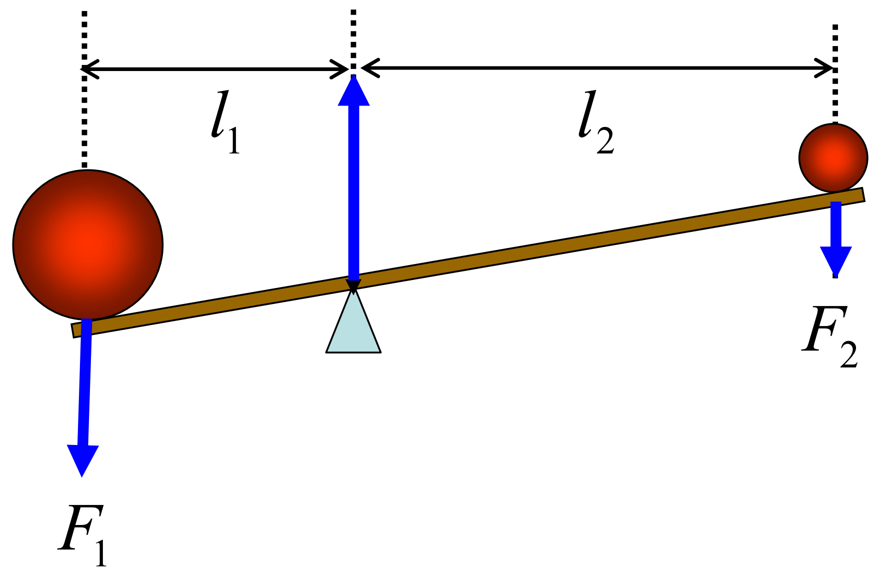
運動量と角運動量のアナロジー

	運動量 (momentum)	角運動量 (angular momentum)
定義	$\boldsymbol{p} \equiv m\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = I\boldsymbol{\omega}$
時間変化させる 要因	$\boldsymbol{F}$ 力（force）	$\boldsymbol{N} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ トルク（torque）
時間変化のしにくさ を表す量（慣性）	m （慣性）質量 ((inertial) mass）	I 慣性モーメント (moment of inertia)
運動方程式	$\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}$	$\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt} = I\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{N}$

物体のつりあいと「てこの原理」

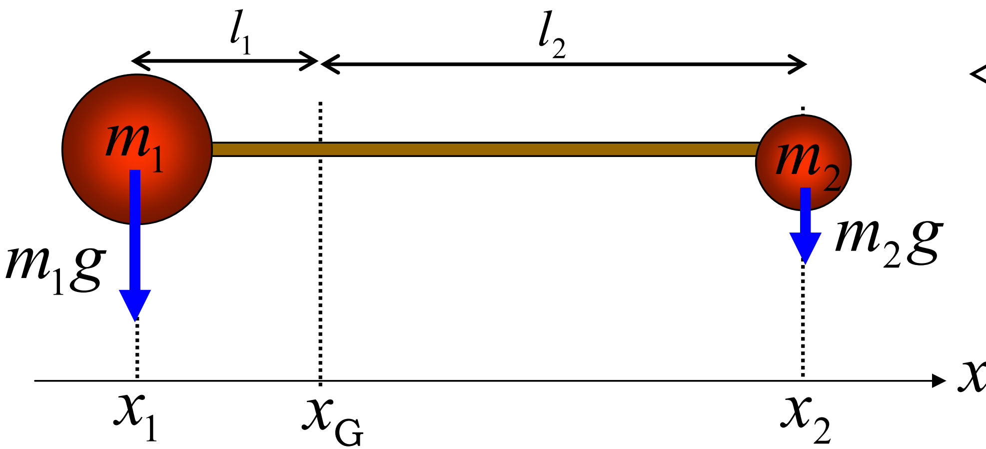
静止している物体は回転していない（角運動量がゼロのまま変化しない）
→外力のトルク（原点は任意）の和はゼロ





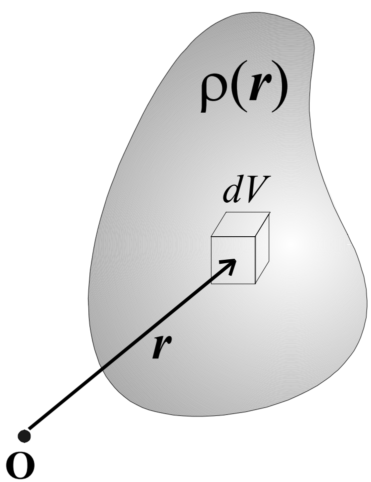
$$F_1 l_1 = F_2 l_2$$

重心（質量中心）
質量の重みをつけた位置の平均



＜2質点の場合＞

$$x_{\mathrm{G}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



＜一般の剛体＞

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} = \frac{\sum \boldsymbol{r}_i m_i}{M} = \frac{\int \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})dV}{\int \rho(\boldsymbol{r})dV}$$

重力のモーメント

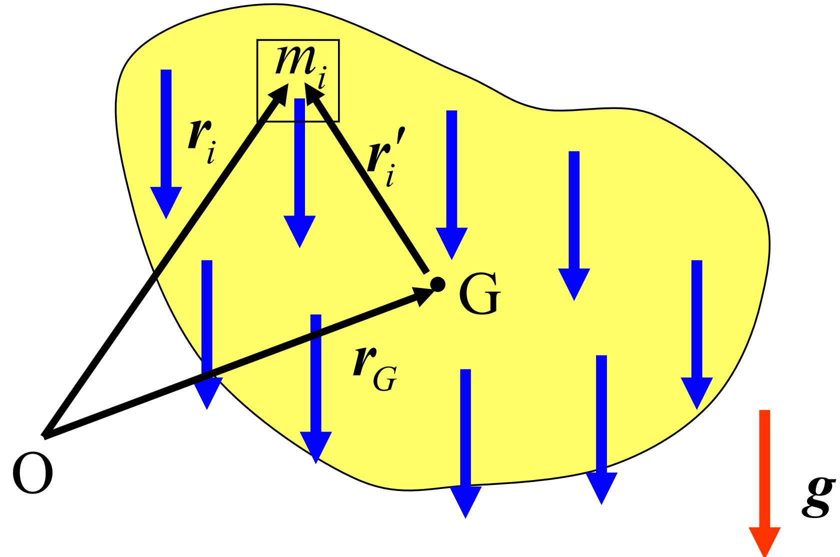
$$\boldsymbol{N} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{g}$$

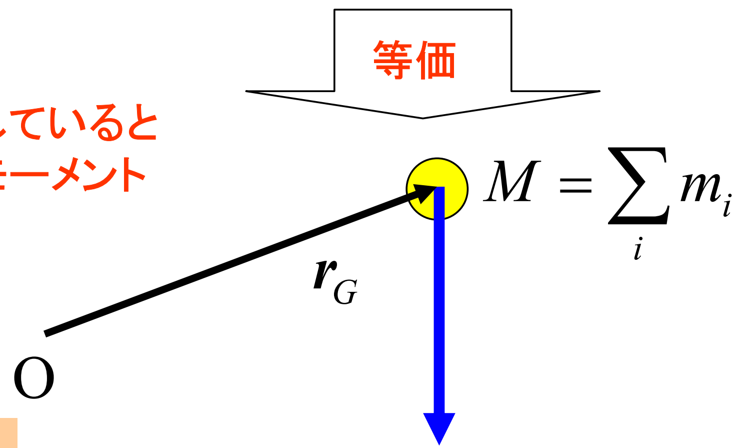
$$= \left(\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \right) \times \boldsymbol{g}$$

$$= \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{M} \times M\boldsymbol{g}$$

$$= \boxed{\boldsymbol{r}_G \times M\boldsymbol{g}}$$

全質量が重心に集中していると
考えた場合の重力のモーメント



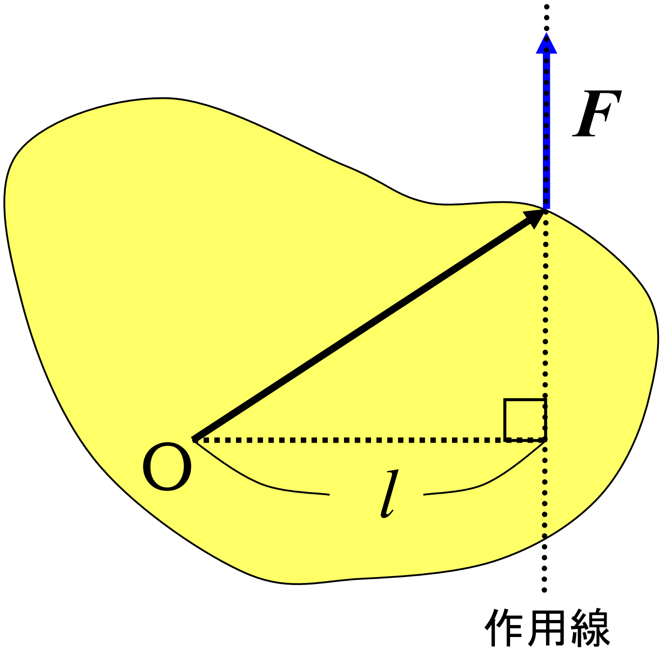


重心を原点とすれば $\boldsymbol{r}_G = 0$ であるから

$\boldsymbol{N} = 0$ （重心が原点の場合）

重心を支点とすると、物体は回転しない

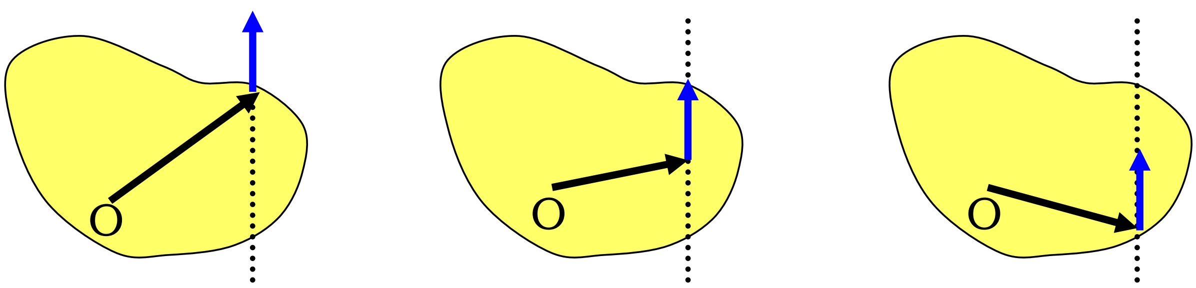
力の作用線



$$|\boldsymbol{N}| = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}| = rF\sin\theta$$
$$= Fl$$

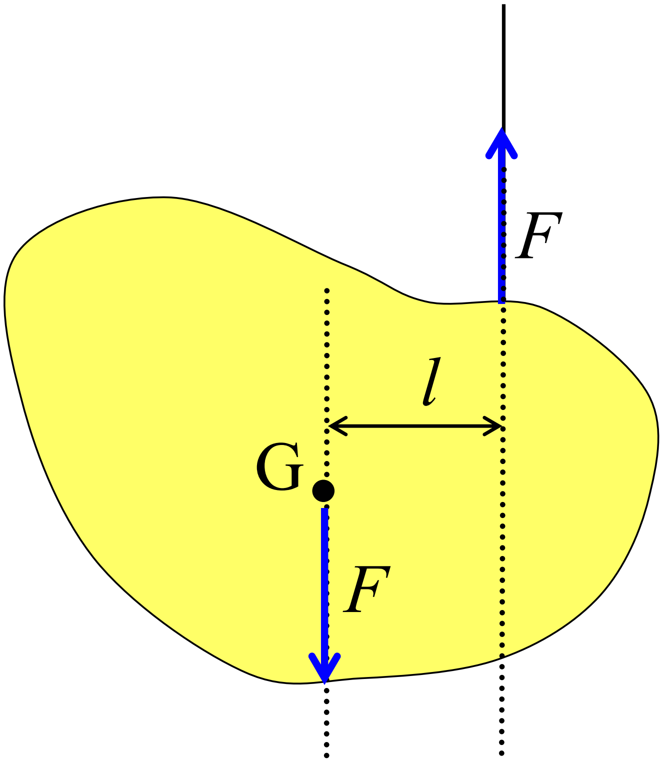
l :作用線から原点までの距離

作用点を作用線上で移動しても、剛体に加わるトルクは等しい

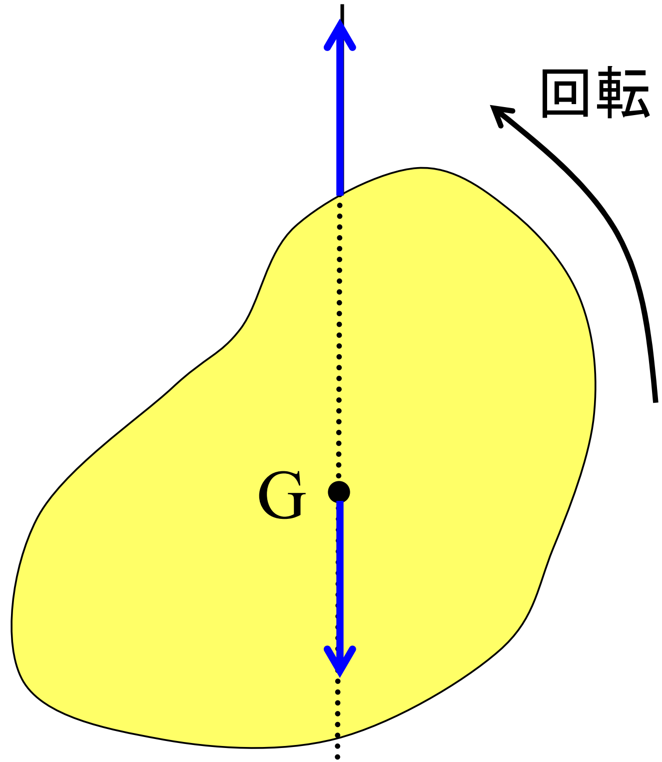


偶力（couple）

作用線の一致しない大きさの等しい二つの力



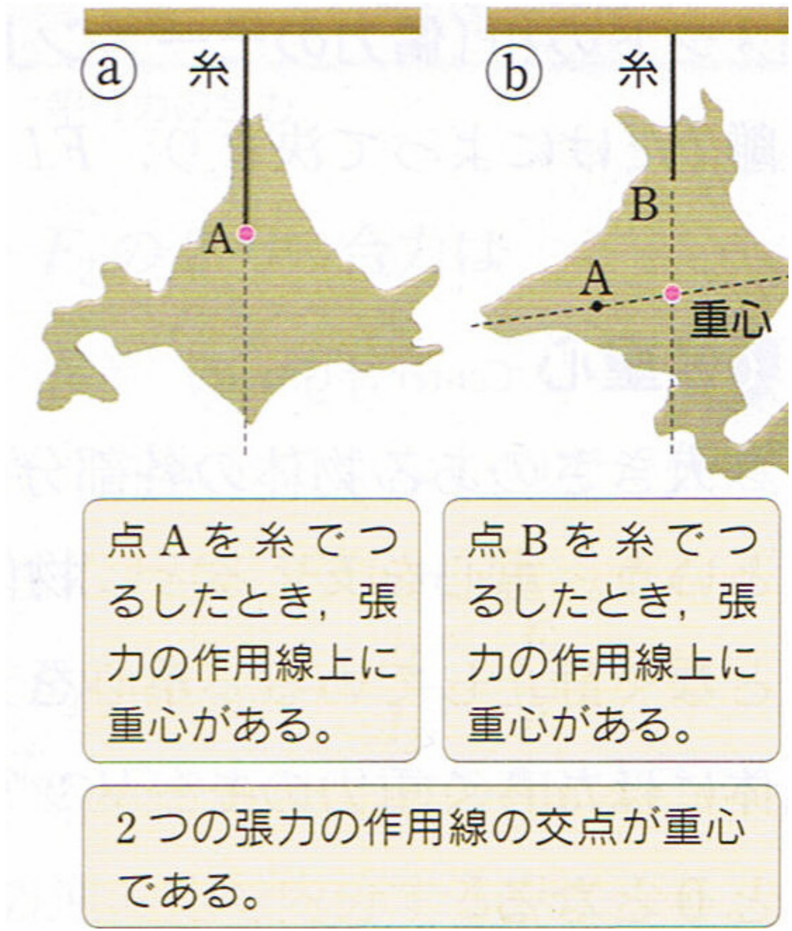
偶力あり



$$\frac{dL}{dt} = N = Fl$$

様々なワインホルダー

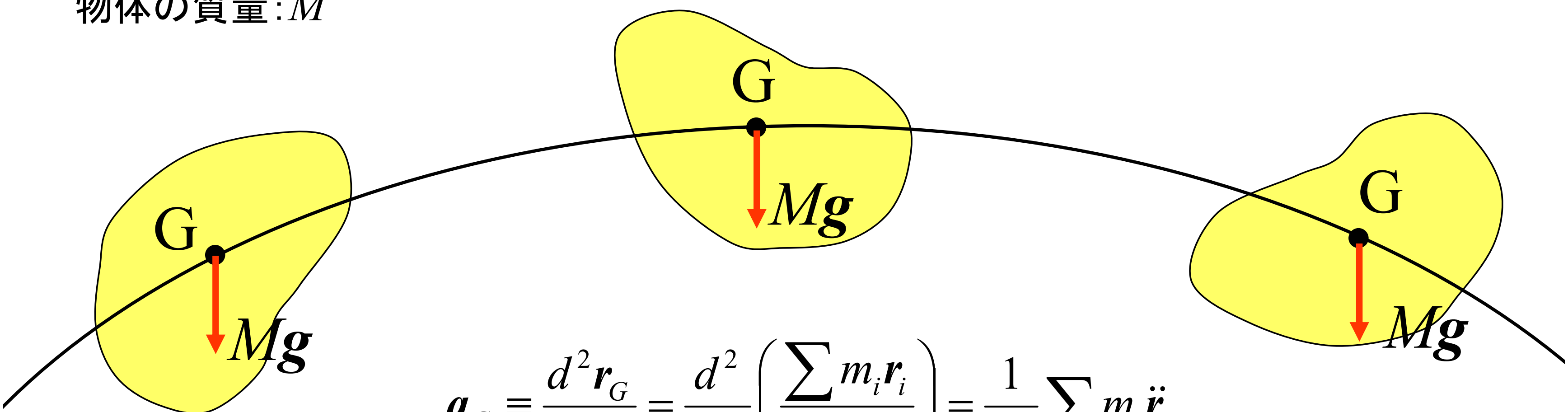
物体の重心を求める



東京書籍　高等学校教科書「物理Ｉ」より転載

重心の運動

物体の質量:M



$$\boldsymbol{a}_G \equiv \frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sum m_i\boldsymbol{r}_i}{M}\right) = \frac{1}{M}\sum m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$$

$$= \frac{\sum_i(\boldsymbol{F}_i + \sum_{j\neq i}\boldsymbol{F}_{ij})}{M} = \frac{\sum_i \boldsymbol{F}_i}{M}$$

重心の運動方程式

$$\boldsymbol{F}_{\text{外力の和}} = M\boldsymbol{a}_{\mathrm{G}}$$

重心の運動方程式は、質量Mの質点の運動方程式に等しい