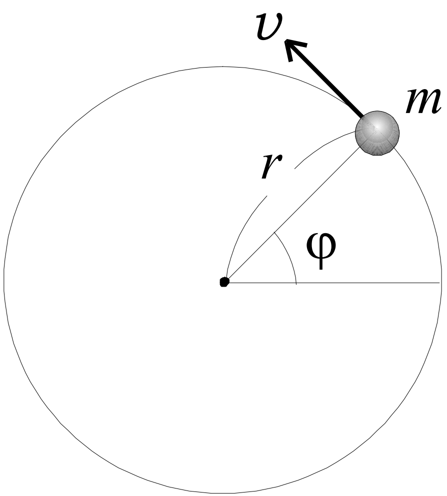
# 等速円運動

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(r(t), \varphi(t)\right) = \left(r, \omega t\right)$$




角速度ωで回転

$r$成分の運動方程式は、

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r(t)$$

$r$は一定なので

$$\boxed{F_r(t) = -mr\omega^2}$$

向心力（一定）

φ成分の運動方程式は、

$$m\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})\right] = F_\varphi(t)$$

$r$もφも一定なので、

$$\boxed{F_\varphi(t) = 0}$$

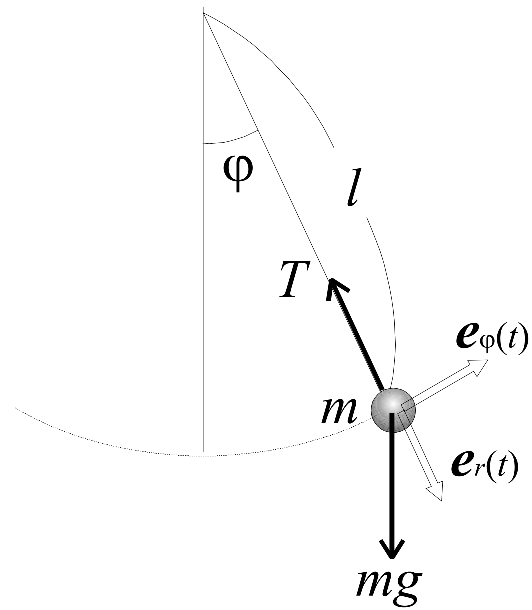
円運動している物体には進行方向の力は働いていない

# 単振り子

運動方程式より

$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=mg\cos\varphi-T\cdots①$$

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right)=-mg\sin\varphi\cdots②$$




$$F_r=mg\cos\varphi-T$$
$$F_\varphi=-mg\sin\varphi$$

①より

$$-ml\dot{\varphi}^2=mg\cos\varphi-T$$

$$\rightarrow T=mg\cos\varphi+ml\dot{\varphi}^2$$

②より

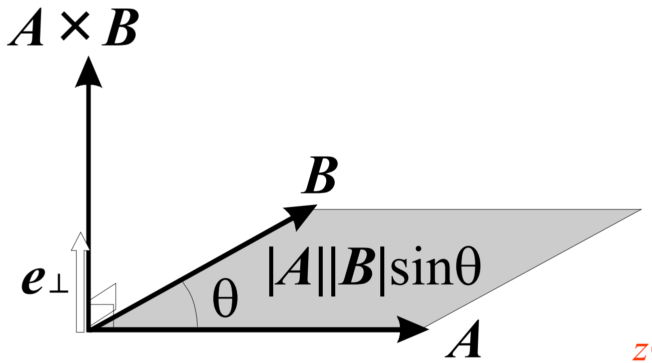
$$ml\ddot{\varphi}=-mg\sin\varphi$$

$$\rightarrow\ddot{\varphi}=-\frac{g}{l}\sin\varphi\cong-\frac{g}{l}\varphi\,(\varphi<<1)$$

# 第6章
# 角運動量

# 数学的準備:ベクトルの外積

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\equiv|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta\cdot\boldsymbol{e}_{\perp}$$




＜主な性質＞

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0\Leftrightarrow\sin\theta=0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}//\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=0$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{A}\times\left(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}\right)=\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\right)-\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right)$$

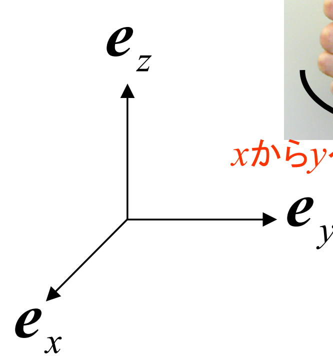
$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right)=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$$

右手系では

$$\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_x$$

$$\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{e}_y$$

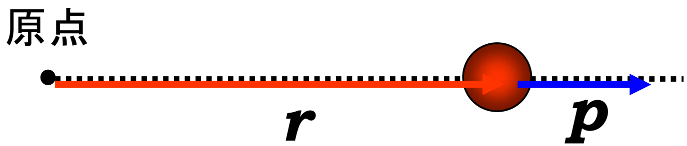




$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z$,　$\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{e}_x+B_y\boldsymbol{e}_y+B_z\boldsymbol{e}_z$　とすると、

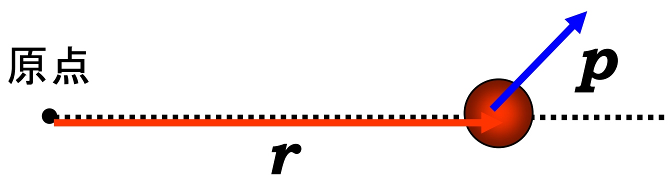
$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{e}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{e}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{e}_z$$

# 物体の「回転」をどう表現するか？




回転してない

$$\boldsymbol{r} /\!/ \boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = 0$$




回転している（と考えられる）

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \neq 0$$

$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ は、原点まわりの物体の回転の度合いを表す指標になっている？

$\boxed{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{L}}$ と定義して、これを角運動量と名付けよう

# 角運動量と力のモーメント

角運動量の時間微分（単位時間あたりの変化）を考えよう。

これは物体に働いている力

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\times m\dot{\boldsymbol{r}}\right) = \dot{\boldsymbol{r}}\times m\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{r}\times m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}\times \boxed{m\ddot{\boldsymbol{r}}}$$

$$\left(\because\ \dot{\boldsymbol{r}}\times m\dot{\boldsymbol{r}} = m(\dot{\boldsymbol{r}}\times\dot{\boldsymbol{r}}) = 0\right)$$

したがって、物体に働いている力を $\boldsymbol{F}$ とすると、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$$

$\boldsymbol{N} \equiv \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ を力のモーメント（もしくはトルク）という。

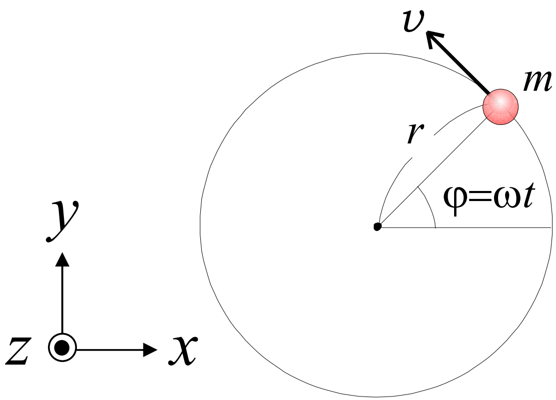
（注意）角運動量も力のモーメントも、原点の位置を変えれば、その向きも大きさも変わる

# トルクレンチ


トルクの大きさの単位（SI）はNm
（kgf･mやkgf･cmも使われている）

# 回転体の角運動量と慣性モーメント

＜質点の場合＞




$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = mr^2\boldsymbol{\omega} = I\boldsymbol{\omega}$$

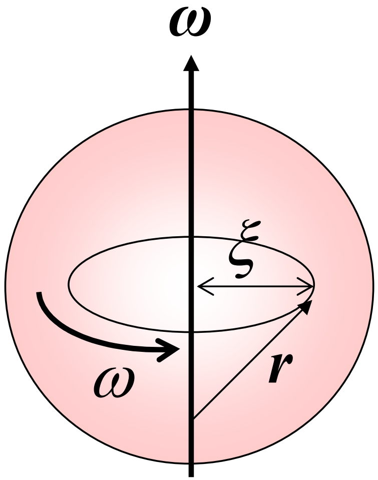
$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_z$$

角速度ベクトル（大きさは角速度、向きは回転軸と平行（右ねじの進む向き））

$$I \equiv mr^2$$

慣性モーメント（角速度ベクトルをかけると角運動量になる量）

＜回転対称性のある物体（剛体）の場合＞



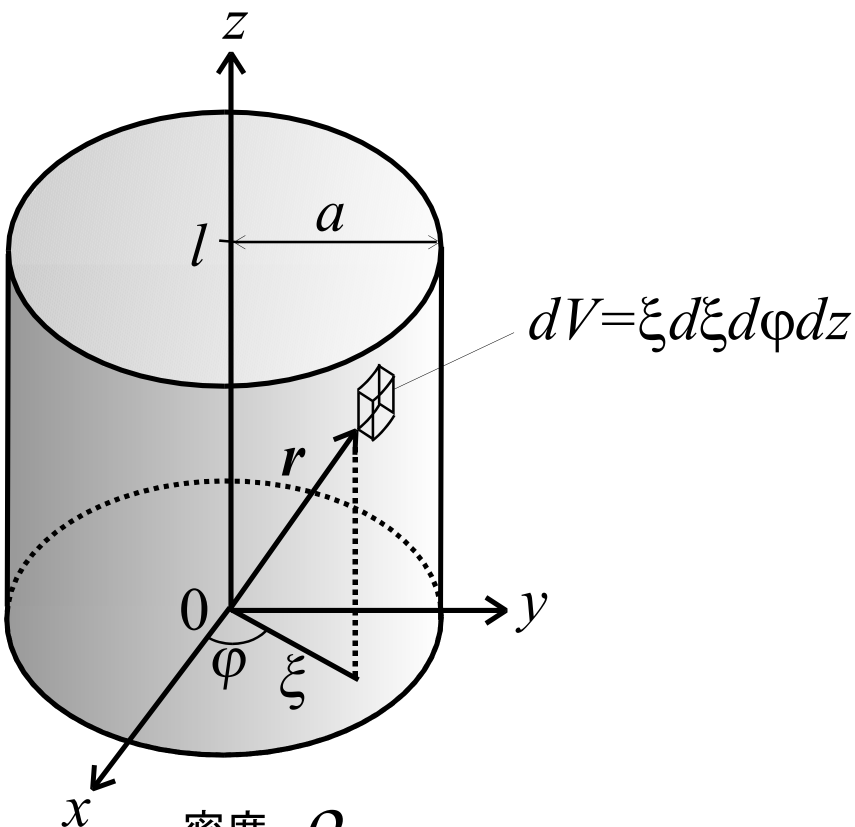

$$\boldsymbol{L} = \int \boldsymbol{r} \times \rho(\boldsymbol{r})\dot{\boldsymbol{r}}dV = I\boldsymbol{\omega}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

$$I = \int \xi^2 \rho(\boldsymbol{r})dV$$

$\xi$ :回転軸からの距離

# 円柱の慣性モーメントの計算




密度 $\rho$

質量 $M = \pi a^2 l\rho$

$$I = \int \xi^2 \rho(\boldsymbol{r})dV$$

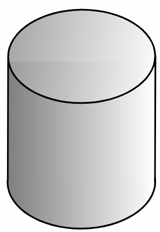
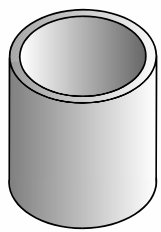
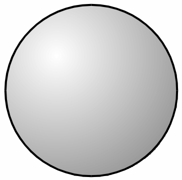
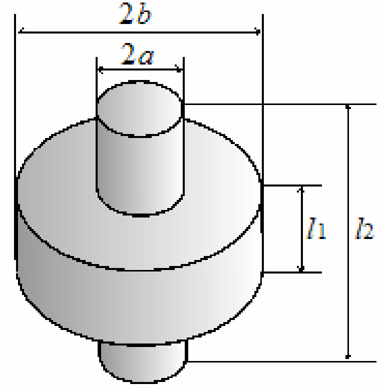
$$= \rho\iiint \xi^2 \xi \, d\xi d\varphi dz$$

$$= \rho\int_0^a \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^l dz$$

$$= 2\pi l\rho\left[\frac{1}{4}\xi^4\right]_0^a$$

$$= \ = \frac{\pi a^4 l\rho}{2} = M\frac{a^2}{2}$$

# さまざまな回転体の慣性モーメント

| 形状 | 円柱（円盤） | パイプ | 球 | 軸付き円盤 |
|---|---|---|---|---|
| 大きさのパラメタ | <br>直径 $2a$ | <br>外径 $2a$<br>内径 $2b$ | <br>直径 $2a$ |  |
| 慣性モーメント | $M\dfrac{a^2}{2}$ | $M\dfrac{a^2+b^2}{2}$ | $M\dfrac{2a^2}{5}$ | $M\dfrac{b^2}{2}\dfrac{l_1+(l_2-l_1)\varepsilon^4}{l_1+(l_2-l_1)\varepsilon^2}\left(\varepsilon\equiv\dfrac{a}{b}\right)$ |