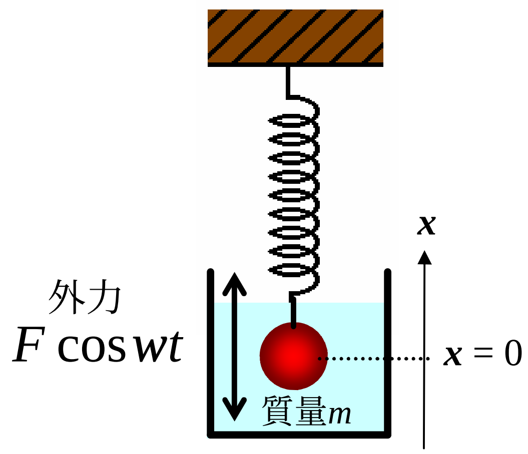
強制振動

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx + F\cos wt$$

$$\rightarrow \ddot{x} + 2g\dot{x} + w_0^2 x = \boxed{\frac{F}{m}\cos wt} \leftarrow \text{非斉次}$$



非斉次方程式の一般的解法（斉次方程式の一般解+特殊解）でも解ける。
その方法は教科書に譲り、ここでは定常解（十分時間が経った後の解）を求めよう。

＜解法のテクニック＞

① 実部にのみ意味があると約束して、周期関数を複素表示する

$$\frac{F}{m}\cos wt = \frac{F}{m}\mathrm{Re}\left[e^{iwt}\right] \rightarrow \frac{F}{m}e^{iwt}$$

② $x(t)$は（定常状態では）外力と同じ角周波数ωで振動する周期関数と仮定する。

$$x(t) = x(w)e^{iwt}$$

共鳴・共振（Resonance）

運動方程式に代入して、$x(\omega)$について解くと

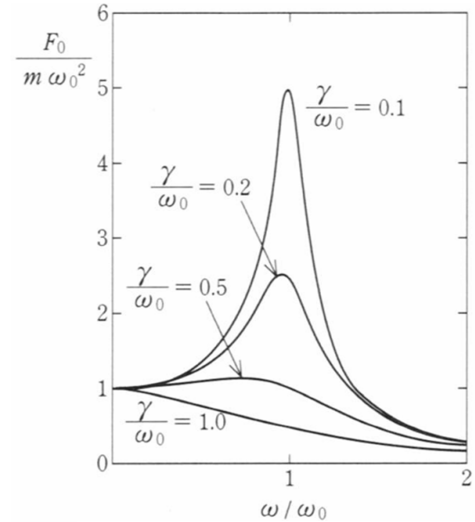
$$x(w)=\frac{F}{m}\cdot\frac{1}{-w^2+2igw+w_0^2}$$

振動の振幅の大きさは、

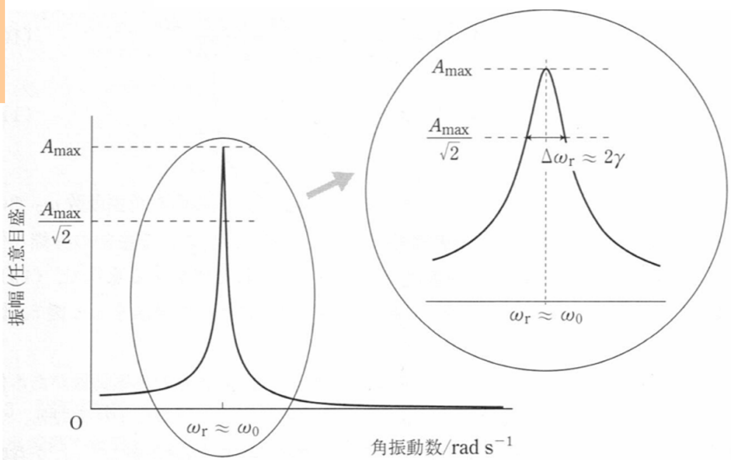
$$\left|x(w)\right|=\frac{F}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{(w_0^2-w^2)^2+4g^2w^2}}$$

特に、$\gamma \ll \omega_0$ の場合、$\omega \sim \omega_0$では、

$$\left|x(w)\right|=\frac{F}{2w_0m}\cdot\frac{1}{\sqrt{(w_0-w)^2+g^2}}$$



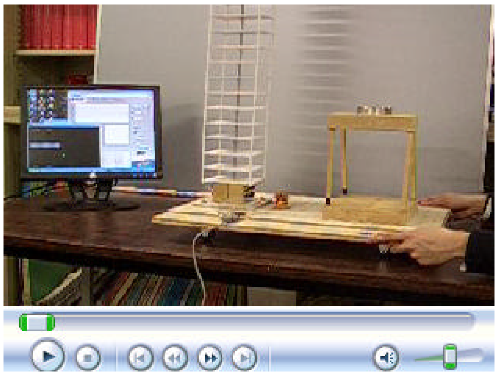
兵頭「考える力学」p77　図4.10



基礎物理学実験テキスト「振動・波動II」p140　図5

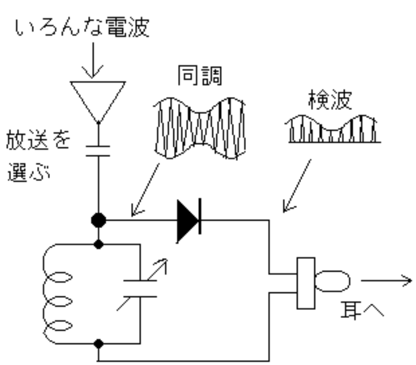
様々な共鳴現象

＜地震波の共鳴＞



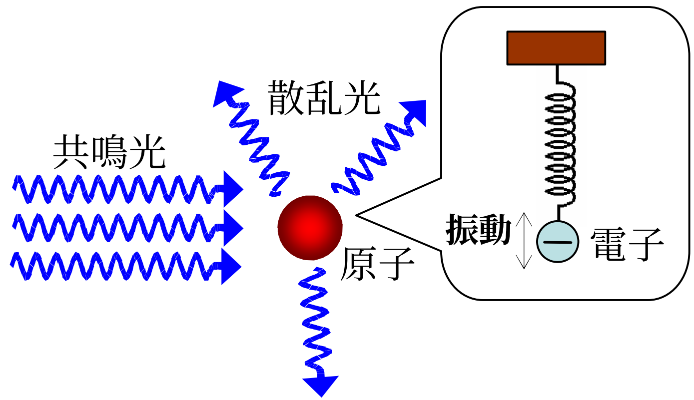
http://www.kz.tsukuba.ac.jp/~sakai/dsn.htm

＜ラジオ＞

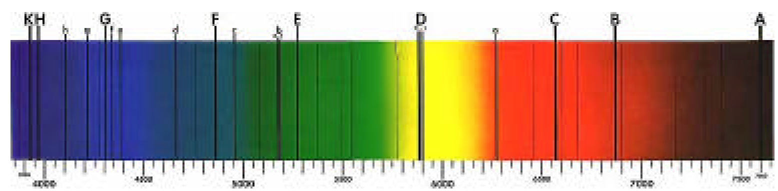


http://www9.wind.ne.jp/fujin/diy/radio/radio02.htm

＜原子・分子による光の吸収＞



共鳴する原子　原子・分子の共鳴周波数に等しい光（共鳴光）を照射すると、原子内の電子が振動し、光は散乱される。



太陽光スペクトルの暗線（フラウンフォーファー線）
太陽の大気中に存在する様々な原子・分子が、固有の共鳴周波数の光を吸収するため、多数の暗線が生じる。

第 5章
極座標による
運動の記述

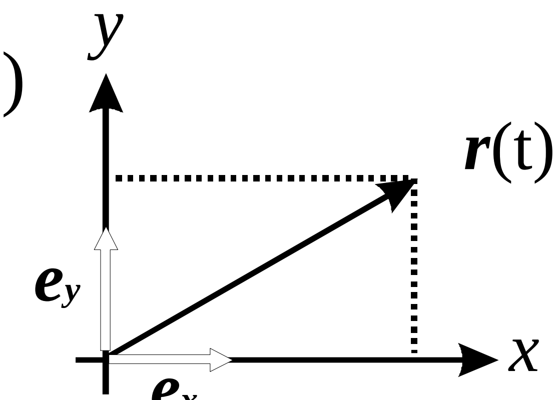
2次元極座標表示

デカルト座標表示

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{e}_x + y(t)\boldsymbol{e}_y = (x(t), y(t))$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\boldsymbol{e}_y = (\dot{x}, \dot{y})$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{x}\boldsymbol{e}_x + \ddot{y}\boldsymbol{e}_y = (\ddot{x}, \ddot{y})$$



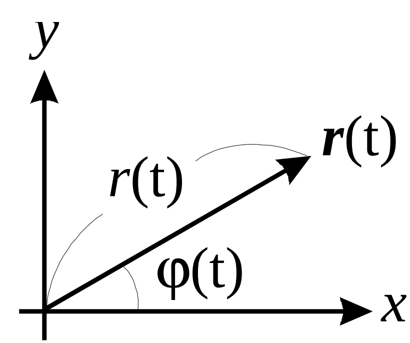
2次元極座標表示

$$\boldsymbol{r}(t) = (r(t), j\,(t))$$

$$\cancel{\dot{\boldsymbol{r}} = (\dot{r}, \dot{j}\,)}$$

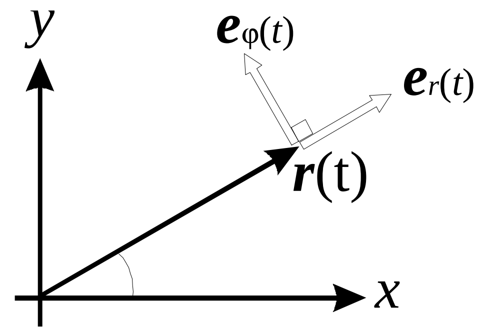
$$\cancel{\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r}, \ddot{j}\,)}$$

間違い



2次元極座標の基底ベクトル

$$\boldsymbol{r}(t) = r(t)\boldsymbol{e}_r(t)$$



$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r(t)\boldsymbol{e}_r(t)\right)$$

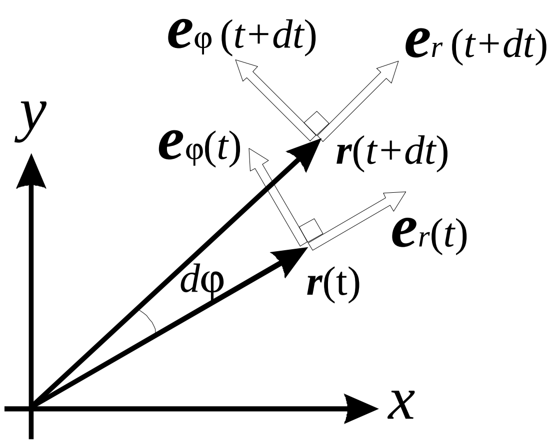
$$= \frac{dr(t)}{dt}\boldsymbol{e}_r(t) + r(t)\boxed{\frac{d\boldsymbol{e}_r(t)}{dt}}$$

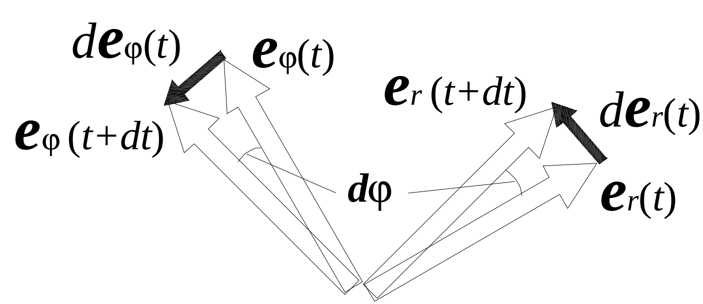
?

$$\boldsymbol{e}_r(t) \,//\, \boldsymbol{r}(t)$$

$$\boldsymbol{e}_r(t) \perp \boldsymbol{e}_j(t)$$

$$|\boldsymbol{e}_r(t)| = |\boldsymbol{e}_j(t)| = 1$$

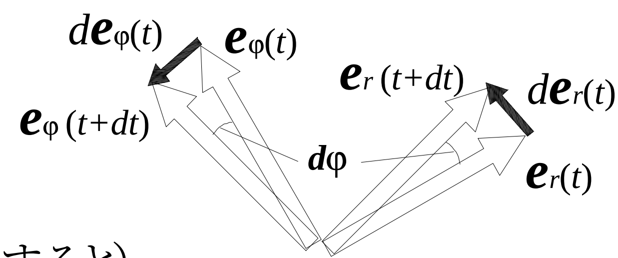




基底ベクトルの時間微分

$$d\boldsymbol{e}_r(t) = d\varphi\ \boldsymbol{e}_\varphi(t)$$

$$d\boldsymbol{e}_\varphi(t) = -d\varphi\ \boldsymbol{e}_r(t)$$



両辺をdtで割ると（単位時間あたりの変化にすると）

$$\frac{d\boldsymbol{e}_r(t)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{e}_\varphi(t) \qquad (\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi)$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\varphi(t)}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{e}_r(t) \qquad (\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_r)$$

したがって、

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{dr(t)}{dt}\boldsymbol{e}_r(t) + r(t)\frac{d\boldsymbol{e}_r(t)}{dt} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi = \boxed{(\dot{r}, r\dot{\varphi})}$$

極座標表示における
速度および加速度ベクトル

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=\frac{dr(t)}{dt}\boldsymbol{e}_r(t)+r(t)\frac{d\boldsymbol{e}_r(t)}{dt}=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{j}\boldsymbol{e}_j$$

$$\boldsymbol{a}(t)=\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{j}\boldsymbol{e}_j\right)=\left(\ddot{r}-r\dot{j}^2\right)\boldsymbol{e}_r+\left(2\dot{r}\dot{j}+r\ddot{j}\right)\boldsymbol{e}_j$$

$$=\left(\ddot{r}-r\dot{j}^2\right)\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{j})\boldsymbol{e}_j$$

極座標表示の運動方程式は、

$$\boldsymbol{F}=F_r\boldsymbol{e}_r+F_j\boldsymbol{e}_j=m\boldsymbol{a}(t)\rightarrow\begin{cases}F_r=m\left(\ddot{r}-r\dot{j}^2\right)\\ F_j=m\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{j})\end{cases}$$