空気抵抗は ∝速度、それとも ∝速度^2

粘性抵抗ならば

$$F_V = -bv \rightarrow m\frac{dv}{dt} = -bv + mg \xrightarrow{\text{無限の時間}} v_t = \frac{mg}{b}$$

終端速度

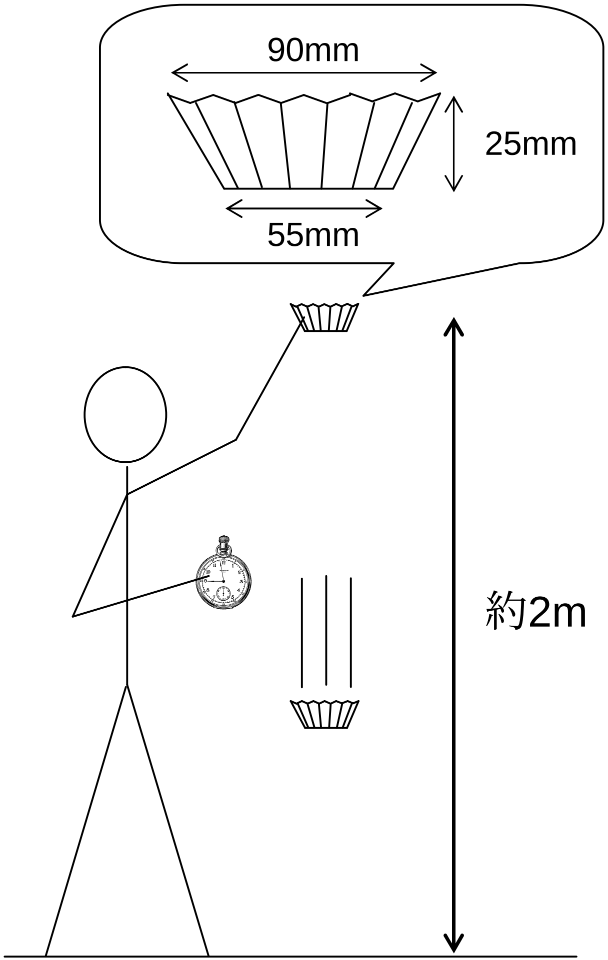
慣性抵抗ならば

$$F_I = -bv^2 \rightarrow m\frac{dv}{dt} = -bv^2 + mg \xrightarrow{\text{無限の時間}} v_t = \sqrt{\frac{mg}{b}}$$

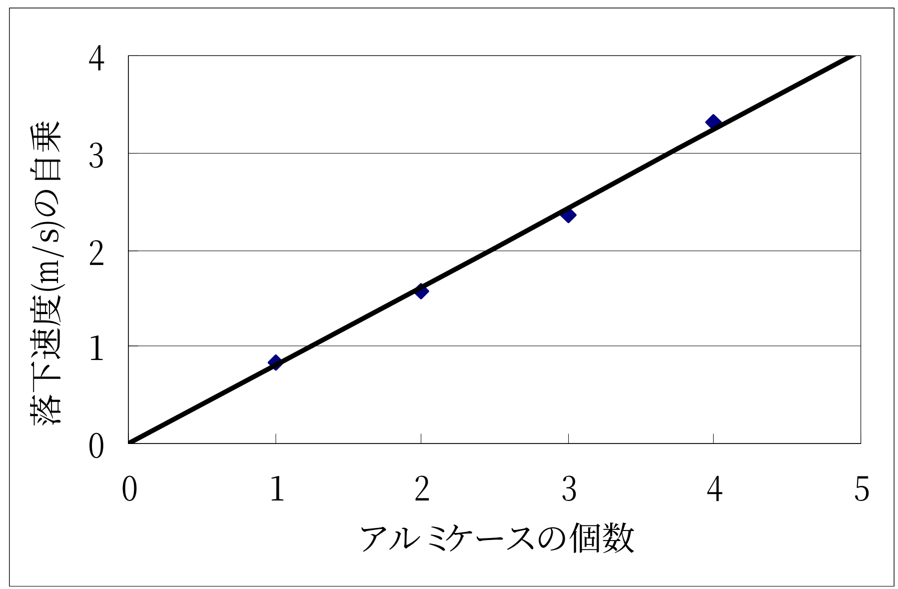
終端速度

同じ形状で、質量の異なる物体を落下させたとき、終端速度が質量に比例すれば粘性抵抗、質量の平方根に比例すれば慣性抵抗

実験 :アルミカップの終端速度

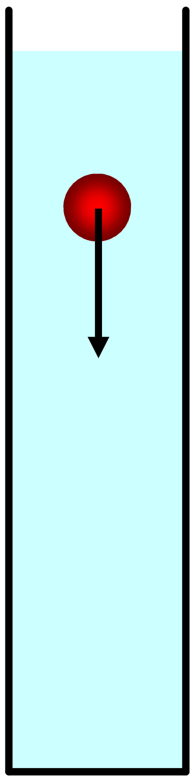


アルミカップの個数	1個	2個	3個	4個
2mの落下時間(s)	2.2	1.6	1.3	1.1
落下速度(m/s)	0.91	1.3	1.5	1.8
落下速度の自乗(m^2/s^2)	0.83	1.6	2.4	3.3



終端速度の自乗は質量に比例→慣性抵抗

粘性抵抗が働く物体の速度変化



$$m\frac{dv}{dt}=-bv+mg \rightarrow \frac{dv}{dt}+\frac{b}{m}v=g$$

非斉次

＜非斉次方程式の一般的解法＞

①まず特殊解を求める（探す）

今の場合、終端速度 $v_t=\dfrac{mg}{b}$ が特殊解。

②右辺=0とおいて（斉次方程式にして）一般解を求める

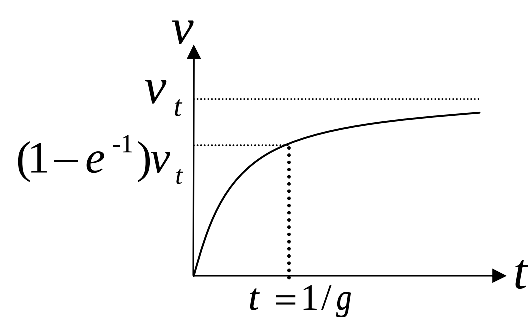
$$\frac{dv}{dt}+\frac{b}{m}v=0 \rightarrow v=Ae^{-gt}\left(g\equiv\frac{b}{m}\right)$$

③（本当の一般解）＝（斉次方程式の一般解）+（特殊解）

$$v=Ae^{-gt}+v_t$$

初速度をゼロとすると、$A=-v_t$

$$v=(1-e^{-gt})v_t$$

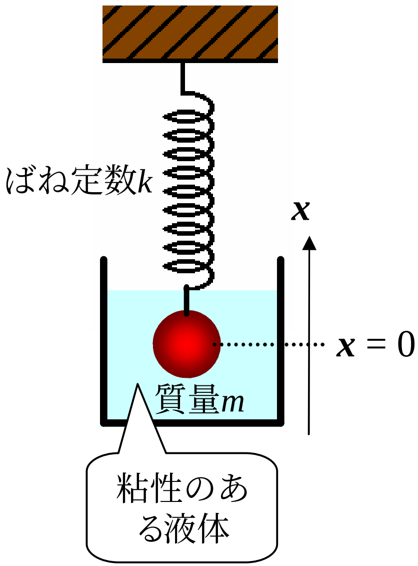


減衰振動

速度に比例する抵抗力　粘性抵抗)が働くの単振動の運動方程式は

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx \rightarrow \ddot{x} + 2g\dot{x} + w_0^2 x = 0$$

ただし、$g \equiv b/2m, w_0 = \sqrt{k/m}$ とおいた。



解の形として、指数関数　$x = e^{at}$　を仮定して代入すると

$$\left(a^2 + 2g + w_0^2\right)e^{at} = 0 \rightarrow a = -g \pm \sqrt{g^2 - w_0^2}$$

$g < w_0$ の場合、 $a_\pm = -g \pm iw \left(w \equiv \sqrt{w_0^2 - g^2} < w_0\right)$

一般解は　$x(t) = Ae^{a_+ t} + Be^{a_- t} = e^{-g\,t}\left(Ae^{iwt} + Be^{-iwt}\right)$

初期条件として、t=0 のとき x = x_0, $\dot{x}$= 0 の場合、

$$A = B = \frac{x_0}{2} \rightarrow \quad x(t) = x_0 e^{-g\,t}\cos wt$$