1階線形常微分方程式

常微分方程式の解法：2つの方針

＜解の形を予測して代入（発見的手法）＞

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

解は微分して同じ関数形になる指数関数で表現されるのではないか？

$$x(t) = Ae^{at}$$

うまくいかなければ、定数部分Aも時間の関数とおいてみよう（定数変化法）

$$x(t) = A(t)e^{at}$$

力学B（運動方程式）では、こちらの手法でOK

＜変数分離して両辺を積分（解析的手法）＞

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

$f(t) = 0$ のとき

$$\frac{dx}{dt} = ax \left(a \equiv \frac{a_1}{a_0} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} dx = a\,dt$$

両辺を積分して

$$\log x = at + C$$

$$\therefore x = Ae^{at} \ (A = e^C)$$

$a_0 = 0$ のとき

$$\frac{dx}{dt} = g(t) \left(g(t) \equiv \frac{f(t)}{a_0} \right)$$

$$\Leftrightarrow dx = g(t)dt$$

両辺を積分して

$$x = \int g(t)dt + C$$

解ける方程式の形が限られている

放射性元素の崩壊

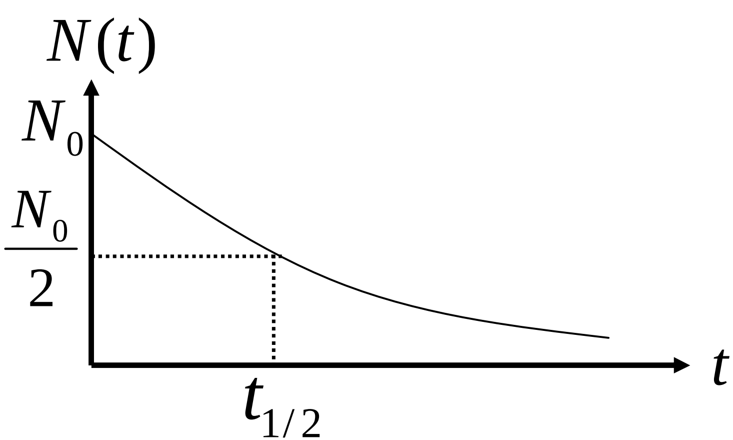
$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

ΓN :1秒間あたりに崩壊する原子の数
単位はベクレル[Bq]

原子1個あたり、1秒間あたりの崩壊確率

初期の原子数をN_0とすると、

$$N(t) = N_0 e^{-\Gamma t}$$



半減期を $t_{1/2}$ とすると、

$$\Gamma = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{0.693}{t_{1/2}}$$

^{40}Kの場合、半減期は12.8億年＝4.04×10^{16}秒

$$\Gamma = \frac{0.693}{4.04 \times 10^{16}\,\mathrm{s}} = 1.72 \times 10^{-17}\,\mathrm{s}^{-1}$$

複利で借金してはいけない

単利

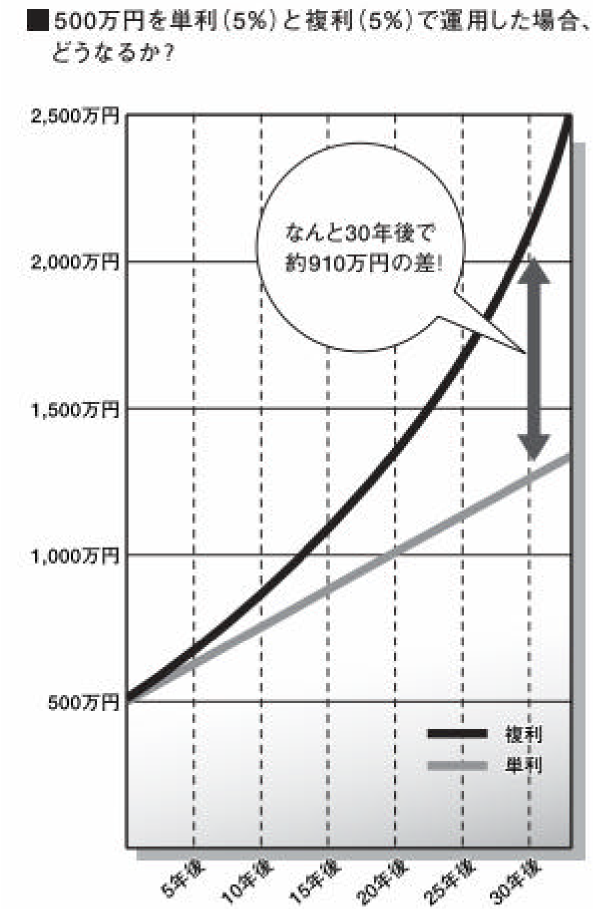
$$\frac{dN}{dt} = +aN_0 \rightarrow N(t) = N_0(1+at)$$

初期の借金額

複利

$$\frac{dN}{dt} = +aN \rightarrow N(t) = N_0 e^{at}$$

その瞬間の借金額＝初期の借金額＋累積利息



http://money.monex.co.jp/archives/20070225_2.html

数学の歴史上、最大の発見は何か？」「それは複利である」（byアインシュタイン）

eの発見、それは複利計算から

1年後に発生する利息が元本のα倍とすると $N_0 \xrightarrow{1年後} N_0(1+a)$

利息は毎月発生していると考えると

$$N_0 \xrightarrow{1年後} N_0\left(1+\frac{a}{12}\right)^{12}$$

利息は毎日発生していると考えると

$$N_0 \xrightarrow{1年後} N_0\left(1+\frac{a}{365}\right)^{365}$$

利息は連続的に発生していると考えると

$$N_0 \xrightarrow{1年後} N_0\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{a} = N_0 e^{a}$$

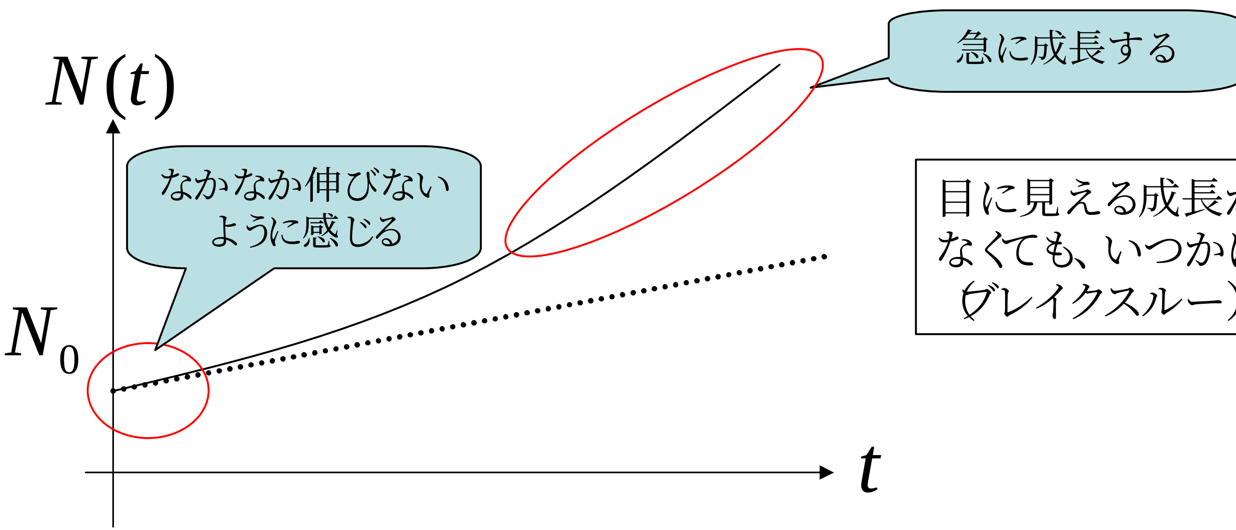
a	e^a	$(1+a)$
0.1	1.105	1.1
0.5	1.65	1.5
1	2.7	2
2	7.4	3
3	20	4

$$e \equiv \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

ヤコブ・ベルヌーイ（1683）

人間の知的能力の成長

$$\underbrace{dN}_{\text{獲得する知能}} = \overbrace{a\underbrace{N}_{\text{その時の知能}}}^{\text{学習の効率}}\overset{\text{学習時間}}{dt} \rightarrow N(t) = N_0 e^{at}$$



目に見える成長が感じられなくても、いつかは急成長(ブレイクスルー)する

2階線形常微分方程式

数学的準備①　マクローリン展開

無限回微分可能な関数$f(x)$が、以下のようにべき級数展開できるとする：

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

係数a_nを求めるには、上式の両辺をn回微分して、x=0を代入すればよい

$$\left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=0} = \left.\frac{d^n}{dx^n}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots)\right|_{x=0} = n! a_n$$

よって、

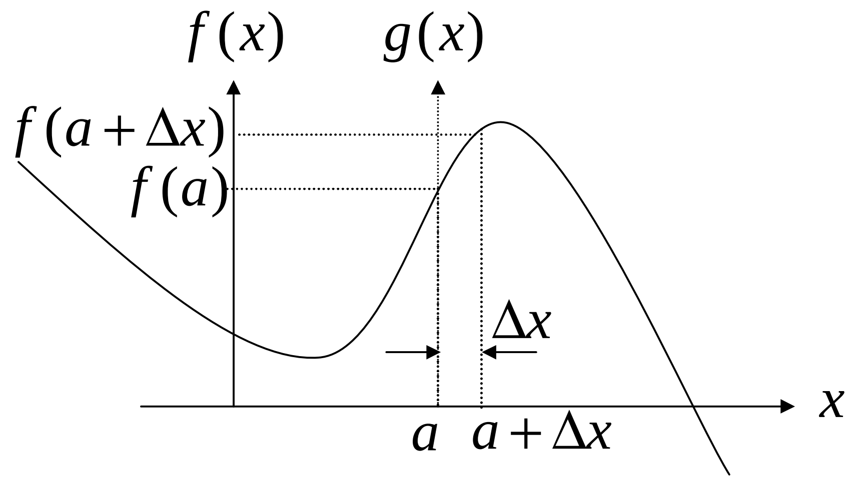
$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \left(f^{(n)}(x) \equiv \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right)$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0) x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots$$

テイラー展開と近似

$x = a$ を新しい原点とする関数

$$g(x) = f(a+x)$$



を考えて$g(x)$ をマクローリン展開すると

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2!}g''(0)x^2 + \cdots\cdots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}x^n + \cdots$$

xは 原点からの差異」を表すので、これをΔxと書き換えて、g をfで表すと

$$f(a+\Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(a)(\Delta x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(\Delta x)^n + \cdots$$

0次近似　**1次近似**　**2次近似**　**n次近似**

指数関数・三角関数のべき級数展開

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

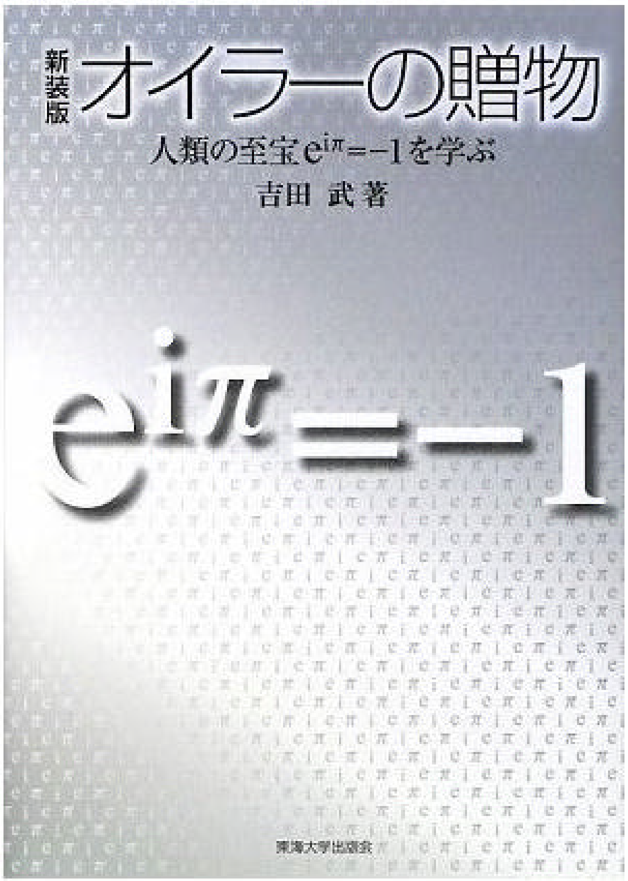
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (ix)^n$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots\right) + i\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right) = \boxed{\cos x + i \sin x}$$

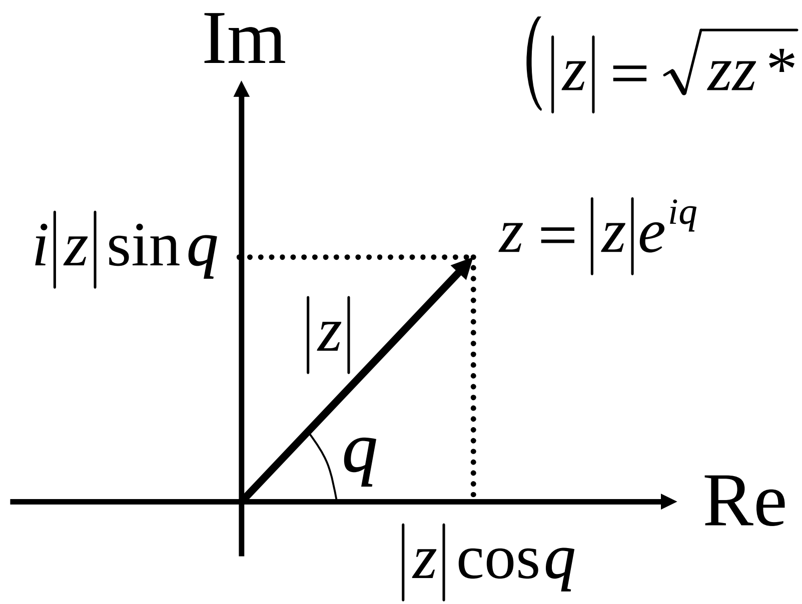
数学的準備② オイラーの公式



$$e^{iq} = \cos q + i \sin q$$

$$z = |z| e^{iq} = |z| \cos q + i |z| \sin q$$

$$\left(|z| = \sqrt{zz^*} \right)$$



指数関数の性質

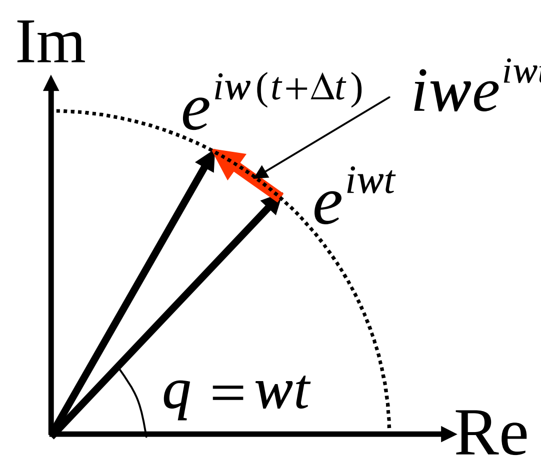
$$e^{i(q_1+q_2)} = e^{iq_1}e^{iq_2}$$

cf.　三角関数の加法定理

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\frac{d}{dq}e^{iq} = ie^{iq}$$



特に $q = wt$　と表されるとき

$$\frac{d}{dt}e^{iwt} = \frac{de^{iq}}{dq}\cdot\frac{dq}{dt} = iw\,e^{iwt}$$

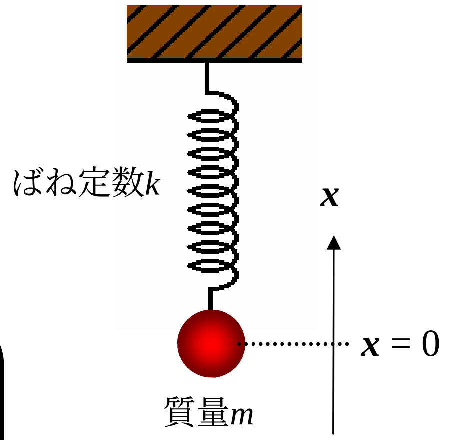
注意）指数関数の微分では、実部と虚部は混じらない

$$\mathrm{Re}\left[\frac{de^{iwt}}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left[e^{iwt}\right] \qquad \mathrm{Im}\left[\frac{de^{iwt}}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\mathrm{Im}\left[e^{iwt}\right]$$

単振動

ばね定数kのばねに質量mのおもりがついているとする。自然長からの伸びをxとすると、運動方程式は

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \to \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$



解の形として、指数関数 $x = e^{at}$ を仮定して代入すると

$$\left(a^2 + \frac{k}{m}\right)e^{at} = 0 \to a = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i w_0 \quad \left(w_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

よって、一般解は

$$x(t) = Ae^{iw_0 t} + Be^{-iw_0 t}$$

初期条件として、t=0 のとき $x = x_0$, $\dot{x} = 0$ の場合、

$$A = B = \frac{x_0}{2} \to x(t) = \frac{x_0}{2}e^{iw_0 t} + \frac{x_0}{2}e^{-iw_0 t} = x_0 \cos w_0 t$$