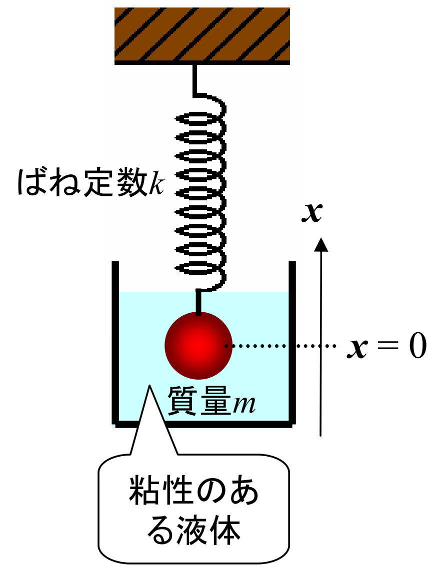
減衰振動

速度に比例する抵抗力（粘性抵抗）が働くの単振動の運動方程式は

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx \rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$



ただし、$\gamma \equiv b/2m, \omega_0 = \sqrt{k/m}$ とおいた。

解の形として、指数関数 $x = e^{\alpha t}$ を仮定して代入すると

$$\left(\alpha^2 + 2\gamma + \omega_0^2\right)e^{\alpha t} = 0 \rightarrow \alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$\gamma < \omega_0$ の場合、$\alpha_\pm = -\gamma \pm i\omega \left(\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0\right)$

一般解は $x(t) = Ae^{\alpha_+ t} + Be^{\alpha_- t} = e^{-\gamma t}\left(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}\right)$

初期条件として、t=0 のとき $x = x_0, \dot{x} = 0$ の場合、

$$A = \frac{\omega - i\gamma}{2\omega}x_0, B = \frac{\omega + i\gamma}{2\omega}x_0 \rightarrow x(t) = x_0\frac{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}}{\omega}e^{-\gamma t}\cos(\omega t - \varphi)$$