

平成 25 年度夏学期 力学 B (鳥井) レポート問題 1 3 (最終回)

出題：7 月 4 日 提出：7 月 11 日 3 限 補講開始前

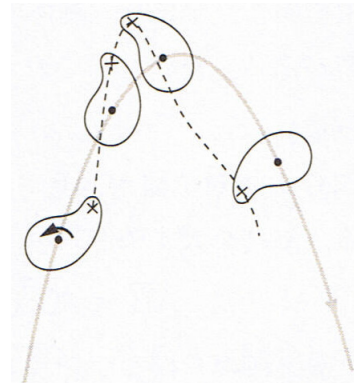
1. 右図のように板を投げ上げると、重心でない点の軌跡は複雑な曲線を描くが、重心の軌跡はきれいな放物線を描く。これは、重心の座標 \mathbf{r}_G が運動方程式

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_G}{dt^2} = \mathbf{g} \quad (\ast)$$

を満たすためである (\mathbf{g} は鉛直下向きで大きさが重力加速度であるベクトルを表す)。重心の座標の定義式

$$\mathbf{r}_G = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

(\mathbf{r}_i および m_i は、板を構成する個々の原子・分子の位置および質量、 M は板の質量を表す) に立ち返り、(\ast) 式を証明せよ。その際、どの段階で作用反作用の法則を利用したか明示せよ。

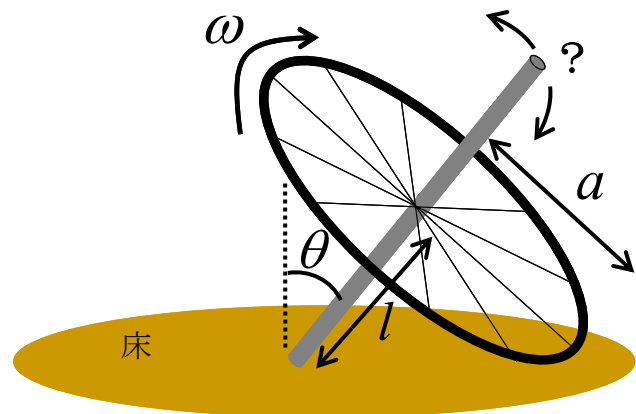


兵頭「考える力学」p220 図 11.12

2. 右の写真は、フォーク 2 本とコインを使ったやじろべえである。実際に作ってみよ (コインの代わりに爪楊枝を用いても面白い)。やじろべえは、物理的には「実体振り子」と呼ばれる振り子の一種である。角運動量の時間変化を表す方程式 $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{N}$ (\mathbf{N} は外力のトルクの和) を用いて、やじろべえの安定位置からの角度のずれ φ が従うべき方程式が $I\ddot{\varphi} = -Mgh\varphi$ (ただし $\varphi \ll 1$ のとき) で与えられることを示せ (I は支点まわりの慣性モーメント、 M は質量、 g は重力加速度、 h は支点から重心までの距離)。この方程式より、やじろべえの振動周期を求め、これを長くする (やじろべえをゆっくり振動させる) ための条件について考察せよ。その考察に基づき、上述のフォークやじろべえの周期が 1 秒以上になるよう工夫せよ。



3. 回転している物体に、回転軸に対して垂直な向きにトルクを加えると、回転軸 (つまり角運動量の向き) が回転を始める。このような運動を一般に歳差運動 (precession) という。歳差運動でよく知られた例が、独楽の首振り運動 (みそすり運動) である。ここでは自転車の車輪 (半径 a) を独楽とした場合の歳差運動を考えよう。



(1) 自転車の車輪の質量はすべて外周部 (rim) に集中していると考え (スポークおよび車軸の質量は無視する)。車輪の質量を M として、車輪の慣性モーメント I を求めよ。

- (2) 車輪の中心から床までの距離を l 、車軸の垂直方向からの傾きを θ とする。車輪に働くトルク \mathbf{N} の大きさを求めよ。
- (3) 車輪は上から見て時計回りに回転しているとする。このとき、車軸は時計回りと反時計回りのどちらで歳差運動するか？手近にある独楽（画びょうでもよい）を回して実験で確認せよ。
- (4) 車輪の回転の角速度を ω とする。車軸の歳差運動の角速度 Ω を求めよ。一般に、独楽が止まる寸前は、回転の角速度 ω が極端に小さくなる。このとき、歳差運動の角速度はどう変化するか？これも実験で確認せよ。
- (5) （参考課題）世の中には歳差運動しない「マクスウェルの独楽」と呼ばれるおもちゃがある（web で調べてみよ）。なぜ歳差運動しないのか考察せよ。また、実際に作ってみよ。

補講は 7 月 11 日 3 限に 524 教室で行います。解説して欲しいレポート問題があれば事前に鳥井 (ytorii@phys.c.u-tokyo.ac.jp) までご連絡ください。