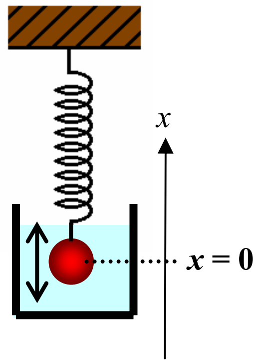
平成 25 年度夏学期　力学 B（鳥井）レポート問題８

出題：５月 30 日　締切：6 月 6 日

１．　ばね定数kのばねに質量mの球がつながれている。球は粘性のある液体の中にあり、速度に比例する抵抗力$F_{\mathrm{I}} = -2m\gamma v$を受けるものとする。$x=0$はつりあいの位置とする。



（１）　球の位置xに関する運動方程式を書き表せ。

（２）　運動方程式の解として$x = e^{\alpha t}$の形を仮定する。これを運動方程式に代入し、αの値を求めよ。

（３）　運動方程式の一般解（任意定数を含む解）を求めよ。

（４）　時刻$t=0$に位置$x=0$にあった球に上向きの初速度v_0を与えた。その後の時刻における球の運動を求めよ。

（５）　（４）の運動における振動周波数ωは、抵抗力が無視できる場合（つまり$\gamma=0$）の振動周波数ω_0（これを**固有周波数**という）と異なっている。観測された振動の周期が１秒、振動の振幅が$1/e \approx 0.37$倍に減衰するのにかかった時間が 10 秒であったとする。振動周波数の固有周波数からのずれは何%か（ヒント：近似式$(1+x)^{\alpha} \cong 1+\alpha x$を利用せよ）。

次に角周波数ωの周期的な外力$F\cos\omega t$を球に加えた場合を考える。

（６）　球の位置xに関する運動方程式をω_0を用いて（kを用いずに）書き表せ。

（７）　運動方程式の定常解（十分時間が経った後の解）として$x(t) = x(\omega)e^{i\omega t}$の形を仮定し、その実部が実際の位置を表現すると約束する。これに伴い、周期的な外力も$Fe^{i\omega t}$（その実数部が実際の力$F\cos\omega t$となる複素数）で表す。微分演算で実部と虚部は混じらないので、最終的な解の実部が実際の（本当の）解となる。$x(t)$を運動方程式に代入し、$x(\omega)$の値（一般に複素数）を求めよ。

（８）　実際の球の位置を表す関数は、複素平面上で回転する関数$x(\omega)e^{i\omega t}$の実部$\mathrm{Re}[x(\omega)e^{i\omega t}]$である。球の実際の（我々が住む実数の世界での）振動の振幅を求めよ。

（９）　$\gamma << \omega_0$のとき、つまり減衰の時定数が固有振動の周期より十分長い場合、振動の振幅は$\omega=\omega_0$で鋭いピークを持つ（共振する）。このピークの振幅は、$\omega=0$、つまり力を一方向に与え続けた場合の振幅の何倍になるか。

（１０）　外力の角周波数ωがω_0に十分近いときは、$\omega^2-\omega_0^2 = (\omega+\omega_0)(\omega-\omega_0) \approx 2(\omega-\omega_0)$と近似できる。振動の振幅の２乗（振動のエネルギーに相当）が、共振周波数における値（ピーク値）の半分以上になるような外力の角周波数ωの範囲$\Delta\omega$を求めよ（これを共振の**半値全幅**、英語では full width at half maximum　（**FWHM**）と呼ぶ。）

（１１）　近年、高層ビルの長周期（つまり低周波数）地震動対策が話題となっている。とあるビルが来るべき長周期地震（周期は予測されているものとする）に耐えられないと診断されたとする。上の設問から学んだ知識のみを使って、可能な対策を考案せよ。