平成 25 年度夏学期　力学 B（鳥井）レポート問題 7

出題： 5 月 23 日　締切：5 月 30 日授業開始前

1．関数 $f(x)=(1+x)^n$ を考える。

（1）　$f(x)$ を x^2 の項までマクローリン展開せよ（$|x|\ll 1$ における $f(x)$ の２次近似式)。

（2）　「102」という数値は $100+2=10^2\times(1+0.02)$ と表現できる。（1）の結果を用いて $(102)^5$ および $\sqrt{102}$ の近似値を求めよ。

（3）　$(102)^5$ および $\sqrt{102}$ を実際に電卓もしくはエクセルを用いて計算し、（2）の近似値と比較せよ (エクセルではそれぞれ『=102^5』、『=SQRT(102)』と入力すればよい)。

2．$|x|\ll 1$ であるとして、次の式の x^2 のオーダーまでの近似式を求めよ。

（1）$\dfrac{e^x}{1+x}$

（2）$\sqrt{1+\sin x}$

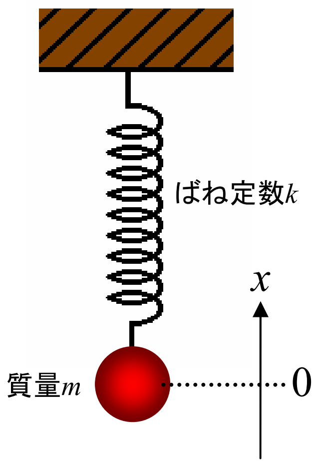
3．オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ と三角関数の加法定理を用いて、以下を証明せよ。

（1）　$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

（2）　$\dfrac{d}{dt}e^{i\omega t}=i\omega e^{i\omega t}$

（3）　$\mathrm{Re}\left[\dfrac{de^{i\omega t}}{dt}\right]=\dfrac{d}{dt}\mathrm{Re}\left[e^{i\omega t}\right]$、$\mathrm{Im}\left[\dfrac{de^{i\omega t}}{dt}\right]=\dfrac{d}{dt}\mathrm{Im}\left[e^{i\omega t}\right]$（$e^{i\omega t}$ に限らず、一般に複素関数は微分しても実部と虚部は混じらない）

4．ばね定数 k のばねに質量 m の球がつながれている。$x=0$ はつりあいの位置とする。



（1）　球の位置 x に関する運動方程式を書き表せ。

（2）　（1）の運動方程式の解として、$f(t)$ と $g(t)$ が見つかったとする。このとき、関数 $Af(t)+Bg(t)$（A,B は任意定数）も運動方程式の解であることを示せ（この性質は、線形微分方程式一般に成り立つ)。

（3）　運動方程式の解として $x=e^{\alpha t}$ の形を仮定する。これを運動方程式に代入し、α の値を求めよ（$\omega_0\equiv\sqrt{k/m}$ と定義せよ)。

（4）　（2)、（3）の結果より、運動方程式の一般解（任意定数を含む解）を求めよ。

（5）　時刻 $t=0$ に位置 $x=0$ にあった球に上向きの初速度 v_0 を与えた。その後の時刻における球の運動（運動方程式の解）を求めよ。