統合自然科学科　電磁気学（鳥井）　資料　平成 27 年 1 月 26 日

電磁ポテンシャルと電磁輻射

（復習）ヘルムホルツの分解定理

　既に講義で紹介したように、任意のベクトル場 $\boldsymbol{X}$ は、その発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{X}$ と回転 $\nabla\times\boldsymbol{X}$ が与えられているならば、無限遠で $\boldsymbol{X}=0$ とする境界条件のもとで以下のように一意的に表現できる

$$\boldsymbol{X}=-\nabla\phi+\nabla\times\boldsymbol{A}$$

ただし、

$$\phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla'\times\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$$

これを**ヘルムホルツの（分解）定理**と呼ぶのであった。この定理の証明は、例えば太田浩一「電磁気学の基礎 I」の該当ページに書いてありますが、今はこれを信じていただければ結構です。証明に必要なポアソン方程式の解法は、以下の議論の参考にもなるので要約しておきます。

　電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ の電荷が作るポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ は、$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi$ および $\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho(\boldsymbol{r})$ より、

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{r})=-\rho(\boldsymbol{r})/\varepsilon_0$$

を満たす。これを**ポアソン方程式**いう。特に点電荷、つまり $\rho(\boldsymbol{r})=q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ の場合を考えると、ポアソン方程式は

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{r})=-\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

となるが、簡単のため、単位系（つまり人間の都合）で決まっている係数部分を 1 とおいて

$$\nabla^2G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

という方程式の解を考えよう。この方程式の解 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ をポアソン方程式の**グリーン関数**という。３次元デルタ関数が

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

と表わされることを思い出せば（もしくは点電荷のつくる電場がクーロンの法則に従う事を思い出せば）、無限遠でゼロであるようなグリーン関数は

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

で与えられることがわかる。一般の電荷密度に対するポアソン方程式の解（ただし無限遠でゼロの境界条件）は、ポアソン方程式の線形性より、単位点電荷（$q=1$）のグリーン関数$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')/\varepsilon_0$を電荷密度の重みをつけて重ね合わせればよいので、

$$\phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')dV'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$$

と表わされる（リウヴィルの定理を用いると一意性も証明できる）。

1. マクスウェル方程式の一般解

E-B 対応（磁気モーメントの起源を電流と考える立場）のマクスウェル方程式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{3}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\left(\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \tag{4}$$

の一般解を求めたい。式（3）より、磁場$\boldsymbol{B}$には湧き出しはないので、ヘルムホルツの分解定理より、ベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}$を用いて

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{5}$$

と表現できる。レポート問題 1 で各自証明してもらったように、$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$が常に成り立つので、式（3）は自動的に満たされることになる。式（5）を式（2）に代入すると、

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0 \tag{6}$$

となるが、$\boldsymbol{E}+\partial\boldsymbol{A}/\partial t$は回転がゼロなので、これまたヘルムホルツの分解定理より、あるスカラーポテンシャルϕを用いて、

$$\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\nabla\phi \tag{7}$$

と表現できる。これより、電場は

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{8}$$

と表現できる。これも講義で確認したように、$\nabla\times(\nabla\phi)=0$が常に成り立つので、式（2）は自動的に満たされることになる。ϕと$\boldsymbol{A}$をまとめて**電磁ポテンシャル**と呼ぶ。今後は電磁ポテンシャルを電磁場を表現する基本的な場と考えよう。ひとたび電磁ポテンシャルが求まれば、電場や磁場は式（5）と式（8）を用いて（必要ならば）求めればよいのである。

電磁ポテンシャルは、当然マクスウェル方程式を満たしていなければならないが、式（2）と式（３）はもう考えなくてもいい（自動的にみたされる）。考えるべきは式（１）と式（４）のみである。式（8）を式（1）に代入すると、

$$-\nabla^2\phi-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{9}$$

同様に、式（5）、（8）を式（4）に代入すると、

$$\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)-\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}=\mu_0\boldsymbol{j} \tag{10}$$

となる。これら２式が満たされるような電磁ポテンシャルが見つかれば、それがマクスウェル方程式の立派な解である。しかし残念ながら式（9）、（10）はスカラーポテンシャルϕとベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}$が入り混じり、解きやすい形をしていない。ここで、多少天下り的だが、式（10）の左辺第一項の勾配の中身（スカラー関数）がゼロ、つまり

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \tag{11}$$

という条件（これを**ローレンツ条件**という）を満たすとする。この条件を式（9）、（10）に代入すると、驚くべきことに

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{12a}$$

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{j} \tag{12b}$$

と 2 式が独立になり、しかもϕと$\boldsymbol{A}$にかかる演算子は全く同じになる。演算子$\partial^2/\partial(ct)^2-\nabla^2\equiv\square^2$は**ダランベルシャン**と呼ばれ、$\square^2\phi=f$の形の方程式を**ダランベール方程式**という。ここで改めて$A_\mu\equiv(\varphi/c,\boldsymbol{A})$、$j_\mu\equiv(c\rho,\boldsymbol{j})$と表記することにすれば、式（12a）、（12b）は

$$\square^2A_\mu=\mu_0j_\mu \tag{13}$$

と一つの式で簡素に（美しく）表現される。式（13）は、実は便宜的な簡素化以上の意味を持っている。相対論の講義でローレンツ変換しても不変な量を（ローレンツ）**スカラー**、ローレンツ変換と同じ変換規則に従う４成分量を**4元ベクトル**と定義したが、j_μは**4元電流**、A_μは**4元ポテンシャル**、ダランベルシャン$\square^2$はスカラー演算子であり、式（13）は慣性系に依存しない表現となっている。

　さて、先ほど半ば強引に式（11）のローレンツ条件を導入したが、これを満たすϕ、$\boldsymbol{A}$

が常に存在することを以下に示そう。ある電磁ポテンシャルϕ、$\boldsymbol{A}$が式（9）（10）を満たす（つまりマクスウェル方程式を満たす）が残念ながらローレンツ条件は満たしていないとする。つまり

$$f \equiv \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} \neq 0 \tag{14}$$

とする。ここで、電磁ポテンシャルをあるスカラー関数χを用いて次のように変換する

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla \chi \tag{15}$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{16}$$

式（15）を式（5）に代入すると、恒等式$\nabla \times (\nabla \chi) = 0$より

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}' = \nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla \times (\nabla \chi) = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{17}$$

となり変換前と同じ磁場を表現する。今度は式（15）（16）を式（8）に代入すると、

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \phi' - \frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} = -\nabla \phi + \nabla \frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla \frac{\partial \chi}{\partial t} = -\nabla \phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{18}$$

となり、これも変換前と同じ電場を表現する。このように電磁場を不変に保つ変換を**ゲージ変換**と呼ぶ。さて、ゲージ変換後の電磁ポテンシャルをローレンツ条件の式の左辺に代入すると、

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} + \nabla \chi) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}\right) = f + \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi \tag{19}$$

これがゼロであればゲージ変換後の電磁ポテンシャルはローレンツ条件を満たす。そのようなχは次のダランベール方程式を満たさなければならない

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi = -f \tag{20}$$

後に示すように、fが任意のスカラー関数でも、このダランベール方程式は常に解を持つ。したがって、ローレンツ条件を満たす電磁ポテンシャルを必ず求めることができる。今後は最初から電磁ポテンシャルがローレンツ条件を満たすとし、式（12）を議論の出発点とする。

　ダランベール方程式のグリーン関数（伝搬関数）で物理的に意味のある遅延伝搬関数

$$G_{\mathrm{ret}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', t) = \frac{1}{4\pi |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\delta(t - |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|/c) \tag{21}$$

であるから（これはレポート問題にする）、式（12）より電磁ポテンシャルの一般解は

$$\phi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t - |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|/c)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dV' \tag{22}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV' \tag{23}$$

である。ちなみに、これらはローレンツ条件を自動的に満たしている。式（22）（23）は、電荷密度、電流密度が時間に依存しない場合、それぞれ静電磁場におけるクーロンポテンシャル、ベクトルポテンシャルに帰着する。静電磁場との違いは、電荷密度、電流密度の時刻が遅延している点のみである。ファインマン物理学では、式（22）（23）を導出した後に次のように述べている。「われわれはマクスウェル方程式を解いた。どんな電荷、電流があっても、上の積分によりポテンシャルが直接に分かり、微分して場が求められる。これでマクスウェル方程式は終わりである。（中略）電磁気の世界の中心はここにある。電気、磁気、光の完全な理論—動く電荷の作る場の完全な記述など—それはすべてここにある。力と美の点で完成された、マクスウェルのうち建てた建造物がここにある。これは恐らく物理学の最大の成功の一つである。その重要性を記憶するために、それをまとめて、きれいな額に入れておこう」。我々もファインマンにならって、電磁気学の全てを額に入れておこう（$\boldsymbol{r}$ を１、$\boldsymbol{r}'$ を 2、$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=r_{12}$ とおいた）。

マクスウェル方程式：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\qquad\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\qquad\qquad \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\left(\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)$$

その解：

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

$$\phi(1,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(2,t-r_{12}/c)}{r_{12}}dV_2$$

$$\boldsymbol{A}(1,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(2,t-r_{12}/c)}{r_{12}}dV_2$$

2. 電磁波の放射

このマクスウェル方程式の解を使って、原点付近で振動する電気双極子が放射する電磁場を求めてみよう。振動する電荷 q の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}(t)$ とし、原点には $-q$ の動かない電荷が置かれているとする。この電気双極子は

$$\boldsymbol{p}(t)=q\boldsymbol{x}(t) \tag{24}$$

である。この電気双極子が作る電流密度は、電荷の電荷密度を ρ とすれば

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \dot{\boldsymbol{x}}(t)\rho(\boldsymbol{r},t) \tag{25}$$

である。原点から十分離れた観測地点では、式（23）の分母の$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$は、単に原点からの距離$r$で近似でき、これを定数とみなして積分の外に出すことができる。また、振動する電荷の速度が光速に比べ十分遅ければ、電荷内の遅延時間の違いは無視し、遅延時間を一律にr/cと置くことができる。そのような場合は、式（23）の積分を実行すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) &\cong \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t-r/c)}{r}dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{\dot{\boldsymbol{x}}(t-r/c)}{r}\int\rho(\boldsymbol{r}',t-r/c)dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\dot{\boldsymbol{x}}(t-r/c)}{r} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\boldsymbol{p}}(t-r/c)}{r}\end{aligned} \tag{26}$$

が得られる。このベクトルポテンシャルの回転が磁場であるから、$\boldsymbol{e_r}$を$\boldsymbol{r}$方向の単位ベクトルとして

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\dot{\boldsymbol{p}}+(r/c)\ddot{\boldsymbol{p}}]_{t-r/c}\times\boldsymbol{e_r}}{r^2} \tag{27}$$

となる（$[\ ]_{t-r/c}$は遅延した時刻$t-r/c$での値をとることを意味する）。右辺第一項

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\dot{\boldsymbol{p}}]_{t-r/c}\times\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t-r/c)\times\boldsymbol{e_r}}{r^2}dV' \tag{28}$$

は、電流密度が時間的に変化しなければ、原点付近にある電流密度がつくる静磁場を求めるビオ・サバールの公式に他ならない。右辺第二項

$$\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{[\ddot{\boldsymbol{p}}]_{t-r/c}\times\boldsymbol{e_r}}{r} \tag{29}$$

は輻射を表す項である。以降、観測点は十分遠方にあり、第二項の磁場（輻射）のみを考える。電気双極子が角周波数ωで単振動している場合、$\ddot{\boldsymbol{p}} = -\omega^2\boldsymbol{p}$であるから、

$$\boldsymbol{B} = -\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi c}\frac{[\boldsymbol{p}]_{t-r/c}\times\boldsymbol{e_r}}{r} \tag{30}$$

この振動する磁場の振幅は、電荷の単振動の振幅をx_0とすれば

$$B_0 = \frac{\mu_0 q x_0\omega^2\sin\theta}{4\pi rc} \tag{31}$$

となる。ここでθは電荷の振動方向と観測点$\boldsymbol{r}$の方向のなす角である。この振動する磁場が電磁波を形成していると考えれば、振動磁場に付随する振動電場の振幅は、マクスウェル方程式より得られる関係式$E=cB$より

$$E_0 = \frac{\mu_0 q x_0\omega^2\sin\theta}{4\pi r} = \frac{q x_0\omega^2\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \tag{32}$$

と表せる。この振動する双極子が電磁波として放出するパワーは、電磁波のエネルギー流を表す（真空中での）ポインティングベクトルの大きさの時間平均

$$\bar{S} = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 = \frac{q^2 x_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3 r^2} \sin^2\theta \tag{33}$$

を全立体角にわたって積分し、

$$P = \int \bar{S} d\Omega = \frac{q^2 x_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3} \tag{34}$$

となる*。調和振動子のエネルギーは$U = \dfrac{1}{2} m_e \omega^2 x_0^2$であるから、エネルギー減衰レート$\Gamma$は

$$\Gamma = \frac{P}{U} = \frac{q^2 \omega^2}{6\pi\varepsilon_0 m_e c^3} \tag{35}$$

で与えられる。

3. 自己力（発散の困難と繰り込み）

運動する半径aの球状の電荷が自分自身に及ぼす自己力を式（22）（23）を用いて計算すると、電荷の速度は光速に比べて十分小さく、$a \to 0$の極限で

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi a} \ddot{\boldsymbol{x}}(t) + \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dddot{\boldsymbol{x}}(t) \tag{36}$$

となることが知られている。この式は$a \to 0$の極限での式ではあるが、右辺第一項は$a \to 0$の極限で発散する。電荷の“裸”の質量をm_0とすると、ニュートンの運動方程式は

$$m_0 \ddot{\boldsymbol{x}}(t) = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi a} \ddot{\boldsymbol{x}}(t) + \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dddot{\boldsymbol{x}}(t) \tag{37}$$

となるが、ここで右辺第一項を左辺に移項し、電荷の“繰り込まれた”質量を

$$m = m_0 + \frac{\mu_0 q^2}{6\pi a} \tag{38}$$

と定義すれば、運動方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dddot{\boldsymbol{x}}(t) \equiv \boldsymbol{F}_{\mathrm{rad}} \tag{39}$$

となる。つまり、繰り込まれた質量を持つ電荷が受ける自己力は、実効的に式（37）の右辺第二項のみと考えることができる。特に電荷が単振動している場合、$\dddot{\boldsymbol{x}}(t) = -\omega^2 \dot{\boldsymbol{x}}(t)$と表せるので、

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{rad}} = -\frac{\mu_0 q^2 \omega^2}{6\pi c} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \tag{40}$$

となり、自己力は速度に比例する減衰力として働く。この減衰力が運動する電荷になす単

---

* 単振動ではなく、一般の運動の場合、放射エネルギーは$P = \dfrac{\mu_0}{6\pi c} [\ddot{\boldsymbol{p}}]^2_{t-r/c}$で与えられる。

位時間あたりの仕事の時間平均は、電荷の単振動の振幅を x_0 とすれば、

$$\overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{rad}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}(t)} = -\frac{\mu_0 q^2 \omega^2}{6\pi c}\,\overline{\dot{\boldsymbol{x}}^2(t)} = -\frac{\mu_0 q^2 x_0^2 \omega^4}{12\pi c}\left(= -\frac{q^2 x_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}\right) \qquad (41)$$

となる。これは、式（34）の振動する電荷から放射される電磁波のパワーと等しい大きさを持つ。つまり、自己力を考えることによって初めて輻射場と運動する電荷のエネルギー保存則が成立する。ファインマンはノーベル賞講演の中で、自己力の問題を次のように述べている。「わたしは大学院に進み、いつしか、電子は自身に作用をしないというアイデアに間違いのあることを悟ったのです。電子を加速すると輻射を出しますから、その分のエネルギーだけ余分の仕事をしてやらなければなりません。輻射の抵抗というものが生ずるのでして、この力に抗して仕事をする必要があるわけです。当時この力の起源は、ローレンツに従って、電子の自身への作用にあるとされていました。自身への作用を計算してみますと、その第一項は一種の慣性を与えます（相対論的には不満足な点はありますけれども）。この慣性的な項は点電荷に対しては無限大です。しかし第二項はエネルギーの損失の速さを与えるもので、これは点電荷については輻射されるエネルギーの量から求めた損失に正しく一致いたします。それゆえ、輻射抵抗の力はエネルギー保存のためには絶対に必要なのに、電荷が自身に作用しないとしたら消失してしまうのでした。」（R. P. ファインマン著、江沢洋訳「物理法則はいかにして発見されたか」より。）この古典電磁気学における発散の困難は、量子電気力学（QED）にも受け継がれ、繰り込み理論*によって表面上は回避されているが、現在まで解決されていない。しかしながら、繰り込み理論を用いた QED はラムシフトや電子の異常磁気モーメントの実験値を極めてよく再現し、現在実験的に最も高い（10^{12}）精度で検証された理論となっている**。

*観測される電子の質量、電荷を計算結果、つまり「裸の」質量、電荷と輻射補正との和と等しいと置くことによって、無限大を取り除く手法。1947 年、水素原子のラムシフトを説明するために朝永振一郎、ジュリアン・シュウィンガー、リチャード・ファインマンによって独立に提唱された。この 3 名は 1965 年にノーベル物理学賞を受賞する。

** 現在はむしろ QED が予測する電子の異常磁気モーメントの値が実験値と等しいとおくことによって超微細構造定数 $\alpha \equiv e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c$ を決定している。2006 年、ハーバード大学の G.ガブリエルスらが測定した電子の g 因子は g/2=1.001 159 652 180 85(76)。この値が QED の計算結果と等しいとおくことによって、α^{-1}= 137.035 999 070(98)と定められた。