太田「電磁気学の基礎 I」(シュプリンガー・ジャパン)

が得られる．電位は $z=0$ で連続だが，その勾配，すなわち電場は不連続で，(3.19) の境界条件を満たしている．

電場が不連続な面に働く力を計算するとき注意が必要である．導体面上の面積要素 $\mathrm{d}S$ 上の電荷 $\sigma\mathrm{d}S$ に働く力は，それ以外の電荷がつくる電場 E が及ぼす力 $E\sigma\mathrm{d}S$ である．$\sigma\mathrm{d}S$ のつくる電場は $\mathrm{d}S$ の両側で $\pm\sigma/2\epsilon_0$ だから，$\mathrm{d}S$ の両側の電場はそれぞれ $E_1 = E+\sigma/2\epsilon_0$，$E_2 = E-\sigma/2\epsilon_0$ になり $E=\frac{1}{2}(E_1+E_2)$ が得られる．ここで用いた方法はラプラースによるもので，ポアソンの論文 (1811) に引用されている．こうして電荷面密度に働く力は

$$\mathbf{F} = \int \mathrm{d}S\sigma\mathbf{E} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}S\sigma(\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2) \tag{3.24}$$

~~で与えられる．~~

$$\boxed{\nabla\cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\ ,\ \nabla\times E = 0}\ (2.41)$$

3.4　ポアソン：ポテンシャル方程式

図 3.3　ポアソン

(2.41) で与えられた静電場の 2 つの基本方程式を，同等の別の式に書き直そう．$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$ を (2.41) の第 1 の式，ガウスの法則に代入すると

$$\boxed{\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\varrho(\mathbf{x})} \tag{3.25}$$

になる．これをポアソン方程式と言う（ポテンシャル方程式とも言う）．

$$\nabla^2 = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

はラプラース演算子である．歴史的にはラプラース演算子の「平方根」としてナブラが発見された．マーフィー (R. Murphy, 1806-43) が 1833 年に考えた記号 $\triangle$ も広く使われている．デルタ関数を与える (2.38) は

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{3.26}$$

ここまで (2.38)

$$\boxed{\phi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV' \frac{\rho(x')}{|x-x'|}}\ (3.4)$$

と書ける．これを用いると，(3.4) で与えた $\phi(\mathbf{x})$ がポアソン方程式の解になっていることを示せる．(3.4) にラプラース演算子を作用させると

$$\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}V'\varrho(\mathbf{x}')\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = -\frac{1}{\epsilon_0}\int \mathrm{d}V'\varrho(\mathbf{x}')\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

になる．電荷分布がない場所ではポアソン方程式はラプラース方程式

$$\boxed{\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = 0}$$

になる．ラプラース (1782) が発見した重力ポテンシャルの満たす方程式だが，ポアソン (1813) は質量密度項を加える必要があることに気づいた．2 次元のラプラース方程式はオイラー (L. Euler, 1707-83) までさかのぼる (1755)．

平面電荷

$z=0$ 平面に一様な面密度 σ を持つ電荷の電位は 1 次元のポアソン方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\phi(z) = -\frac{1}{\epsilon_0}\sigma\delta(z) \tag{3.27}$$

を満たす．$z\neq 0$ では電荷がないから 1 次元のラプラース方程式を解けば

$$\phi'(z) = c_1, \quad (z>0), \qquad \phi'(z) = c_2, \quad (z<0)$$

である．(3.27) により $\phi'(z)$ は奇関数だから $c_1 = -c_2$ である．また，(3.19) から電場の境界での跳びが $-c_1+c_2 = \sigma/\epsilon_0$ でなければならないから $c_1 = -c_2 = -\sigma/2\epsilon_0$ になり (3.23) が得られる．

円柱対称電荷

次に，円柱対称電荷の電位をポアソン方程式によって解いてみよう．x に関する 2 階偏導関数

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho}\phi' - \frac{x^2}{\rho^3}\phi' + \frac{x^2}{\rho^2}\phi''$$

と y に関する 2 階偏導関数を加えるとポアソン方程式

$$\nabla^2\phi = \phi'' + \frac{1}{\rho}\phi' = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\rho\phi') = -\frac{1}{\epsilon_0}\varrho \tag{3.28}$$

が得られる．積分すると，

電荷が分布して電位 ϕ' がつくられる．ラプラース方程式の特殊解 (4.6) のうち，無限遠で発散しないのは $\frac{1}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$ であるから

$$\phi=\phi_0+\phi'=A_1 r\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty} B_l \frac{1}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$$

とすればよい．一方，球表面では ϕ が定数にならなければならない．そのためには ϕ' には $r=a$ で定数になる B_0 項と，ϕ_0 の θ 依存性を打ち消すことができる B_1 項のみが残る．$r=a$ での境界条件から B_1 が決まり

$$\phi=-E_0 r\cos\theta+\frac{B_0}{r}+\frac{E_0a^3\cos\theta}{r^2}$$

になる．球面上の電場の法線方向成分は

$$E_n=-\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=a}=\frac{B_0}{a^2}+3E_0\cos\theta$$

である．球表面の電荷面密度 $\sigma=\epsilon_0E_n$ を積分すると，球面上の全電荷は

$$q=2\pi a^2\epsilon_0\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\sin\theta\left(\frac{B_0}{a^2}+3E_0\cos\theta\right)=4\pi\epsilon_0B_0$$

である．$q=0$ の場合は $B_0=0$ だから，球面上に誘導される電荷面密度は

$$\sigma=P\cos\theta,\qquad P=3\epsilon_0E_0 \tag{4.9}$$

になる．予想されたように，$z>0$ で正，$z<0$ で負に電荷が分布する．この電荷分布がつくる電位を，球の中心に置いた双極子モーメント p のつくる電位 (3.32) と比べると

$$p=4\pi\epsilon_0E_0a^3=\frac{4\pi}{3}a^3P \tag{4.10}$$

と対応させればよいから，誘導電荷のつくる導体球の外の電場 $\mathbf{E}'$ は

$$\mathbf{E}'=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3\mathbf{p}\cdot\mathbf{xx}}{r^5}-\frac{\mathbf{p}}{r^3}\right)=\frac{Pa^3}{3\epsilon_0}\left(\frac{3\mathbf{n}\cdot\mathbf{xx}}{r^5}-\frac{\mathbf{n}}{r^3}\right)\tag{4.11}$$

になる．$\mathbf{n}$ は電場 $\mathbf{E}_0$ 方向の単位ベクトルである．一方，導体球内部では，電場 $\mathbf{E}_0$ と誘導電場 $\mathbf{E}'$ が打ち消しあって $\mathbf{E}=\mathbf{E}_0+\mathbf{E}'=0$ になるから

$$\mathbf{E}'=-\mathbf{E}_0=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0a^3}\mathbf{p}=-\frac{P}{3\epsilon_0}\mathbf{n}\tag{4.12}$$

である．

4.4 風車小屋での発見：グリーン関数

静電場の基本方程式は重ね合わせの原理が成り立つ．そこで，ある境界条件のもとでポアソン方程式を解くには，同じ境界条件のもとで点電荷の問題を解き，それを重ね合わせればよい．ある境界条件のもとでの点電荷に対するポアソン方程式の解をグリーン関数と言う．この方法は，ポアソン方程式に限らず，重ね合わせの原理が成り立つ場合にいつでも適用できる．グリーンは初等教育を2年受けただけだが，その優れた研究は家業のパン屋と風車小屋で働きながら独学で行ったものだった．ノティンガム郊外の丘の上にはグリーンがその5階でポアソン方程式の解法を見つけた風車小屋が現存する．

図 4.5 グリーンの風車小屋

位置 $\mathbf{x}'$ にある点電荷 q がつくる電位に対するポアソン方程式は

$$\nabla^2\phi(\mathbf{x})=-\frac{q}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

だが，定数因子 q/ϵ_0 を除いた

$$\nabla^2G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=-\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{4.13}$$

の解 $G(\mathbf{x},\mathbf{x}')$ がポアソン方程式に対するグリーン関数である．無限遠で解が0になる境界条件のもとでは，グリーン関数は q/ϵ_0 を除いて点電荷のクーロンポテンシャルにほかならない．(3.26) から

$$\boxed{G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}} \tag{4.14}$$

である．これをグリーン関数の基本解と言う．並進対称性がある場合はグリーン関数は $\mathbf{x}-\mathbf{x}'$ の関数である．

任意のスカラー関数 φ と ψ からつくったベクトル関数 $\varphi\nabla\psi$ に対し，発散

Green's first identity

定理を適用すると

$$\boxed{\oint \mathrm{d}S\mathbf{n}\cdot\varphi\boldsymbol{\nabla}\psi = \int \mathrm{d}V\boldsymbol{\nabla}\cdot(\varphi\boldsymbol{\nabla}\psi) = \int \mathrm{d}V(\varphi\nabla^2\psi + \boldsymbol{\nabla}\varphi\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi)} \tag{4.15}$$

になる．この式で φ と ψ を入れかえたものとの差を取ると，グリーンの定理

$$\boxed{\oint \mathrm{d}S\mathbf{n}\cdot(\varphi\boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\varphi) = \int \mathrm{d}V(\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi)} \tag{4.16}$$

Green's second identity

が得られる．$\varphi = \phi$，$\psi = G$ を当てはめ，(4.13) とポアソン方程式を用いると，

$$\oint \mathrm{d}S\mathbf{n}\cdot(\phi\boldsymbol{\nabla}G - G\boldsymbol{\nabla}\phi) = -\phi + \frac{1}{\epsilon_0}\int \mathrm{d}VG\varrho$$

になるから，ポアソン方程式の解はグリーンの公式

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) = {} & \frac{1}{\epsilon_0}\int \mathrm{d}V'G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\varrho(\mathbf{x}') \\ & + \oint \mathrm{d}S'\left\{G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\frac{\partial\phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \phi(\mathbf{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\right\}\end{aligned} \tag{4.17}$$

で与えられる．ここで $\mathbf{n}'\cdot\boldsymbol{\nabla}' = \partial/\partial n'$ と置いた．表面積分は $\sigma = \epsilon_0\partial\phi/\partial n'$ の電荷面密度，$\tau = -\epsilon_0\phi$ の双極子面密度がつくる電位と解釈できる（境界面上で $\partial\phi/\partial n'$ と ϕ を勝手に与えることによって電位が計算されるわけではない．次節参照）．領域を無限に大きく取れば，面積分項は 0 になり

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0}\int \mathrm{d}V'G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\varrho(\mathbf{x}') \tag{4.18}$$

が得られる．(3.4) にほかならない．

ポアソン方程式の解の一意性は，ラプラース方程式の解で有界なものは定数しかないというリウヴィルの定理 (J. Liouville, 1809-82) によって示せる．領域の内部でラプラース方程式 $\nabla^2\phi = 0$ を満たし，境界面で $\phi = 0$ を満たす問題はグリーンが最初に考えたが，系統的に研究したディリクレー (G. Lejeune-Dirichlet, 1805-59) にちなんでディリクレー問題と言う．また，境界面で $\partial\phi/\partial n = 0$ を満たす問題を考えたのはキルヒホフ (G. Kirchhoff, 1824-87) が最初だが (1845)，これも C. ノイマン (1877) にちなんでノイマン問題と言う．(4.15) で $\varphi = \psi = \phi$ と置けば

$$\oint \mathrm{d}S\phi\frac{\partial\phi}{\partial n} = \int \mathrm{d}V(\phi\nabla^2\phi + \boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi) = \int \mathrm{d}V(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 \tag{4.19}$$

になる．境界面で $\phi = 0$，$\partial\phi/\partial n = 0$ のいずれが与えられても $\int \mathrm{d}V(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 = 0$，すなわち，$\boldsymbol{\nabla}\phi = 0$ が得られる．これから ϕ は定数でなければならない．これがリウヴィルの定理である．そこで，電位 ϕ_1 と ϕ_2 がポアソン方程式の解であったとしよう．このときその差 $\phi = \phi_1 - \phi_2$ はラプラース方程式を満たすから，リウヴィルの定理によって ϕ は定数である．ディリクレーの境界条件の場合は境界で $\phi = 0$ であるから領域のいたるところで $\phi = 0$，すなわち $\phi_1 = \phi_2$ になる．ノイマンの境界条件の場合は定数項を除いて ϕ_1 と ϕ_2 は一致する．

リウヴィルの定理によって，(4.18) は無限遠で 0 という境界条件のもとでポアソン方程式の唯一の解である．(4.18) にラプラース方程式の任意の解（調和関数と言う）をつけ加えてもやはりポアソン方程式の解が得られる．例えば一様な電場 $\mathbf{E}_0$ の電位 $-\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{x}$ はラプラース方程式の解だが，無限遠で 0 の境界条件を満たさない．このような項は ϱ 以外の電荷がつくっている外場である．ラプラース方程式の解で有界なものは定数しかない．与えられた ϱ がつくる電位は (4.18) によって一意的に与えられる．

図 4.6　ディリクレー

平面電荷の場合は，平面に垂直な z 方向の依存性だけであるから 1 次元の問題になる．平面電荷の電位 (3.23) から 1 次元のグリーン関数の基本解は

$$G(z,z') = -\frac{1}{2}|z - z'| \tag{4.20}$$

である．また，円柱対称電荷分布の場合，対称軸を z 軸に選べば，電荷密度，電位は x，y のみの関数であるからポアソン方程式は 2 次元の方程式になる．線電荷の電位 (3.14) から 2 次元のグリーン関数の基本解は

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \tag{4.21}$$

である．n 次元のグリーン関数の基本解は A.6節に与えた．

とすればよい．ガウス型の表示を使えば

$$\delta(\mathbf{x}) = \lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha}\right)^3 \mathrm{e}^{-r^2/\alpha^2}$$

のように表すことができる．(A.10) の表示を使えば，有限の α に対し，1 辺の長さが α，体積 $V=\alpha^3$ の立方体の中で，値が $\frac{1}{V}$，その外で 0 の関数だが，積分すれば 1 になっている．また，半径 α の球を考え，球の体積を $\frac{4\pi}{3}\alpha^3$ として関数 (2.32) の極限を取ればよいことはすでに見た通りである．

A.3　ヘルムホルツの定理

図 **A.3**　ヘルムホルツ

静電場も静磁場も，その基本方程式は発散密度と回転密度を与える形をしている．このように，場の発散密度と回転密度が与えられると，境界条件のもとに解は一意的に決まる．これをヘルムホルツの定理と言う．ヘルムホルツ (1858) は発散密度のない場合を考えたが，ここでは，発散密度と回転密度がある一般の場合を考えよう．直感的なイメージが得られるので，ヘルムホルツと同じく，流体を考えるが，6.3節でも述べたように，電場や磁場は流量を表していない．あくまでも，数学上の類似であることに注意しよう．

流体の運動は速度場 $\mathbf{v}$ によって記述される．速度場は基本方程式

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = \Theta, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

を満たすとする．湧き出し密度 Θ と渦度 $\mathbf{w}$ が与えられ，無限遠で流体が静止しているとき速度場を決める問題を考えよう．

この問題の解は，もし存在するとすればただ 1 つしかないことを証明できる．もし 2 つあれば，それらを $\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$ として，その差 $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$ は $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}=0$，$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}=0$ を満たす．すなわち，湧き出し密度がなく，渦度も

持たない流体の満たす方程式になる．渦度を持たないことから，速度は任意のスカラー関数 χ によって $\mathbf{v}=\boldsymbol{\nabla}\chi$ のように書ける．したがって，χ はラプラース方程式 $\nabla^2\chi=0$ を満たす．無限遠で流体が静止しているとき，そこでは $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}\chi=0$ であるから，(4.19) と同じように，リウヴィルの定理によって $\mathbf{v}=\boldsymbol{\nabla}\chi=0$ が得られる．これから，$\mathbf{v_1}=\mathbf{v_2}$ が得られる．

さて，解を $\mathbf{v}=\mathbf{v}^{\mathrm{L}}+\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ のように 2 成分に分離し，それぞれ

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}^{\mathrm{L}}=\Theta, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}^{\mathrm{L}}=0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}^{\mathrm{T}}=0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}^{\mathrm{T}}=\mathbf{w}$$

を満たすものとしよう．解の一意性から解を見つけさえすればよい．$\mathbf{v}^{\mathrm{L}}$ と $\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ をそれぞれベクトル場 $\mathbf{v}$ の縦成分と横成分と言う（$\boldsymbol{\nabla}$ に平行な成分，垂直な成分という意味である）．$\mathbf{v}^{\mathrm{L}}$ はポテンシャル（速度ポテンシャル）ϕ によって $\mathbf{v}^{\mathrm{L}}=-\boldsymbol{\nabla}\phi$ と書けるから，ϕ はポアソン方程式 $\nabla^2\phi=-\Theta$ を満たす．無限遠で 0 になるこの方程式の解は

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\,\frac{\Theta(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{A.13}$$

だった．一方，$\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ はベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ によって $\mathbf{v}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$ と書けるから，$\mathbf{A}$ はポアソン方程式 $\nabla^2\mathbf{A}=-\mathbf{w}$ を満たす．この解は同様に

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\,\frac{\mathbf{w}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

である．これらから

$$\mathbf{v}^{\mathrm{L}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\,\Theta(\mathbf{x}')\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}$$
$$\mathbf{v}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\,\mathbf{w}(\mathbf{x}')\times\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}$$

が得られる．こうして，湧き出し密度と渦度が与えられ，無限遠で 0 になる速度場の解が得られた．縦成分と横成分は関数として直交している．すなわち，

$$\int \mathrm{d}V\,\mathbf{v}^{\mathrm{L}}\cdot\mathbf{v}^{\mathrm{T}} = -\int \mathrm{d}V\,\boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\mathbf{v}^{\mathrm{T}} = \int \mathrm{d}V\,\phi\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}^{\mathrm{T}} - \int \mathrm{d}V\,\boldsymbol{\nabla}\cdot(\phi\mathbf{v}^{\mathrm{T}}) \tag{A.14}$$

だが，右辺第 1 項は $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}^{\mathrm{T}}=0$ によって 0 である．第 2 項は，大きな領域で体積積分すると，発散定理によって表面積分になるから 0 である．

こうしてみると，湧き出し密度だけが与えられただけでは速度場を決めることができないし，渦度が与えられただけでも速度場を決めることができない．電磁場の問題に戻ると，電荷密度が与えられただけでは静電場は決まらなかった．$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}=0$ によって回転密度のある解を排除している．同様に，電流密度が与えられただけでは磁場は決まらなかった．$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0$ によって発散密度のある解を排除している．アンペールの法則だけではなく，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0$ があって初めてビオー - サヴァールの法則が導かれる．

ところで，ϕ はポアソン方程式 $\nabla^2\phi=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}$ の解だから形式的に

$$\phi=-\nabla^{-2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}$$

と書き表しておくと便利である．∇^{-2} は，任意の関数を f とすると，

$$\nabla^{-2}f(\mathbf{x})=-\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\frac{f(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

によって定義した積分演算子である．ϕ を次のように書いてみよう．

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x})&=\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\frac{\boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\\&=\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\left\{\boldsymbol{\nabla}'\cdot\frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}-\mathbf{v}(\mathbf{x}')\cdot\boldsymbol{\nabla}'\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right\}\\&=-\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\mathbf{v}(\mathbf{x}')\cdot\boldsymbol{\nabla}'\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\\&=\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\cdot\int \mathrm{d}V'\frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\end{aligned}$$

2 行目から 3 行目を得るためには，発散定理によって，十分大きな積分領域の表面積分にして落とせばよい．また最後の行を得るためには，$\boldsymbol{\nabla}'$ を $-\boldsymbol{\nabla}$ にして積分の外に出した．これによって

$$\phi=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\nabla^{-2}\mathbf{v}$$

と書いてもよい．すなわちラプラース演算子の逆演算子 ∇^{-2} は微分演算子と演算の順番を入れかえてもよい．このような記法を用いると

$$\mathbf{v}^{\mathrm{L}}=-\boldsymbol{\nabla}\phi=\nabla^{-2}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}$$

と書ける．この結果を使うと

$$\mathbf{v}^{\mathrm{T}}=\mathbf{v}-\mathbf{v}^{\mathrm{L}}=\mathbf{v}-\nabla^{-2}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}=-\nabla^{-2}\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}) \tag{A.15}$$

である．ここで，テンソル演算子

$$\mathsf{P}^{\mathrm{L}}=\nabla^{-2}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla},\qquad \mathsf{P}^{\mathrm{T}}=1-\mathsf{P}^{\mathrm{L}}=1-\nabla^{-2}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}$$

を定義すると，ヘルムホルツの定理は極めて見通しよく，

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}^{\mathrm{L}}+\mathbf{v}^{\mathrm{T}},\qquad \mathbf{v}^{\mathrm{L}}=\mathsf{P}^{\mathrm{L}}\cdot\mathbf{v},\qquad \mathbf{v}^{\mathrm{T}}=\mathsf{P}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{v} \tag{A.16}$$

のように導くことができる．具体的に書けば

$$\mathbf{v}(\mathbf{x})=-\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\frac{\boldsymbol{\nabla}'\boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x}')-\boldsymbol{\nabla}'\times\{\boldsymbol{\nabla}'\times\mathbf{v}(\mathbf{x}')\}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

である．右辺を

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\frac{\nabla'^2\mathbf{v}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}&=-\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\left(\nabla'^2\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)\mathbf{v}(\mathbf{x}')\\&=\int \mathrm{d}V'\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\mathbf{v}(\mathbf{x}')=\mathbf{v}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

のように書き直せばその意味は明らかであろう．1 行目で，グリーンの定理 (4.16) を使い，無限遠での表面積分項を落とした．

P^{L}，P^{T} は任意のベクトル場からその縦横成分を取り出す働きをするので，射影演算子の一種である．実際これらは射影演算子の満たすべき性質

$$\mathsf{P}^{\mathrm{L}}+\mathsf{P}^{\mathrm{T}}=1,\qquad \mathsf{P}^{\mathrm{L}}\mathsf{P}^{\mathrm{L}}=\mathsf{P}^{\mathrm{L}},\qquad \mathsf{P}^{\mathrm{T}}\mathsf{P}^{\mathrm{T}}=\mathsf{P}^{\mathrm{T}},\qquad \mathsf{P}^{\mathrm{L}}\mathsf{P}^{\mathrm{T}}=0$$

を持っている．$\mathbf{v}^{\mathrm{L}}$，$\mathbf{v}^{\mathrm{L}}$ の i 成分は

$$v_i^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})=\int \mathrm{d}V'\delta_{ij}^{\mathrm{L}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')v_j(\mathbf{x}'),\qquad v_i^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})=\int \mathrm{d}V'\delta_{ij}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')v_j(\mathbf{x}') \tag{A.17}$$

である．ここでデルタ関数の縦成分 $\delta_{ij}^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})=P_{ij}^{\mathrm{L}}\delta(\mathbf{x})$，

$$\delta_{ij}^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})=-\frac{1}{4\pi}\partial_i\partial_j\frac{1}{r}=\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta(\mathbf{x})-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{3x_ix_j}{r^5}-\frac{\delta_{ij}}{r^3}\right) \tag{A.18}$$

を定義した．右辺で (3.33) を使って微分を実行した．同様に，横成分は

$$\delta_{ij}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})=\delta_{ij}\delta(\mathbf{x})-\delta_{ij}^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})=\frac{2}{3}\delta_{ij}\delta(\mathbf{x})+\frac{1}{4\pi}\left(\frac{3x_ix_j}{r^5}-\frac{\delta_{ij}}{r^3}\right) \tag{A.19}$$

である．$\delta_{ij}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})=P_{ij}^{\mathrm{T}}\delta(\mathbf{x})$ になっている．