平成 25 年度冬学期（4 学期）統合自然科学科　電磁気学（鳥井）期末試験問題

平成 26 年 2 月 6 日　3 限（13:00〜14:30、90 分）

第１問

マクスウェル方程式は次の 4 式からなる（ε_0 は真空の誘電率、μ_0 は真空の透磁率）:

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

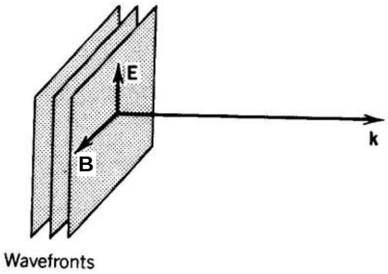
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right)$$

これらを用いて、電磁波の伝播に関する以下の問いに答えよ。

１．誘電体や磁性体を扱うときは、電束密度 $\boldsymbol{D}$ と磁場 $\boldsymbol{H}$ を用いると便利なことが多い。$\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{H}$ は分極ベクトル $\boldsymbol{P}$ および磁化ベクトル $\boldsymbol{M}$ を用いてどのように定義されるか答え、マクスウェル方程式を $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{H}$ を用いて（$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ を用いないで）表わせ。その際、電荷密度や電流密度が具体的に何に対して定義されているか明確にせよ。

２．マクスウェル方程式より、電場に関する真空中の波動方程式 $\nabla^2 \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \partial^2 \boldsymbol{E} / \partial t^2$ が導かれる。真空中の波動方程式の解として、波数ベクトル $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$、角周波数 ω の平面電磁波 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}$、$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}$ を考える。角周波数 ω、波数 $k \equiv |\boldsymbol{k}|$ が満たすべき関係式（分散関係）を求め、この電磁波の位相速度 c を ε_0、μ_0 を用いて表せ。

３．真空中の平面電磁波の電場 $\boldsymbol{E}$、磁場 $\boldsymbol{B}$、および波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ は互いに直交し、また電場の振幅 $E_0 \equiv |\boldsymbol{E}_0|$ と磁場の振幅 $B_0 \equiv |\boldsymbol{B}_0|$ は $E_0 = cB_0$ を満たすことをマクスウェル方程式より示せ（ヒント：一般に $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}$ のとき $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{A}$、$\nabla \times \boldsymbol{A} = i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{A}$）。



４．平面電磁波のポインティングベクトル $\boldsymbol{S} \equiv \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} / \mu_0$ を求め、この電磁波の強度 I_0（進行方向に垂直な単位面積を単位時間に通過するエネルギー）を求めよ。

５．次に真空中ではなく、電気感受率が χ（つまり分極が $\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi \boldsymbol{E}$ と表せる）の誘電体における電磁波の伝播を考える。分極が時間変化すると分極電流 $\boldsymbol{j}_{\mathrm{P}} = \partial \boldsymbol{P} / \partial t$ が誘電体に流れることを考慮し、誘電体における電場の波動方程式を導け。

６．電気感受率が χ の誘電体における誘電率 ε、電磁波の位相速度 c/n（n は屈折率、c は真空中の光速）を求めよ。ただし χ は正の実数とする。

７．誘電体の比誘電率は $k_\varepsilon = \varepsilon / \varepsilon_0$ と屈折率の関係を求めよ。その関係式がよく当てはまる気体と当てはまらない気体が存在するのはなぜか？以下の表を参照しながら議論せよ。

物　質	屈折率	物　質	屈折率
気体（0 ℃, 1 気圧換算）		水銀	1.000933
		水蒸気	0252
アルゴン	1.000284	水素	0138
硫黄	1111	窒素	0297
一酸化炭素	0334	二酸化炭素	0450
塩素	0768	ネオン	0067
カドミウム	2675	ヘリウム	0035
空　気	0292	ベンゼン	1762
クロロホルム	1455	**液　体**（20 °C）	
酸素	0272		
臭素	1125	アニリン	1.586

表１：種々の気体の屈折率

物質（1atm）	t/℃	$10^4 \times (k_\varepsilon - 1)$	物質（1atm）	t/℃	$10^4 \times (k_\varepsilon - 1)$
アルゴン	20	5.17	窒素	20	5.47
アンモニア（P）	1	71	二酸化炭素	20	9.22
エチルアルコール（P）	100	78	二酸化硫黄（P）	22	82
空気（乾）	20	5.36	二硫化炭素	29	29.0
酸素	20	4.94	ヘリウム	0	0.7
水素	0	2.72	ベンゼン	100	32.7
水蒸気（P）	100	60	メチルアルコール（P）	100	57

表２：種々の気体の比誘電率（(P) は有極性分子）

第２問

以下は数理科学 2014 年 2 月号の記事「ボース・アインシュタイン凝縮」からの抜粋である。空欄（ア）～（キ）に当てはまる適切な式を答えよ。必要に応じて、ローレンツ（逆）変換の式を用いよ。

ローレンツ変換		ローレンツ逆変換
$x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$	$v \to -v$	$x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$
$t' = \dfrac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$		$t = \dfrac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

「アインシュタインが 1905 年に提唱した光量子のエネルギーを表す式 $E = h\nu$ は、「振動数 ν の波は、エネルギー $h\nu$ を持つ粒子のように振舞う」と主張していますが、1923 年にその逆、つまり「エネルギー E を持つ粒子は、振動数が $\boxed{（ア）}$ の波のように振舞う」と考えた若者がいました。当時大学院生だったド・ブロイです。アインシュタインの特殊相対性理論によると、静止した質量 m_0 の粒子のエネルギー E は $\boxed{（イ）}$ です。従って、静止した粒子を波として考えた場合、その振動数は $\boxed{（ウ）}$ となるでしょう。この波の振動の様子を、粒子とともに静止している慣性系（その時空座標を (x,t) とする）から観測すると、図のように波の位相（濃淡で表している）が時間の経過とともに変化して見えます。さて、この振動の様子を、x 軸正の方向に速度 v で動いている（粒子が $-v$ で動いて見える）別の慣性系（その時空座標を (x',t') とする）で観測するとどうでしょう。特殊相対性理論によると、(x,t) と (x',t') はローレンツ変換で結びついており、x' 軸（$t'=0$ の線）は、x 軸（$t=0$ の線）に対して傾いています（時間は観測者の運動状態に依らず一様に流れる、という我々の日常感覚は正しくないのです）。したがって、図から明らかなように、粒子が動いて見える慣性系においては、時間的のみならず空間的にも位相が変化して見えます。その波長 λ はローレンツ（逆）変換を用いると、$\boxed{（エ）}$ で与えられることがわかります。ここで p は粒子が動いて見える慣性系から見た粒子の運動量です。これが粒子の波動性を表す有名なド・ブロイの関係式で、λ は**ド・ブロイ波長**と呼ばれます。(エ) は、波数 $k = 2\pi/\lambda$ を用いれば $\boxed{（オ）}$（$\hbar \equiv h/2\pi$）と表現できます。一方、粒子が動いて見える慣性系における波の角周波数 ω は、粒子の相対論的エネルギー $\boxed{（カ）}$ を $\hbar$ で割ったもので与えられます。ここで波の群速度（波束の速度）$d\omega/dk$ を計算してみると、$\boxed{（キ）}$ に一致します。このことから、ド・ブロイは「粒子は波動性を持つ」と提唱したのです。

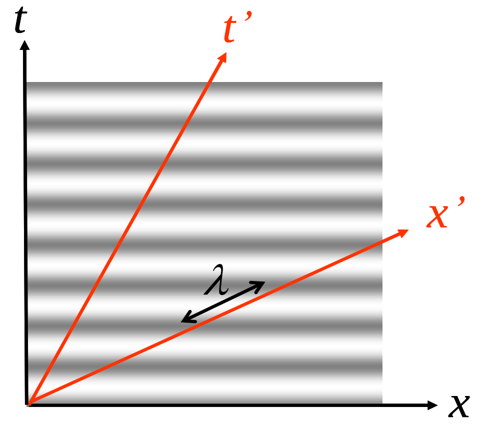


図　波の位相のローレンツ変換。ある慣性系における時間的変化は別の慣性系では空間的変化として観測される。

第３問

マクスウェル方程式は、ローレンスゲージ$\nabla_\mu A_\mu = 0$を用いると、$\square^2 A_\mu = \mu_0 j_\mu$

と表わせる。ただし、$j_\mu = (c\rho, \boldsymbol{j})$は４元電流密度、$A_\mu = (\phi / c, \boldsymbol{A})$は４元ポテンシャル、

$\square^2 = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$はダランベルシャンである。

１．（１）式および（２）式を用いて、電荷保存則を導け。

２．（１）式および（２）式を用いて、マクスウェル方程式をすべて導出せよ。