平成 24 年度冬学期（4 学期）統合自然科学科　電磁気学（鳥井）期末試験問題

平成 25 年 2 月 12 日　2 限（10:40～12:10、90 分）

第 1 問

マクスウェル方程式は次の 4 式からなる（ε_0 は真空の誘電率、μ_0 は真空の透磁率）：

$$\varepsilon_0 \nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho \qquad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \qquad \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\left(\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)$$

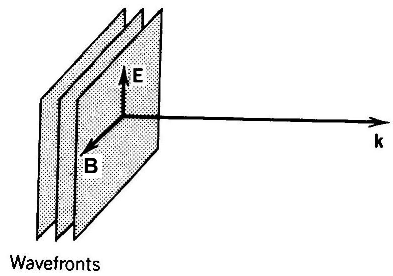
これらを用いて、電磁波の伝播に関する以下の問いに答えよ。

1．誘電体や磁性体を扱うときは、電束密度 $\boldsymbol{D}$ と磁場 $\boldsymbol{H}$ を用いると便利なことが多い。$\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{H}$ は分極ベクトル $\boldsymbol{P}$ または磁化ベクトル $\boldsymbol{M}$ よりどのように定義されるか答え、マクスウェル方程式を $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{H}$ を用いて（$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ を用いないで）表わせ。その際、電荷密度や電流密度が具体的に何に対して定義されているか明確にせよ。

2．マクスウェル方程式より、以下の電場に関する真空中の波動方程式を導け（恒等式 $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$ を用いよ。）

$$\nabla^2\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

3．真空中の波動方程式の解として、波数ベクトル $\boldsymbol{k}=(k_x,k_y,k_z)$、角周波数 ω の平面電磁波 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$、$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$ を考える。角周波数 ω、波数 $k\equiv|\boldsymbol{k}|$ が満たすべき関係式を求め、この電磁波の位相速度 c を ε_0、μ_0 を用いて表せ。



4．真空中の平面電磁波の電場 $\boldsymbol{E}$、磁場 $\boldsymbol{B}$、および波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ は互いに直交し、また電場の振幅 $E_0\equiv|\boldsymbol{E}_0|$ と磁場の振幅 $B_0\equiv|\boldsymbol{B}_0|$ は $E_0=cB_0$ を満たすことをマクスウェル方程式より示せ（ヒント：一般に $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$ のとき $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}$、$\nabla\times\boldsymbol{A}=i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}$）。

5．平面電磁波のポインティングベクトル $\boldsymbol{S}\equiv\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}/\mu_0$ を求め、この電磁波の強度 I_0（進行方向に垂直な単位面積を単位時間に通過するエネルギー）を求めよ。

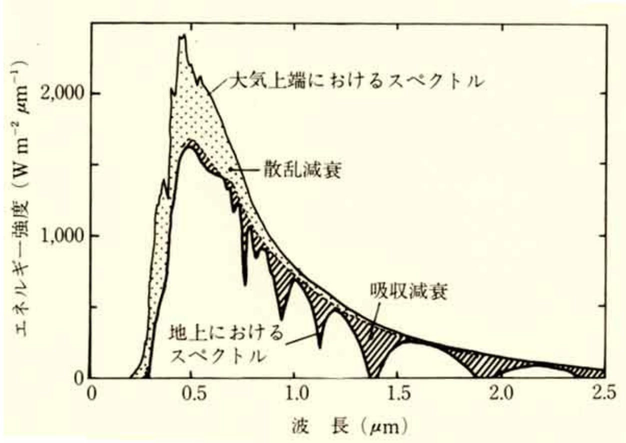
6．次に真空中ではなく、電気感受率が χ（つまり分極が $\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\chi\boldsymbol{E}$ と表せる）の誘電体における電磁波の伝播を考える。分極が時間変化すると分極電流 $\boldsymbol{j}_{\mathrm{P}}=\partial\boldsymbol{P}/\partial t$ が誘電体に流れることを考慮し、誘電体における電場の波動方程式を設問 2 と同様に導け。

7．電気感受率が χ の誘電体における誘電率 ε、電磁波の位相速度 c/n（n は屈折率、c は真空中の光速）を求めよ。ただし χ は正の実数とする。

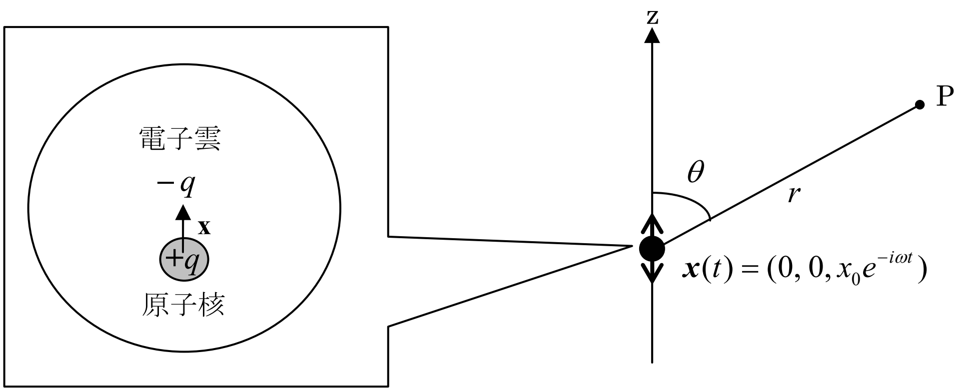
8．電場に対する分極は必ずしも同位相で振動する訳ではない。電場と分極の位相差を表現するために複素電気感受率 $\chi\equiv\chi'+i\chi''$（χ'、χ'' は実数）が導入される。誘電体における電磁波の伝播の様子を、複素電気感受率の虚部 χ'' が正の場合と負の場合についてそれぞれ定性的に述べよ。

第２問

晴れた日の空が青いのは、大気中の分子が太陽光のスペクトル（右図）のうち、波長の短い青い光をより多く散乱するためである。この現象を大気中の個々の分子を古典的な調和振動子とみなすローレンツモデルで説明したい。



下図のように，電荷q（$q>0$）を持つ原子核に電荷$-q$、質量mの電子雲が束縛されている原子を考える。原子核から見た電子雲の重心の座標を$\boldsymbol{x}$とする。電子雲には束縛力が働いており、その力はフックの法則$\boldsymbol{F}=-\alpha\boldsymbol{x}$（$\alpha$は定数）に従うものとする。



１．原子に電磁波が照射されていない場合に$\boldsymbol{x}$が満たすべき運動方程式を書き下し、この電子雲の固有振動数ω_0（角周波数）を求めよ。ただし、電子が自身に及ぼす自己力は無視してよい。以下、αはω_0とmで表すこと。

２．この原子に電磁波$\boldsymbol{E}(t)=(0,0,E_0\exp(-i\omega t))$を照射すると、電子雲はクーロン力を受けて振動する。定常状態における電子雲の重心の位置を$\boldsymbol{x}(t)=(0,0,x_0\exp(-i\omega t))$と表す。大気中の原子の固有振動数は紫外線の領域にあり（これは量子力学によって説明される）、可視光線の領域では$\omega<<\omega_0$と考えてよい。このときのx_0を求めよ。

３．振動する電荷は電磁波を放射する。原子からの距離r、振動方向からの角度θの位置Pにおける電磁場の磁場成分の振幅B_0を、次のように近似した遅延ポテンシャルより求めよ。

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\cong\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t-r/c)}{r}dV'=-\frac{\mu_0}{4\pi r}q\dot{\boldsymbol{x}}(t-r/c),\ \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

４．第１問の設問４および５の解答（電磁場のポインティングベクトル）を利用して、この振動する電子雲が放出するパワー（単位時間あたりのエネルギー）Pを求めよ。

５．電磁波に対する原子の散乱断面積σは、入射する電磁場の強度をI、放射する電磁波のパワーをPとすると、$\sigma=P/I$で与えられる。$\omega<<\omega_0$の極限におけるσ（レイリー散乱断面積）を求め、その結果より空が青い理由を述べよ。

第３問

マクスウェル方程式は、ローレンスゲージ

$$\nabla_\mu A_\mu = 0 \quad （1）$$

を用いると、

$$\Box^2 A_\mu = \mu_0 j_\mu \quad （2）$$

と表わせる。ただし、$\nabla_\mu = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla)$ は４元ベクトル演算子、$j_\mu = (c\rho, \boldsymbol{j})$ は４元電流密度、$A_\mu = (\phi / c, \boldsymbol{A})$ は４元ポテンシャル、$\Box^2 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ はダランベルシャンである。

１．（１）式および（２）式を用いて、電荷保存則を導け。

２．（１）式および（２）式を用いて、マクスウェル方程式をすべて導出せよ。