

第 1 問

マクスウェル方程式は次の 4 式からなる (ϵ_0 は真空の誘電率、 μ_0 は真空の透磁率) :

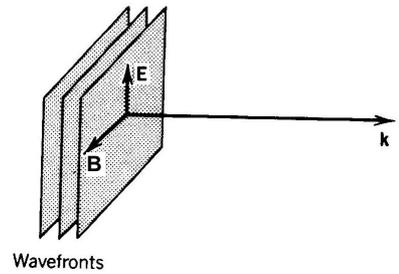
$$\begin{aligned} \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

これらを用いて、電磁波の伝播に関する以下の問いに答えよ。

1. マクスウェル方程式より、以下の電場に関する真空中の波動方程式を導け (恒等式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ を用いよ。)

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

2. 真空中の波動方程式の解として、波数ベクトル $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ 、角周波数 ω の平面電磁波 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ 、 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ を考える。角周波数 ω 、波数 $k \equiv |\mathbf{k}|$ が満たすべき関係式を求め、この電磁波の位相速度 c を ϵ_0 、 μ_0 を用いて表せ。



3. 真空中の平面電磁波の電場 \mathbf{E} 、磁場 \mathbf{B} 、および波数ベクトル \mathbf{k} は互いに直交し、また電場の振幅 $E_0 \equiv |\mathbf{E}_0|$ と磁場の振幅 $B_0 \equiv |\mathbf{B}_0|$ は $E_0 = cB_0$ を満たすことをマクスウェル方程式より示せ (ヒント: 一般に $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ のとき $\nabla \cdot \mathbf{A} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}$ 、 $\nabla \times \mathbf{A} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}$)。
4. 平面電磁波のポインティングベクトル $\mathbf{S} \equiv \mathbf{E} \times \mathbf{B} / \mu_0$ を求め、この電磁波の強度 I (進行方向に垂直な単位面積を単位時間あたりに通過するエネルギー) を求めよ。
5. 次に真空中ではなく、電気感受率が χ (つまり分極が $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$ と表せる) の誘電体における電磁波の伝播を考える。分極が時間変化すると、分極電流 $\mathbf{j}_p = \partial \mathbf{P} / \partial t$ が誘電体に流れることを考慮し、誘電体における電場の波動方程式を設問 1 と同様に導け。
6. 電気感受率が χ の誘電体における比誘電率 $k_\epsilon = \epsilon / \epsilon_0$ と屈折率 n の関係式を求めよ。ただし χ は正の実数とする。
7. 設問 6 の関係式は、現実の気体に当てはまるだろうか? 以下の表より考察せよ。

物質	屈折率	物質	屈折率
気体 (0°C, 1気圧換算)		水銀	1.000933
アルゴン	1.000284	水蒸気	0252
硫黄	1111	水素	0138
一酸化炭素	0334	窒素	0297
塩素	0768	二酸化炭素	0450
カドミウム	2675	ネオン	0067
空気	0292	ヘリウム	0035
クロロホルム	1455	ベンゼン	1762
酸素	0272	液体 (20°C)	
臭素	1125	アニリン	1.586

表 1 : 種々の気体の屈折率

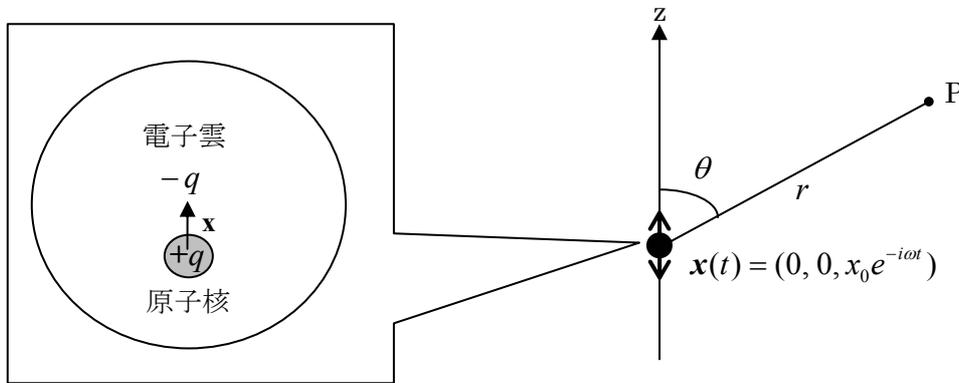
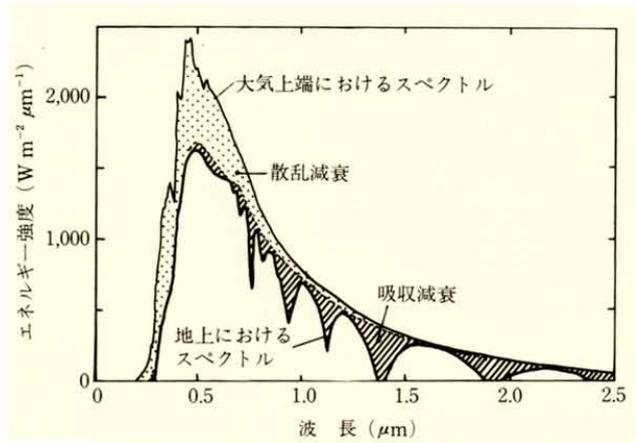
物質 (1atm)	t/°C	10 ⁴ × (k _ε - 1)	物質 (1atm)	t/°C	10 ⁴ × (k _ε - 1)
アルゴン	20	5.17	窒素	20	5.47
アンモニア (P)	1	71	二酸化炭素	20	9.22
エチルアルコール (P)	100	78	二酸化硫黄 (P)	22	82
空気 (乾)	20	5.36	二硫化炭素	29	29.0
酸素	20	4.94	ヘリウム	0	0.7
水素	0	2.72	ベンゼン	100	32.7
水蒸気 (P)	100	60	メチルアルコール (P)	100	57

表 2 : 種々の気体の比誘電率 ((P) は有極性分子)

第2問

晴れた日の空が青いのは、大気中の分子が太陽光のスペクトル（右図）のうち、波長の短い青い光をより多く散乱するためである。この現象を大気中の個々の分子を古典的な調和振動子とみなすローレンツモデルで説明したい。

下図のように、電荷 q ($q > 0$) を持つ原子核に電荷 $-q$ 、質量 m の電子雲が束縛されている原子を考える。原子核から見た電子雲の重心の座標を \mathbf{x} とする。電子雲には束縛力が働いており、その力はフックの法則 $\mathbf{F} = -\alpha\mathbf{x}$ (α は定数) に従うものとする。



1. 原子に電磁波が照射されていない場合に \mathbf{x} が満たすべき運動方程式を書き下し、この電子雲の固有振動数 ω_0 (角周波数) を求めよ。ただし、電子が自身に及ぼす自己力は無視してよい。以下、 α は ω_0 と m で表すこと。
2. この原子に電磁波 $\mathbf{E}(t) = (0, 0, E_0 \exp(-i\omega t))$ を照射すると、電子雲はクーロン力を受けて振動する。定常状態における電子雲の重心の位置を $\mathbf{x}(t) = (0, 0, x_0 \exp(-i\omega t))$ と表す。大気中の原子の固有振動数は紫外線の領域にあり (これは量子力学によって説明される)、可視光線の領域では $\omega \ll \omega_0$ と考えてよい。このときの x_0 を求めよ。
3. 振動する電荷は電磁波を放射する。原子からの距離 r 、振動方向からの角度 θ の位置 P における電磁場の磁場成分の振幅 B_0 を、以下のように近似した遅延ポテンシャルより求めよ。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cong \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t-r/c)}{r} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi r} q \dot{\mathbf{x}}(t-r/c), \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

4. 第1問の設問3および4の解答 (電磁場のポインティングベクトル) を利用して、この振動する電子雲が放出するパワー (単位時間あたりのエネルギー) P を求めよ。
5. 電磁波に対する原子の散乱断面積 σ は、入射する電磁場の強度を I 、放射する電磁波のパワーを P とすると、 $\sigma = P/I$ で与えられる。 $\omega \ll \omega_0$ の極限における σ (レイリー散乱断面積) を求め、その結果より空が青い理由を述べよ。