平成 22 年度冬学期（4 学期）基礎科学科　電磁気学 I （鳥井）　期末試験問題

平成 23 年 2 月 10 日　4 限（14:40〜16:10、90 分）

第 1 問

マクスウェル方程式は次の 4 式からなる（ε_0 は真空の誘電率、μ_0 は真空の透磁率）:

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

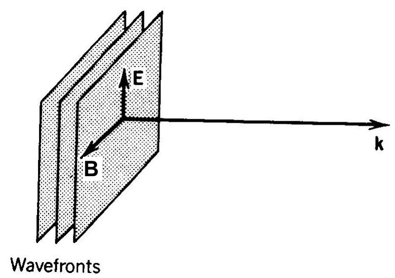
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right)$$

これらを用いて、電磁波の伝播に関する以下の問いに答えよ。

1．マクスウェル方程式より、以下の電場に関する真空中の波動方程式を導け（恒等式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ を用いよ。）

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

2．真空中の波動方程式の解として、波数ベクトル $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$ 、角周波数 ω の平面電磁波 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)}$ 、$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 e^{i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)}$ を考える。角周波数 ω 、波数 $k \equiv |\boldsymbol{k}|$ が満たすべき関係式を求め、この電磁波の位相速度 c を ε_0 、 μ_0 を用いて表せ。



3．真空中の平面電磁波の電場 $\boldsymbol{E}$ 、磁場 $\boldsymbol{B}$ 、および波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ は互いに直交し、また電場の振幅 $E_0 \equiv |\boldsymbol{E}_0|$ と磁場の振幅 $B_0 \equiv |\boldsymbol{B}_0|$ は $E_0 = cB_0$ を満たすことをマクスウェル方程式より示せ（ヒント：一般に $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 e^{i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)}$ のとき $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{A}$ 、$\nabla \times \boldsymbol{A} = i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{A}$ ）。

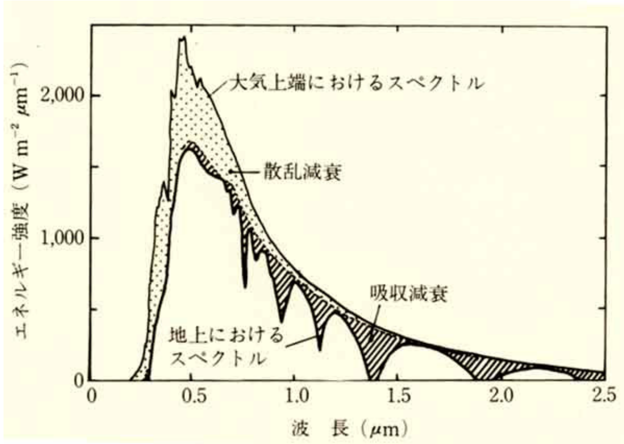
4．平面電磁波のポインティングベクトル $\boldsymbol{S} \equiv \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} / \mu_0$ を求め、この電磁波の強度 I_0（進行方向に垂直な単位面積を単位時間に通過するエネルギー）を求めよ。

5．次に真空中ではなく、電気感受率が χ（つまり分極が $\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi \boldsymbol{E}$ と表せる）の誘電体における電磁波の伝播を考える。分極が時間変化すると分極電流 $\boldsymbol{j}_{\mathrm{P}} = \partial \boldsymbol{P} / \partial t$ が誘電体に流れることを考慮し、誘電体における電場の波動方程式を問 1 と同様に導け。

6．電気感受率が χ の誘電体における誘電率 ε 、電磁波の位相速度 c/n （n は屈折率）を求めよ。ただし χ は正の実数とする。

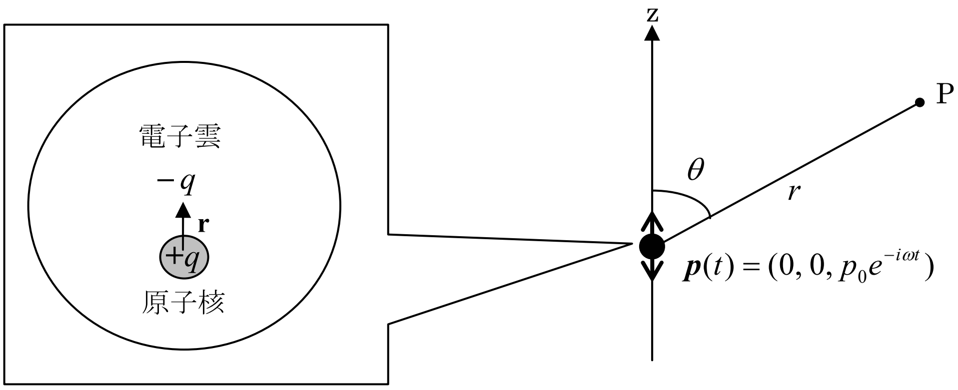
7．電場に対する分極は必ずしも同位相で振動する訳ではない。電場と分極の位相差を表現するために複素電気感受率 $\chi \equiv \chi' + i\chi''$（$\chi'$ 、χ'' は実数）が導入される。誘電体における電磁波の伝播の様子を、複素電気感受率の虚部 χ'' が正の場合と負の場合についてそれぞれ定性的に述べよ。

第２問



晴れた日の空が青いのは、大気中の分子が太陽光のスペクトル（右図）のうち、波長の短い青い光をより多く散乱するためである。この現象を大気中の個々の分子を古典的な調和振動子とみなすローレンツモデルで説明したい。

下図のように，電荷q（$q>0$）を持つ原子核に電荷$-q$、質量mの電子雲が束縛されている分子を考える。原子核から見た電子雲の重心の座標を$\mathbf{r}$とする。電子雲には束縛力が働いており、その力はフックの法則$\mathbf{F}=-\kappa\mathbf{r}$（$\kappa$は定数）に従うものとする。



１．分子に電磁波が照射されていない場合に$\mathbf{r}$が満たすべき運動方程式を求めよ。この電子雲の固有振動数ω_0（角周波数）を求めよ。以下、κはω_0とmで表すこと。

２．この分子に電磁波$\boldsymbol{E}(t)=(0,0,E_0e^{-i\omega t})$を照射した際に分子に誘起される電気双極子モーメントを$\boldsymbol{p}(t)=(0,0,p_0e^{-i\omega t})$と表す。大気中の分子の固有振動数は紫外線の領域にあり（これは量子力学によって説明される）、可視光線の領域では$\omega \ll \omega_0$と考えてよい。このときのp_0を求めよ。

３．振動する電気双極子は電磁波を放射する。分子からの距離r、振動方向からの角度θの位置Ｐにおける電磁場の磁場成分の振幅B_0を、以下のように近似した遅延ポテンシャルより求めよ。

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\cong\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t-r/c)}{r}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\boldsymbol{p}}(t-r/c)}{r},\ \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

４．第１問の設問３と４の解答（電磁場のポインティングベクトル）を利用して、この振動する電気双極子が放出する単位時間あたりのエネルギーを求め、その結果を元に空が青い理由を説明せよ。

第３問

１．ある慣性系（S 系）における時空座標(x,t)と、S 系に対して x 軸方向に速度vで平行移動している慣性系（S’系）における時空座標(x',t')との間には、以下のローレンツ変換およびローレンツ逆変換が成り立つ。

ローレンツ変換		ローレンツ逆変換
$x'=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$	$\xLeftrightarrow{v\to -v}$	$x=\dfrac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$
$t'=\dfrac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$		$t=\dfrac{t'+vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

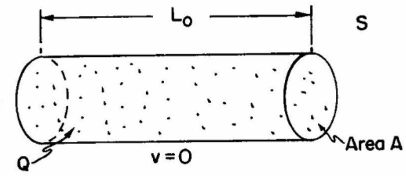
（１）　S’系で静止している長さL_0の棒を S 系で観測したときの長さLを求めよ。

（２）　S 系で時間dtだけ待っている間に、S’系で静止している時計が進む時間$d\tau$（固有時間）を求めよ。

２．断面積Aの棒が静止しており、このときの電荷密度がρ_0、長さがL_0であったとする。

（１）　この棒がもつ電荷量Qを求めよ。

（２）　棒が持つ電荷量は棒の運動状態には依存しない（電荷保存の法則が成り立つ）と仮定して、この棒が速度vで動いているときの電荷密度ρを求めよ。



（３）　（２）の結果より、４元電流密度$j_\mu=(c\rho,\boldsymbol{j})$が４元ベクトルであることを示せ。

３．マクスウェル方程式は、ローレンスゲージ$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\phi}{\partial t}=0$を用いると、

$$\Box^2 A_\mu=\mu_0 j_\mu$$

と表わせることを示せ。ただし、$\Box^2=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2$はダランベルシャン、$j_\mu=(c\rho,\boldsymbol{j})$は４元電流密度、$A_\mu=(\phi/c,\boldsymbol{A})$は４元ポテンシャルである。