統合自然科学科　第４学期　電磁気学（担当：鳥井）　 レポート問題１４

出題：平成 27 年 1 月 26 日　締切：平成 27 年 2 月 6 日 1 限試験開始前

（今回は２ページあります）

１．マクスウェル方程式を４元ポテンシャル $A_\mu \equiv (\varphi / c, \boldsymbol{A})$、４元電流密度 $j_\mu \equiv (c\rho, \boldsymbol{j})$、およびダランベルシャン $\nabla_\mu \nabla_\mu = \partial^2 / \partial (ct)^2 - \nabla^2 \equiv \Box^2$ を用いて書き直すと、ローレンツ条件 $\nabla_\mu A_\mu = 0$ のもとでは

$$\Box^2 A_\mu = \mu_0 j_\mu \qquad (1)$$

というたった１つの方程式で表現される。この方程式の意味は、４元ベクトルの成分毎に

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \psi = s \qquad (2)$$

という形のダランベール方程式が成立しているということである。場 ψ の発生源となる s は、一般に位置と時間の関数である。ここでは特殊な場合として、場の発生源が原点に局在化し、その大きさが時間的に変化している状況を考える。つまり $s = s(t)\delta(\boldsymbol{r})$ とおく。

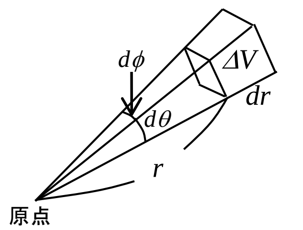
（１）対称性から ψ は原点からの距離 r のみの関数である。このとき、

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) \qquad (3)$$

が成り立つことを、以下の 2 つの方法のどちらか（もしくは両方）の方法で示せ。

①$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ より合成関数の微分（$\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi}{\partial r} \dfrac{\partial r}{\partial x}$ など）を使う。

②$\nabla^2 \psi \equiv \nabla \cdot (\nabla \psi)$ であるから、右図のような体積 ΔV における $\nabla \psi$（ψ の勾配、つまりベクトル場）の湧き出し $\int_{\Delta V} (\nabla \psi) \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算し、その $\Delta V \to 0$ の極限 $\lim_{\Delta V \to 0} \int_{\Delta V} (\nabla \psi) \cdot d\boldsymbol{S} \equiv \nabla \cdot (\nabla \psi) \equiv \nabla^2 \psi$ を求める。



（２）原点以外の空間では $s = 0$ であり、(2) 式のダランベール方程式は１次元波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f = 0 \quad \text{ただし} \quad f = r\psi \qquad (4)$$

に帰着することを（3）式を利用して示せ。

（３）$f = f(t - r/c)$（同じ形のまま r が正の向きに速さ c で進行する波）は（4）式の１次元波動方程式の解であることを代入して確認せよ。

（４）前問より、原点以外では $\psi = \dfrac{f(t - r/c)}{r}$ の形に書けることはわかったが、$f(t)$ の関数形はまだ不明である。ここで $r \to 0$ の極限を考えると、$\psi \approx f(t)/r$ と近似できるが、$f(t) = \dfrac{s(t)}{4\pi}$ とすれば ψ が（2）式の解（つまり原点でも正しい解）となることを示せ。

（５）前問より、$s = s(t)\delta(\boldsymbol{r})$ の場合は $\psi = \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{s(t - r/c)}{r}$ と書けることがわかった。重ね

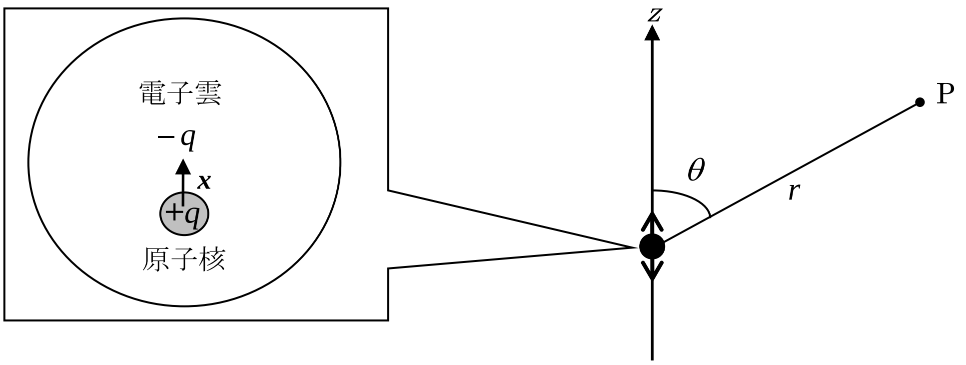
合わせの原理より、この結果を空間的に広がった任意の源$s=s(\boldsymbol{r},t)$の場合に拡張し、マクスウェル方程式の一般解

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV' \qquad (5)$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV' \qquad (6)$$

を求めよ。

２．下図のように，電荷q（$q>0$）を持つ原子核に電荷$-q$の電子雲が束縛されている原子を考える。原子核から見た電子雲の中心の位置$\boldsymbol{x}$はz軸方向に振幅x_0、角周波数ωで振動しているとする。この原子から放射される電磁波を式（6）より求めたい。



（１）この原子（振動する電気双極子）が放出する電磁波の波長λに比べて電子雲のサイズが十分小さいならば、電子雲の各部分から観測点Pに電磁波が到達するのにかかる時間（遅延時間$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c$）は一定と近似してよいだろう。また、電子雲のサイズに比べ観測点Pまでの距離が十分大きいならば、電子雲から観測点Pまでの距離は一定と近似してよいだろう。これらの近似のもとでは、観測点Pでのベクトルポテンシャルは

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\mu_0}{4\pi r}q\dot{\boldsymbol{x}}(t-r/c) \qquad (7)$$

と表わせることを示せ。ただしrは原子核から観測点Pまでの距離とする。

（２）複素表示を用いると、$\boldsymbol{x}(t)=x_0\boldsymbol{e}_z\exp(-i\omega t)$（$\boldsymbol{e}_z$は$z$軸方向の単位ベクトル）と表わせる。観測点Pまでの距離rが電磁波の波長λに比べて十分大きければ、(7)式のベクトルポテンシャルの$1/r$依存性は空間微分の際に無視することができる。このとき、観測点Pにおける磁場の複素表示が

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 x_0 q\omega^2}{4\pi cr}(\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_z)\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)] \qquad (8)$$

と表わせることを示せ。ただし$\boldsymbol{e}_r\equiv\boldsymbol{r}/r$は原点から観測点Pへの単位ベクトル、$\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{e}_r$（$k=\omega/c=2\pi/\lambda$）は波数ベクトルを表す。

（３）真空中の電場波における電場と磁場の振幅の関係式$E_0=cB_0$を利用して、観測点Pにおける電場の振幅が$E_0=\dfrac{qx_0\mu_0\omega^2}{4\pi r}\sin\theta$となることを示せ。この結果は、講義の２回目にファインマンの便利な解の表現で求めた双極子輻射の電場の振幅そのものである。