

1. バネ定数 k のバネにつながれている質量 m の電子に、 x 軸方向に偏光した電場 $E(t)$ によるクーロン力 $-eE(t)$ ($e > 0$) および速度に比例する減衰力 $2m\gamma dx/dt$ が働いている振動子を考える (ローレンツモデル)。この電子の平衡点からの変位 $x(t)$ が従う運動方程式は

$$m \frac{dx^2}{dt^2} = -kx - eE(t) - 2m\gamma \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \frac{dx^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m} E(t)$$

と表される。ここで $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ と定義した。この振動子が空間密度 N で分布している媒質を考える。この媒質の分極ベクトルの大きさは $P(t) = -Nex(t)$ で与えられる。この媒質の複素電気感受率 $\chi(\omega)$ が以下で与えられること示せ。

$$\chi(\omega) = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - 2i\gamma\omega - \omega^2}$$

2. 信じられないかも知れないが、「昼の空は青く、夕焼けは赤い」という観測事実からアボガドロ数を導出することができる。空気中の分子 (N_2 , O_2 など) の共鳴周波数 ω_0 は紫外域にあり、可視光は基本的にレイリー散乱されるものと仮定しよう。空気中の分子 (密度を N) の電気分極は、前問で考えたローレンツモデルに従い、空気の複素電気感受率は

$$\chi(\omega) = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} \approx \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \omega_0^2}$$

と近似できるものとする。これは光の振動数に依存しない実数なので、単に χ と表そう。

(1) 空気の屈折率 $n = \sqrt{1 + \chi} \approx 1 + \chi/2$ を N を用いて表わせ。

(2) 空気を通過する光の強度は、空気の吸収係数を α として、微分方程式

$$\frac{dI(z)}{dz} = -\alpha I$$

に従って減衰する。レイリー散乱の断面積 $\sigma_R = \frac{8\pi r_0^2}{3} \frac{\omega^4}{\omega_0^4}$ ($r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$ は古典

電子半径) を、空気の屈折率 n を用いて表すと、吸収係数 α は

$$\alpha = N\sigma_R = \frac{32\pi^3(n-1)^2}{3N\lambda^4}$$

と表されることを示せ。このように空気の吸収係数は屈折率の1からの“ずれ”の自乗に比例し、光の波長の4乗に反比例する。この依存性の物理的起源は何か?

(3) 空気の屈折率はおおよそ $n \approx 1.00027$ である (基礎物理学実験で測定したのを覚えているであろう)。大気層の厚さを 10km、地球の半径を 6400km とし、地平線にある太陽からの青色 (波長 500nm 程度) の光の半分が大気にレイリー散乱される (その結果として夕焼けが見える) と仮定して、大気の数密度 N およびアボガドロ数 N_A (22.4 リットル中に含まれる分子の数) を求め、現在知られている値と比較せよ。