

統合自然科学科 第4学期 電磁気学 (担当: 鳥井) レポート問題9

出題: 12月4日 締切: 12月11日授業開始前

1. 物質は電荷を持つ電子と原子核から構成されている。電荷は電場から力を受けるので、電場中で電荷が移動すると、電荷は仕事をされる (または仕事をする) ことになる。したがって、物質側の単位時間、単位体積あたりのエネルギー変化量は電流密度 \mathbf{j} を用いて $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ と表わせる。電磁場のエネルギー密度が、静電磁場のときと同様に

$$u_{\text{em}} \equiv \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2$$

と表わされると仮定して、以下の問に答えよ。

- (1) 物質側のエネルギー密度を u_{matter} と書き表すことにすると、

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} (u_{\text{em}} + u_{\text{matter}}) \cdots (\ast) \quad \text{ただし} \quad \mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

が成り立つことをマクスウェル方程式より示せ。

(ヒント: $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ 、 $\frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{A}|^2 = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = 2\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$)

- (2) \mathbf{S} はポインティング (Poynting) ベクトルと呼ばれる。(※) 式の積分形にエネルギー保存則を適用することにより、ある面素 $d\mathbf{A}$ を通過する単位時間当たりのエネルギーが $\mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$ と表わされることを示し、ポインティングベクトルがエネルギー流を表すことを説明せよ。ただし、 $d\mathbf{A}$ は面素 dA の面素ベクトルで、 $d\mathbf{A}$ の向きをエネルギー流の正の向きと定義する。

2. 下図のように、間隔 d の平行平板コンデンサーを電圧 V の電池につなぎ、電極間を半径 a のワイヤでつないだところ、定常電流 I が流れた。ワイヤ以外の抵抗は無視する。

- (1) ワイヤにおける消費電力 (単位時間に発生するジュール熱) を求めよ。
- (2) 電極は十分広く、電極間の電場は一様とする。電極間の電場の大きさ E を求めよ。
- (3) ワイヤは十分細長いと仮定し、ワイヤ表面における磁場の大きさを B を求めよ。
- (4) ワイヤ表面におけるポインティングベクトル \mathbf{S} の向きと大きさ求めよ。
- (5) このワイヤの表面から流入するエネルギー (ポインティングベクトルの表面積分) を求めよ。(1) の結果と一致したか?
- (6) 電池のエネルギーはどこを通過してワイヤに到達したとあなたは考えるか?

