統合自然科学科　第４学期　電磁気学（担当：鳥井）　　レポート問題６

出題：平成 26 年 11 月 13 日　締切：平成 26 年 11 月 20 日

１．x 軸正の方向に進行する波数 k 、角周波数 ω の電磁波の電場成分（例えば y 成分）は、$E(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t)$ と表わせるが、これを複素表示すると

$$E(x,t) = E_0 e^{i(kx-\omega t)} \quad ①$$

と表わせる。複素表示の場合、その実部が実際に観測される物理量に対応すると約束するが、そのことを忘れてもほとんどの場合問題ない（物理量の積を考える場合は例外である）。その根拠は、以下のように「実部を取る」という演算と微分演算が交換するからである。

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial x}E(x,t)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}\left[E(x,t)\right] \quad ②$$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial t}E(x,t)\right] = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\left[E(x,t)\right] \quad ③$$

（１）　①を②および③に代入し、確かに②、③が成り立っていることを確認せよ。

（２）　①の電場の複素表示を、（複素表示のまま）１次元波動方程式

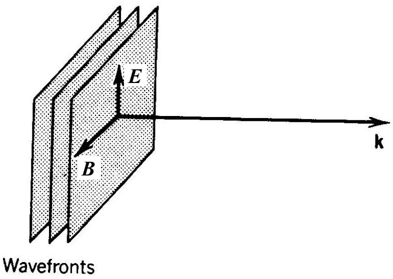
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}E(x,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E(x,t) \quad ④$$

に代入し、①が④の解となるための条件（k と ω と c の間の関係式）を求めよ。

２. 任意の方向に進行する平面電磁波の電場および磁場は、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \quad ⑤$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{B}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \quad ⑥$$



と表わせる。ここで $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$ は**波数ベクトル**といい、電磁波の進行方向を向いている。波数ベクトルの大きさ $k = |\boldsymbol{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ は電磁波の波数であり、波長 λ と $k = 2\pi/\lambda$ の関係がある。

（１）　$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ および $\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$（結果的に $\nabla \to i\boldsymbol{k}$ と置き換えればよいこと）を示せ。

（２）　真空中のマクスウェル方程式を用いて、$\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{E}$ 、$\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{B}_0$、$\boldsymbol{E}_0 \perp \boldsymbol{B}_0$ を示せ。

（３）　⑤が３次元波動方程式

$$\nabla^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \quad ⑦$$

の解となるための条件を求めよ。

（４）　電場の振幅 $E_0 = |\boldsymbol{E}_0|$ と磁場の振幅 $B_0 = |\boldsymbol{B}_0|$ は関係が $B_0 = E_0/c$ であることを示せ。