統合自然科学科　第４学期　電磁気学（担当：鳥井）　　レポート問題５

出題：11 月 6 日　締切：11 月 13 日授業開始前

1. $\boldsymbol{r} \neq 0$ のとき、$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$、$\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \nabla^2\left(-\frac{1}{r}\right) = 0$ となることを再度確認せよ。

2. $\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \nabla^2\left(-\frac{1}{r}\right) = 4\pi\delta(\boldsymbol{r})$ を証明せよ。

3. マクスウェル方程式において、時間微分を含む項を 0 としたものが静電磁場の基本方程式となる。このとき、静電場の基本方程式が以下のスカラーポテンシャル ϕ に関する**ポアソン方程式**と同値であることを示せ。また、無限遠でゼロとなるようなポアソン方程式の解（電荷密度 ρ がつくるクーロンポテンシャル）を書き表せ。

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\text{、ただし}\ \boldsymbol{E} = -\nabla\phi$$

4. モノポール（単極磁荷）は存在しない、つまり $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ であるので、磁束密度はあるベクトル場 $\boldsymbol{A}$（**ベクトルポテンシャル**と呼ぶ）を用いて必ず $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ と表わせる。実際、以下のように定義した $\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ を満たすことを確認せよ（単なる一例である。他に思いついたものがあれば教えて欲しい）。

$$\boldsymbol{A} = \left(\int_{z_0}^{z} B_y(x, y, z')dz', -\int_{z_0}^{z} B_x(x, y, z')dz' + \int_{x_0}^{x} B_z(x', y, z_0)dx', 0\right)$$

5. $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ を満たすベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ に任意のスカラー関数 χ の勾配 $\nabla\chi$ を付け加えたベクトル場 $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\chi$ も $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}'$ を満たすことを示せ。このように、ベクトルポテンシャルは（スカラーポテンシャル ϕ に比べると）任意性が高い。

6. ベクトルポテンシャルの任意性の高さを利用して、特定の問題を解きやすくするような条件を $\boldsymbol{A}$ に付与することが電磁気学ではしばしば行われる。ここでは $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$（**クーロンゲージ**と呼ばれる）という条件について考えよう。あるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ は満たすが $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ は満たしていないとする（設問４の $\boldsymbol{A}$ がその例）。このとき,ポアソン方程式 $\nabla^2\chi = -\nabla \cdot A$　を満たすようなスカラー関数 χ（必ず存在する）の勾配 $\nabla\chi$ を $\boldsymbol{A}$ に付け加えた $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\chi$ はクーロンゲージの条件を満たすことを確認せよ。このように、クーロンゲージを選ぶことは常に可能である。

7. （参考課題）静磁場の場合、変位電流 $\varepsilon_0 \partial \boldsymbol{E}/\partial t$ は 0 なので $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$（アンペールの法則）が成り立つ。このとき、$\boldsymbol{A}$ の条件としてクーロンゲージを選べば

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{j}$$

が成り立つことを確認せよ。この式は成分に分けて考えれば、まさしく設問３に出てきたポアソン方程式そのものである。したがって、無限遠で 0 となるような $\boldsymbol{A}$ の各成分の解は、クーロンポテンシャルと同じ関数形となる。このようにして求まる $\boldsymbol{A}$ を用いて $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ を計算することにより、以下のビオ・サバールの法則を導出せよ。

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times \boldsymbol{e}_{r-r'}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2} dV'$$